

# LOGIKA MATEMATYCZNA (5) – 27XI2013

I rok Językoznawstwa i Nauk o Informacji UAM

## 1 System założeniowy KRZ

### 1.1 Reguły pierwotne

Reguła dołączania koniunkcji DK:  $\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$

Reguła dołączania alternatywy DA:  $\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}$

Reguła dołączania równoważności DR:  $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha}{\alpha \equiv \beta}$

Reguła kontrapozycji RK:  $\frac{\neg \alpha \rightarrow \neg \beta}{\beta \rightarrow \alpha}$

Reguła opuszczania koniunkcji OK:  $\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$

Reguła opuszczania alternatywy OA:  $\frac{\alpha \vee \beta, \neg \beta}{\alpha} \quad \frac{\alpha \vee \beta, \neg \alpha}{\beta}$

Reguła opuszczania równoważności OR:  $\frac{\alpha \equiv \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{\alpha \equiv \beta}{\beta \rightarrow \alpha}$

Reguła odrywania RO:  $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$

### 1.2 Dowody założeniowe wprost

Dowodem założeniowym wprost formuły o postaci  $\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (\alpha_3 \rightarrow \dots \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta) \dots))$  jest ciąg formuł zaczynający się od założeń  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ , po których następują formuły (kolejne kroki dowodu), na dołączenie których pozwalają przyjęte reguły, a kończący się formułą  $\beta$ .

Krokami dowodowymi mogą być też wcześniej udowodnione formuły. Reguła  $\frac{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}{\beta}$  jest regułą wyprowadzalną (wtórną), gdy formuła  $\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (\alpha_3 \rightarrow \dots \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta) \dots))$  ma dowód. Również z reguł wtórnych można korzystać w krokach dowodowych.

### 1.3 Dowody założeniowe nie wprost

Dowodem założeniowym nie wprost formuły o postaci  $\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (\alpha_3 \rightarrow \dots \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta) \dots))$  jest ciąg formuł zaczynający się od założeń  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  oraz założenia dowodu nie wprost  $\neg \beta$ , po których następują formuły (kolejne kroki dowodu), na dołączenie których pozwalają przyjęte reguły oraz wcześniej udowodnione formuły. Dowód taki uznajemy za zakończony, gdy otrzymamy w nim parę formuł wzajem sprzecznych.

### 1.4 Dodatkowe założenia dowodu

Reguła wprowadzania implikacji. Czynimy w dowodzie dodatkowe założenie  $\alpha$ . Jeśli z założenia  $\alpha$  (oraz wcześniejszych kroków dowodu) możemy wyprowadzić formułę  $\beta$ , to do dowodu wolno włączyć formułę  $\alpha \rightarrow \beta$ . Z kroków wyprowadzenia  $\beta$  z  $\alpha$  nie wolno korzystać poza tym wyprowadzeniem.

### 1.5 Sprzeczne zbiory formuł

Zbiór formuł  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$  jest sprzeczny, gdy z jego elementów wyprowadzić można parę formuł wzajem sprzecznych.

### 1.6 Twierdzenie o pełności systemu założeniowego KRZ

Tezę systemu założeniowego KRZ jest każda formuła, która posiada dowód założeniowy. Twierdzenie o pełności systemu założeniowego KRZ głosi, że zbiór tez pokrywa się ze zbiorem tautologii KRZ.

## 2 Zadanie domowe

1. Przeczytaj slajdy 28–44 z prezentacji *Dowody założeniowe w KRZ*.
2. Rozwiąż (w kajecie) zadania 33–38 z *Ćwiczeń z logiki*.
3. Pisemnie (termin: 4 grudnia 2013, godz. 15:20). Rozwiąż dwa zadania ze slajdu 67 w prezentacji *Semantyka KRZ*:  
<http://logic.amu.edu.pl/images/b/b8/Logmatzim01x.pdf>