

DODATEK 3:
DOWODY NIEKTÓRYCH TWIERDZEŃ
DOTYCZĄCYCH
OPERACJI KONSEKWENCJI
W JĘZYKACH ZDANIOWYCH

DEFINICJA 5.1. *Operacja konsekwencji wyznaczona przez reguły wnioskowania.*

Niech S będzie zbiorem wszystkich wyrażeń poprawnych (formuł) języka zdaniowego J . Niech \mathcal{R} będzie dowolną rodziną reguł wnioskowania w J . Przez *operację konsekwencji w J wyznaczoną przez \mathcal{R}* rozumiemy każdą funkcję $C : 2^S \rightarrow 2^S$, zdefiniowaną indukcyjnie następującymi warunkami dla dowolnego zbioru formuł X języka J :

- (1) $C_{\mathcal{R}}^0(X) = X$
- (2) $C_{\mathcal{R}}^{k+1}(X) = C_{\mathcal{R}}^k(X) \cup \{\alpha \in S : (\exists R \in \mathcal{R})(\exists P \subseteq C_{\mathcal{R}}^k(X)) (P, \alpha) \in R\}$
- (3) $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup \{C_{\mathcal{R}}^k(X) : k \in \mathcal{N}\}$.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ czytamy: α jest *wyprowadzalna* z X za pomocą reguł należących do \mathcal{R} .

Niech $Cld(\mathcal{R}, X)$ oznacza, że zbiór formuł X języka J jest *domknięty na wszystkie reguły ze zbioru \mathcal{R}* : $Cld(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall R \in \mathcal{R})(\forall P \subseteq S)(\forall \alpha \in S)((P, \alpha) \in R \wedge P \subseteq X) \Rightarrow \alpha \in X.$$

UWAGA. Proszę odróżniać symbol implikacji \rightarrow w KRZ od używanego tu metajęzykowego symbolu \Rightarrow .

Twierdzenie 5.12. Operacja konsekwencji wyznaczona przez reguły \mathcal{R} ma następujące własności:

- (1) Jeśli $n < m$, to $C_{\mathcal{R}}^n(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}^m(X)$.
- (2) $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in Y$ dla każdego zbioru Y takiego, że $X \subseteq Y$ oraz $Cld(\mathcal{R}, Y)$.
- (3) $((P, \alpha) \in R \wedge R \in \mathcal{R}) \Rightarrow \alpha \in C_{\mathcal{R}}(P)$.
- (4) $((P, \alpha) \in R \wedge R \in \mathcal{R} \wedge P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)) \Rightarrow \alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

- (5) $X \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$ (zwrotność).
- (6) $X \subseteq Y \Rightarrow C_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(Y)$ (monotoniczność).
- (7) $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \Rightarrow C_{\mathcal{R}_1}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}_2}(X)$ (monotoniczność).
- (8) $C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X)) = C_{\mathcal{R}}(X)$ (idempotencja).
- (9) $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup \{C_{\mathcal{R}}(Y) : Y \subseteq X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).
- (10) $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup \{C_{\mathcal{R}'}(X) : \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R} \wedge \overline{\overline{\mathcal{R}'}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).
- (11) Jeśli dla dowolnych elementów X, Y niepustej rodziny \mathcal{X} zachodzi alternatywa $X \subseteq Y \vee Y \subseteq X$, to: $C_{\mathcal{R}}(\bigcup \{X : X \in \mathcal{X}\}) = \bigcup \{C_{\mathcal{R}}(X) : X \in \mathcal{X}\}$.

DOWÓD.

(1). Dowód przeprowadzimy przez indukcję. Załóżmy, że $n < m$.

Jeśli $n = m - 1$, to $C_{\mathcal{R}}^n(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}^m(X)$ na mocy punktu (2) definicji 5.1. Załóżmy teraz, że teza twierdzenia zachodzi dla $n = m - k$, gdzie $k < m$. Pokażemy, że zachodzi ona także dla $n = m - (k + 1)$.

Zakładamy zatem, że $C_{\mathcal{R}}^{m-k}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$. Niech $\alpha \in C_{\mathcal{R}}^{m-(k+1)}(X)$. Oznacza to, że $\alpha \in C_{\mathcal{R}}^{(m-k)-1}(X)$, a więc, na mocy punktu (2) definicji 5.1., $\alpha \in C_{\mathcal{R}}^{m-k}(X)$. Z założenia indukcyjnego otrzymujemy wtedy $\alpha \in C_{\mathcal{R}}^m(X)$.

(2). Trzeba dowieść implikacje: prostą i odwrotną.

Dowód \Leftarrow . Załóżmy, że $\alpha \in Y$ dla każdego zbioru Y takiego, że $X \subseteq Y$ oraz $Cld(\mathcal{R}, Y)$. Wprost z definicji 5.1. widać, że $X \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$. Pokażemy, że $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest domknięty na wszystkie reguły ze zbioru \mathcal{R} .

Jeśli $R \in \mathcal{R}$, $(P, \alpha) \in R$ oraz $P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$, gdzie $P = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$, to dla wszystkich $i \leq n$: $\beta_i \in C_{\mathcal{R}}^{k_i}(X)$. Niech $k = \max(k_1, \dots, k_n)$. Na mocy udowodnionego przed chwilą punktu (1) twierdzenia 5.12., $P \subseteq C_{\mathcal{R}}^k(X)$, a stąd, zgodnie z punktem (2) definicji 5.1., $\alpha \in C_{\mathcal{R}}^{k+1}(X)$. Ponieważ $C_{\mathcal{R}}^{k+1}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$, więc $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Dowód \Rightarrow . Załóżmy, że $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ oraz niech $X \subseteq i Cld(Y)$. Otrzymujemy stąd, że $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(Y)$. Skoro $Cld(\mathcal{R}, Y)$, to $\alpha \in Y$.

(3). Wynika wprost z definicji 5.1. oraz z udowodnionego przed chwilą punktu (1) twierdzenia 5.12.

(4). Wynika wprost z definicji 5.1. oraz z udowodnionego przed chwilą punktu (1) twierdzenia 5.12.

(5). Wynika wprost z definicji 5.1.

(6). Wynika wprost z definicji 5.1.

(7). Wynika wprost z definicji 5.1.

(8). Inkluzja $C_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X))$ jest konsekwencją monotoniczności operatora $C_{\mathcal{R}}$.

Dla dowodu inkluzji $C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X)) \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$ załóżmy, że $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X))$. Istnieją wtedy $\beta_1, \dots, \beta_n \in C_{\mathcal{R}}(X)$ takie, że $\alpha \in C_{\mathcal{R}}^h(\{\beta_1, \dots, \beta_n\})$, dla pewnej liczby h .

Z kolei, dla każdej formuły β_i , gdzie $1 \leq i \leq n$ istnieją formuły $\gamma_1^i, \dots, \gamma_{m_i}^i \in X$ takie, że:

- $\beta_1 \in C_{\mathcal{R}}^{k_1}(\{\gamma_1^1, \dots, \gamma_{m_1}^1\})$
- \vdots
- $\beta_n \in C_{\mathcal{R}}^{k_n}(\{\gamma_1^n, \dots, \gamma_{m_n}^n\})$.

Niech $k = \max(k_1, \dots, k_n)$. Wtedy:

$$\alpha \in C_{\mathcal{R}}^{h+k}(\{\gamma_1^1, \dots, \gamma_{m_1}^1, \dots, \gamma_1^n, \dots, \gamma_{m_n}^n\}).$$

A zatem $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$. Ostatecznie, mamy: $C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X)) = C_{\mathcal{R}}(X)$.

(9). Wynika z faktu, że rozważane zbiory przesłanek są skończone.

(10). Wynika z faktu, że rozważane zbiory przesłanek są skończone.

(11). Inkluzja $\bigcup\{C_{\mathcal{R}}(X) : X \in \mathcal{X}\} \subseteq C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\})$ wynika z monotoniczności operatora $C_{\mathcal{R}}$.

Dla dowodu inkluzji $C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\}) \subseteq \bigcup\{C_{\mathcal{R}}(X) : X \in \mathcal{X}\}$ niech $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\})$. Musimy pokazać, że $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ dla pewnego $X \in \mathcal{X}$.

Skoro $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\})$, to istnieją $\beta_1, \dots, \beta_n \in \bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\}$ takie, że $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(\{\beta_1, \dots, \beta_n\})$. Z założenia, rodzina \mathcal{X} jest liniowo uporządkowana przez inkluzję. Ponieważ zbiór $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ jest skończony, więc istnieje najmniejszy (względem inkluzji) zbiór $X \in \mathcal{X}$ taki, że $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq X$. Z monotoniczności operatora $C_{\mathcal{R}}$ otrzymujemy: $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Ostatecznie, mamy: $C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\}) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}}(X) : X \in \mathcal{X}\}$.

DEFINICJA 5.2. Reguły dopuszczalne i reguły wyprowadzalne.

Zbiór $Perm(\mathcal{R}, X)$ wszystkich reguł *dopuszczalnych* ze względu na X i \mathcal{R} definiujemy następująco:

$R \in Perm(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in R$ i $P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Zbiór $Der(\mathcal{R}, X)$ wszystkich reguł *wyprowadzalnych* ze względu na X i \mathcal{R} definiujemy następująco:

$R \in Der(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in R$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X \cup P)$.

Twierdzenie 5.13.

$R \in Perm(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$.

DOWÓD. Trzeba dowieść implikacje: prostą i odwrotną.

Dowód \Rightarrow .

Założmy, że $R \in Perm(\mathcal{R}, X)$. Niech $\alpha \in C_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(X)$. Na mocy punktu (2) twierdzenia 5.12. mamy wtedy: jeśli $Cld(\mathcal{R} \cup \{R\}, X)$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$. Stąd i z założenia, że $R \in Perm(\mathcal{R}, X)$ mamy: $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Dowód \Leftarrow .

Niech $(P, \alpha) \in R$ oraz $P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$. Na mocy monotoniczności (względem reguł) operatora $C_{\mathcal{R}}$ mamy: $P \subseteq C_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(X)$. Stąd, na mocy punktu (4) twierdzenia 5.12. otrzymujemy: $\alpha \in C_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(X) = C_{\mathcal{R}}(X)$.

Twierdzenie 5.14.

- (1) $R \in Der(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $Y \subseteq S$ oraz każdej rodziny reguł \mathcal{R}' : $C_{\mathcal{R} \cup \mathcal{R}' \cup \{R\}}(X \cup Y) \subseteq C_{\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'}(X \cup Y)$.
- (2) $Der(\mathcal{R}, X) \subseteq Perm(\mathcal{R}, X)$.
- (3) Istnieją: \mathcal{R} oraz X takie, że $Perm(\mathcal{R}, X) - Der(\mathcal{R}, X) \neq \emptyset$.

DOWÓD.

(1). Dowód implikacji \Leftarrow otrzymujemy bezpośrednio z punktu (3) twierdzenia 5.12.

Dla dowodu implikacji \Rightarrow zauważmy, że jeśli $R \in Der(\mathcal{R}, X)$, to, na mocy punktów (5)–(10), zbiór $C_{\mathcal{R} \cup \mathcal{R}' \cup \{R\}}(X \cup Y)$ jest domknięty na regułę R , dla dowolnego zbioru Y .

Z powyższego, jeśli $\alpha \in C_{\mathcal{R} \cup \mathcal{R}' \cup \{R\}}(X \cup Y)$, to, na mocy punktu (2) twierdzenia 5.12., $\alpha \in C_{\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'}(X \cup Y)$.

(2). Wynika bezpośrednio z definicji pojęć reguły dopuszczalnej oraz reguły wyprowadzalnej.

(3). Niech R_{triv} będzie regułą o schemacie $\frac{\alpha}{\alpha}$. Niech R_{sub} będzie regułą podstawiania (formuł za zmienne zdaniowe, określoną w wykładach 5-7). Wtedy:

$$R_{sub} \in Perm(\{R_{triv}\}, \{p \rightarrow p\}) - Der(\{R_{triv}\}, \{p \rightarrow p\}).$$

Zanotujmy jeszcze, bez dowodów, pewne dalsze fakty dotyczące dopuszczalności oraz wyprowadzalności reguł:

- (4) $\mathcal{R} \subseteq Perm(\mathcal{R}, X)$.
- (5) $Perm(Perm(\mathcal{R}, X), X) = Perm(\mathcal{R}, X)$.
- (6) Funkcja $Perm$ nie jest finitystyczna względem argumentu X . Nie jest monotoniczna ani względem argumentu \mathcal{R} , ani względem argumentu X .
- (7) $Der(\mathcal{R}, X) = \bigcap \{Perm(\mathcal{R}', X') : \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}' \wedge X \subseteq X'\}$.

- (8) $\mathcal{R} \subseteq \text{Der}(\mathcal{R}, X)$.
- (9) Jeśli $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$, to $\text{Der}(\mathcal{R}, X) \subseteq \text{Der}(\mathcal{R}', X)$.
- (10) Jeśli $X \subseteq Y$, to $\text{Der}(\mathcal{R}, X) \subseteq \text{Der}(\mathcal{R}, Y)$.
- (11) $\text{Der}(\text{Der}(\mathcal{R}, X), X) = \text{Der}(\mathcal{R}, X)$.
- (12) Funkcja Der nie jest finitystyczna ani względem argumentu \mathcal{R} , ani względem argumentu X .

* * *

UWAGA. Twierdzenia dotyczące wielu dalszych własności operatorów i relacji konsekwencji w językach zdaniowych znaleźć można np. w cytowanych niżej pracach.

Problematyka ta wykracza nieco poza ramy programowe tego kursu. Dociekliwe studentki mogą być jednak zainteresowane, co łączy wszystkie omawiane w tym semestrze operacje i relacje konsekwencji. Przypomnijmy, że omówiliśmy następujące tego typu relacje i operacje dla KRZ:

- relacja konsekwencji \vdash_{krz} oraz operacja C_{krz} , wyznaczone przez aksjomatykę KRZ i regułę odrywania RO;
- relacja konsekwencji $\vdash_{\mathfrak{B}_2}$ oraz operacja $C_{\mathfrak{B}_2}$, wyznaczone przez macierz \mathfrak{B}_2 (tu przez $X \vdash_{\mathfrak{B}_2} \alpha$ rozumiemy, że $\alpha \in C_{\mathfrak{B}_2}(X)$);
- relacja konsekwencji \vdash_{jas} oraz operacja C_{jas} , wyznaczone przez reguły pierwotne systemu założeniowego KRZ;
- relacja konsekwencji \vdash_{rez} oraz operacja C_{rez} , wyznaczone przez regułę rezolucji w KRZ;
- relacja konsekwencji \vdash_{tab} oraz operacja C_{tab} , wyznaczone przez tablice analityczne dla KRZ.

Pokazaliśmy, że wszystkie te relacje konsekwencji są równe:

$$\vdash_{krz} = \vdash_{\mathfrak{B}_2} = \vdash_{jas} = \vdash_{rez} = \vdash_{tab} .$$

Wszystkie wymienione wyżej operacje konsekwencji dla KRZ spełniają warunki (C1)–(C4) omówione w wykładach 5–7.

* * *

UWAGA. Przytoczone wyżej szkice dowodów wzorowano na dowodach przedstawionych w cytowanej na wykładzie monografii W.A. Pogorzelskiego: *Klasyczny Rachunek Zdań. Zarys teorii.*, PWN, Warszawa 1975³.

Ogólne własności pojęcia konsekwencji przedstawione zostały w pracach Alfreda Tarskiego:

Tarski, A. 1930. Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. *Monatshefte für Mathematik und Physik* Bd XXXVII, 361–404.

Tarski, A. 1934. Z badań metodologicznych nad definiowalnością terminów. *Przeegląd Filozoficzny*. 37, 438–460. Zob. też: *Alfred Tarski: Pisma logiczno-filozoficzne. Tom 2. Metalogika.* (Redakcja naukowa: Jan Zygmunt), Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.

Wymieńmy kilka dalszych prac o fundamentalnym znaczeniu dla tej problematyki:

Łoś, J., Suszko, R. 1956. Remarks on sentential logics. *Indagationes Mathematicae* XX, 177–183.

Pogorzelski, W.A., Wojtylak, P. 1982. *Elements of the theory of completeness in propositional logic.* Silesian University, Katowice.

Wójcicki, R. 1984. *Lectures on propositional calculi.* Ossolineum, Wrocław.

Czelakowski, J. 2001. *Protoalgebraic logics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.

* * *

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl