Logika algebraiczna 8

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

2021

Plan na dziś:

- Logika niefregowska: geneza, zasady semantyczne
- Sentential Calculus with Identity
- Teorie w języku zdaniowej logiki niefregowskiej

Następny wykład:

- Logika i semantyka W-języków

- *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* (1879)
- *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* (1884)
- *Über Sinn und Bedeutung.* (1892)
- *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet.* (I, 1893; II, 1903)

- Frege uznawał, że denotacją zdania jest jego wartość logiczna. Tak więc, istnieją wedle Fregego tylko dwie denotacje zdań: Prawda i Fałsz.
- Frege uważany jest za jednego z głównych przedstawicieli logicyzmu.

Tractatus logico-philosophicus (*Logisch-philosophische Abhandlung*, 1929):

1. Świat jest wszystkim, co jest faktem. (Die Welt ist alles, was der Fall ist.)
2. To, co jest faktem – fakt – jest istnieniem stanów rzeczy. (Was der Fall ist, die Tatsache, ist das Bestehen von Sachverhalten.)
3. Logicznym obrazem faktów jest myśl. (Das logische Bild der Tatsache ist der Gedanke.)
4. Myśl jest to zdanie sensowne. (Der Gedanke ist der sinnvolle Satz.)
5. Każde zdanie jest funkcją prawdziwościową zdań elementarnych. (Der Satz ist eine Wahrheitsfunktion der Elementarsätze.)
6. Ogólna forma funkcji prawdziwościowej ma postać: $[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$. Jest to ogólna forma zdania. (Die allgemeine Form der Wahrheitsfunktion ist: $[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$. Dies ist die allgemeine Form des Satzes.)
7. O czym nie można mówić, o tym trzeba milczeć. (Wovon man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen.)

$$
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{s}(\varphi) & \longleftarrow & \varphi & \longrightarrow & \boldsymbol{t}(\varphi) = 1 \text{ lub } 0, \quad \text{gdy } \varphi \text{ jest zdaniem} \\
& {}_f\searrow & \downarrow & \nearrow_g & \\
& & \boldsymbol{r}(\varphi) & &
\end{array}
$$

- Każdemu wyrażeniu φ poprawnie zbudowanemu przypisać można jego sens $s(\varphi)$ oraz denotację (odniesienie przedmiotowe) $r(\varphi)$. Ponadto, jeśli φ jest zdaniem, to ma ono też wartość logiczną $t(\varphi)$.
- W logice niefregowskiej przyjmuje się, że denotacją (korelatem semantycznym) zdania jest sytuacją, którą zdanie opisuje. Nie przesądza się, *czym* są sytuacje, ale przyjmuje się pewne ogólne zasady, które charakteryzują ogół sytuacji oraz ich związki z rozważanym językiem (np. językiem logiki pierwszego rzędu, ze standardowo rozumianym pojęciem modelu).

- *Rzeczy i fakty. Wstęp do pierwszej filozofii Wittgensteina*. (1968)
- *Ontologia sytuacji: podstawy i zastosowania*. (1985)
- Tłumaczenia prac Fregego oraz *Traktatu* Wittgensteina.
- Hermeneutyka logiczna.
- Wykłady na temat *Traktatu* Wittgensteina.

- Termin „logika niefregowska" wprowadził w 1968 roku Roman Suszko w pracy „Non-Fregean logic and theories".
- W artykule „Ontologia w *Traktacie* Wittgensteina" Suszko proponuje formalizm, który miałby – zgodnie z tytułem – stanowić rekonstrukcję idei Wittgensteina. Nawiązuje jednocześnie do pracy Bogusława Wolniewicza *Rzeczy i fakty. Wstęp do pierwszej filozofii Wittgensteina*.
- Program logiki niefregowskiej przedstawił Suszko w obszernej rozprawie „Abolition of the Fregean axiom" w 1975 roku.
- Stephen Bloom i Donald Brown, we współpracy z Romanem Suszką, rozwijali matematyczne aspekty logiki niefregowskiej, a także zapoczątkowali rozważanie *logik akstrakcyjnych* (rozumianych jako pary złożone z algebry języka i systemu domknięć).
- Suszko dwoływał się też do wczesnych prac Jerzego Łosia, dotyczących matryc logicznych.

- *Zarys logiki niefregowskiej*. (1986)
- *Szkice z semantyki i ontologii sytuacji*. (1991)
- *Roman Suszko. Wybór pism*. (1998)
- *Idee logiczne Romana Suszki*. (2001)

W dalszym ciągu, przedstawiając logikę niefregowską, opieramy się przede wszystkim na monografii Mieczysława Omyły *Zarys logiki niefregowskiej*, a także, rzecz jasna, na pracach Romana Suszki.

1. Każdej nazwie i każdemu zdaniu rozważanego języka odpowiada dokładnie jeden korelat semantyczny w dowolnym modelu tego języka.
2. W każdym modelu rozważanego języka uniwersum korelatów semantycznych zdań tego języka jest rozłączne z uniwersym desygnatów nazw tego języka.
3. Każde zdanie rozważanego języka jest albo prawdziwe albo fałszywe w dowolnym modelu tego języka.
4. Zbiór zdań rozważanego języka prawdziwych w dowolnym modelu tego języka jest ze względu na operację konsekwencji określoną w tym języku maksymalnym niesprzecznym zbiorem zdań.
5. Jeżeli dwa dowolne zdania rozważanego języka mają ten sam korelat semantyczny w jakimś modelu tego języka, to mają one również w tym modelu tę samą wartość logiczną.
6. Jeżeli dowolne wyrażenia danego języka mają ten sam korelat semantyczny w danym modelu, to są one wzajemnie wymienialne w każdym wyrażeniu posiadającym korelat semantyczny bez zmiany tego korelatu w tym modelu.
7. Jeżeli zdania α, β rozważanego języka są wzajemnie wymienialne w każdym zdaniu tego języka bez zmiany wartości logicznej tego zdania w danym modelu tego języka, to zdania α, β mają ten sam korelat semantyczny w tym modelu.

- W celu sformułowania pewnych wniosków, wynikających z powyższych zasad przyjmiemy następujące oznaczenia:
  1. $\psi[a/b]$: wynik podstawienia w ψ wyrażenia b za a;
  2. $v(\alpha)$ wartość logiczną zdania α w (dowolnym ustalonym) modelu $\mathbf{M}$;
  3. jeśli wyrażenie a języka J ma korelat semantyczny w ustalonym modelu $\mathbf{M}$ języka J, to przez $h(a)$ oznaczamy ten korelat (w metajęzyku języka J).
- Przy tych oznaczeniach zasada 5 przyjmuje postać: Dla dowolnego modelu $\mathbf{M}$ języka J i dowolnych zdań α, β tego języka: jeżeli $h(\alpha) = h(\beta)$, to $v(\alpha) = v(\beta)$.
- Natomiast zasada 6 stwierdza, że: Dla dowolnego modelu $\mathbf{M}$ języka J i dowolnych wyrażeń a, b tego języka posiadających korelaty semantyczne w modelu $\mathbf{M}$: jeżeli $h(a) = h(b)$, to $h(\psi) = h(\psi[a/b])$.
- Wreszcie, zasada 7 stwierdza, że: Dla dowolnego modelu $\mathbf{M}$ języka J i dowolnych zdań α, β tego języka: jeśli dla każdego zdania γ języka J, $v(\gamma) = v(\gamma[\alpha/\beta])$, to $h(\alpha) = h(\beta)$.

- Bezpośrednio z przywołanych zasad semantycznych wynikają następujące wnioski:
  1. Jeżeli zdania α, β języka J mają różne korelaty semantyczne w modelu **M** tego języka, to istnieje zdanie γ tego języka takie, że zdania γ i $\gamma[\alpha/\beta]$ mają różne wartości logiczne w **M**.
  2. Jeżeli dwa wyrażenia języka J posiadają ten sam korelat semantyczny w danym modelu tego języka, to wyrażenia te są wzajemnie wymienialne w każdym zdaniu tego języka bez zmiany wartości logicznej w tym modelu.
  3. Zdania α i β języka J mają ten sam korelat semantyczny w danym modelu **M** tego języka wtedy i tylko wtedy, gdy zdania te są wzajemnie wymienialne w każdym zdaniu tego języka bez zmiany wartości logicznej w tym modelu.
- Z zasad semantycznych 3 i 5 wynika, że składnia rozważanego języka nakłada na ogół korelatów semantycznych zdań tego języka strukturę algebry podobnej do algebry tego języka. Przy tym, funkcje przyporządkowujące zdaniom ich korelaty semantyczne są homomorfizmami algebry języka na algebrę jego korelatów semantycznych.

- **Twierdzenie**. Niech $\mathbf{S} = (S, F_1, \ldots, F_n)$ będzie algebrą zdań, zaś h funkcją, przyporządkowującą zdaniom ich korelaty semantyczne, które tworzą zbiór A. Załóżmy, że spełniony jest następujący warunek dla dowolnego m_i-argumentowego spójnika F_i oraz dowolnych zdań $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i}, \beta_1, \ldots, \beta_{m_i}$: jeśli $h(\alpha_1) = h(\beta_1), \ldots, h(\alpha_{m_i}) = h(\beta_{m_i})$, to $h(F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i})) = h(F_i(\beta_1, \ldots, \beta_{m_i}))$.
  Wtedy dla każdego spójnika F_i istnieje funkcja $\overline{F_i} : A^{m_i} \to A$ taka, że dla dowolnych zdań $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i}$ zachodzi równość:
  $h(F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i})) = \overline{F_i}(h(\alpha_1), \ldots, h(\alpha_{m_i}))$.
- **Dowód**. Niech $a_1, \ldots, a_{m_i} \in A$. Istnieją zatem zdania $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i} \in S$ takie, że $a_j = h(\alpha_j)$ dla $1 \leqslant j \leqslant m_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Definiujemy $\overline{F_i}(a_1, \ldots, a_{m_i}) = h(F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i}))$.
- Z założeń twierdzenia wynika, że wartość $\overline{F_i}(a_1, \ldots, a_{m_i})$ jest jednoznacznie określona dla każdego ciągu $a_1, \ldots, a_{m_i}$. $\square$

- Jeśli $\mathbf{S} = (S, F_1, \ldots, F_n)$ jest algebrą języka, zaś $\mathbf{A}$ jest algebrą do niej podobną a h homorfizmem $\mathbf{S}$ w $\mathbf{A}$, to dla dowolnego zdania α element $h(\alpha)$ nazywamy korelatem algebraicznym zdania α w algebrze $\mathbf{A}$.
- Jeśli $\mathbf{A}$ jest algebrą korelatów semantycznych zdań w pewnym ustalonym modelu rozważanego języka, a D jest podzbiorem uniwersum algebry $\mathbf{A}$ złożonym z korelatów semantycznych zdań prawdziwych w tym modelu, to $(\mathbf{A}, D)$ jest matrycą logiczną dla rozważanego języka zdaniowego.
- **Twierdzenie**. Jeśli $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ jest matrycą korelatów semantycznych zdań rozważanego języka w pewnym ustalonym modelu tego języka, to matryca $\mathfrak{M}$ jest prosta (tj. jej jedyną kongruencją matrycową jest identyczność).
- **Dowód**. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że matryca $\mathfrak{M}$ nie jest prosta.

- Istnieje zatem kongruencja θ matrycy $\mathfrak{M}$ taka, że dla pewnych $a, b \in A$ mamy $a \neq b$ i $a\theta b$.
- Na mocy założeń twierdzenia istnieją zdania α i β rozważanego języka takie, że dla pewnego homomorfizmu h algebry języka w algebrę **A** mamy $h(\alpha) = a$ i $h(\beta) = b$.
- Skoro h jest homomorfizmem, to jeśli $(h(\alpha), h(\beta)) \in \theta$, to dla każdego zdania γ rozważanego języka zachodzi $(h(\gamma), h(\gamma[\alpha/\beta])) \in \theta$.
- Ponieważ θ jest kongruencją matrycy $\mathfrak{M}$, więc albo $h(\gamma) \in D$ i $h(\gamma[\alpha/\beta]) \in D$, albo $h(\gamma) \notin D$ i $h(\gamma[\alpha/\beta]) \notin D$.
- To znaczy, że dla każdego zdania γ rozważanego języka mamy $v(\gamma) = v(\gamma[\alpha/\beta])$.
- Na mocy zasady semantycznej 7 wynika stąd, że $h(\alpha) = h(\beta)$, a to stoi w sprzeczności z przypuszczeniem, że matryca $\mathfrak{M}$ nie jest prosta.
- Musimy więc odrzucić to przypuszczenie, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

- Z czysto formalnego punktu widzenia, żaden z maksymalnych niesprzecznych zbiorów zdań rozważanego języka nie jest wyróżniony.
- Jeśli T jest dowolnym maksymalnym niesprzecznym zbiorem zdań rozważanego języka, to określamy relację $\sim_T$: $\alpha \sim_T \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych zdań γ i δ, $\gamma[\delta/\alpha] \in T$ dokładnie wtedy, gdy $\gamma[\delta/\beta] \in T$.
- Relacja $\sim_T$ jest kongruencją matrycy (S, T).
- Matryca ilorazowa $(S/\sim_T, T/\sim_T)$ jest formalną reprezentacją korelatów semantycznych zdań rozważanego języka, wyznaczoną przez teorię zupełną T.

Zasady semantyczne 5, 6, 7 są niezależne od pozostałych zasad:

- *Niezależność 5*. Rozważmy dowolny język oparty na logice klasycznej, zbiór zdań prawdziwych tworzy dowolna teoria zupełna. Korelatem semantycznym wszystkich zdań niech będzie dowolny obiekt, nie będący korelatem semantycznym żadnej nazwy tego języka.
- *Niezależność 6*. Rozważmy język, w którym występuje co najmniej jeden spójnik nieprawdziwościowy. Oznacza to, że istnieje teoria zupełna T taka, że dla pewnych zdań α, β, γ należących do T zdanie $\gamma[\alpha/\beta]$ nie należy do T. Niech $v(\delta) = 1$ dla $\delta \in T$, $v(\delta) = 0$ dla $\delta \notin T$ oraz niech $h(\delta) = v(\delta)$.
- Wtedy zasada 6 nie jest spełniona, a zasady 5 i 7 są spełnione:
  - Nie jest spełniona zasada 6, ponieważ dla zdań α, β i γ mamy: $h(\alpha) = h(\beta)$ i $h(\gamma) \neq h(\gamma[\alpha/\beta])$.
  - Zasada 5 jest spełniona, ponieważ $h(\delta) = v(\delta)$ dla wszystkich δ.
  - Przypuśćmy, że zasada 7 nie jest spełniona, czyli dla pewnych α i β mamy: $h(\alpha) \neq h(\beta)$ oraz $v(\gamma) = v(\gamma[\alpha/\beta])$ dla wszystkich γ.
  - Ponieważ $h(\delta) = v(\delta)$ dla wszystkich δ, więc $v(\gamma) = v(\gamma[\alpha/\beta])$ dla wszystkich γ oraz $v(\alpha) \neq v(\beta)$, co daje sprzeczność.

- *Niezależność 7.* Rozważmy język S z klasycznym rachunkiem logicznym i niech $h(\alpha) = \alpha$, a zbiorem zdań prawdziwych niech będzie dowolna teoria zupełna w tym języku.
- Wtedy (S, T) jest matrycą korelatów semantycznych.
- Ta matryca spełnia wszystkie zasady 1–6, natomiast zasada 7 nie jest spełniona, gdyż dwa dowolne różne zdania α i β należące do T są wzajemnie wymienialne we wszystkich kontekstach zdaniowych rozważanego języka, ale posiadają różne korelaty semantyczne.

Dalsze własności związane z zasadami semantycznymi omawiane są w pracy Mieczysława Omyły „Zasady niefregowskiej semantyki zdań a zasady semantyczne Fregego i Wittgensteina" (W: Omyła, M. (Red.) 1991. *Szkice z semantyki i ontologii sytuacji*, *Biblioteka Myśli Semiotycznej* 9, Warszawa, 99–114).

- *Wersja semantyczna*. Wszystkim zdaniom prawdziwym w pewnym modelu odpowiada w tym modelu jeden i ten sam korelat semantyczny; podobnie, wszystkim zdaniom fałszywym w pewnym modelu odpowiada w tym modelu jeden i ten sam korelat semantyczny.
- *Wersja ontologiczna*. Sformułowanie aksjomatu Fregego w tej wersji wymaga posłużenia się W-językami, a więc językami ze spójnikiem identyczności, w których można kwantyfikować zmienne zdaniowe. Każda z poniższych (wzajem równoważnych) formuł wyraża ontologiczną wersję aksjomatu Fregego:
  1. $\forall p_1 \forall p_2 \forall p_3 ((p_1 \equiv p_2) \vee (p_1 \equiv p_3) \vee (p_2 \equiv p_3))$
  2. $\forall p_1 \forall p_2 (p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow (p_1 \equiv p_2)$
  3. $\forall p_1 \forall p_2 (p_1 \leftrightarrow p_2) \equiv (p_1 \equiv p_2)$.

- Dwuczłonowy spójnik $\equiv$ nazywa Suszko spójnikiem identyczności w systemie (rachunku) logicznym $(\mathbf{S}, C)$, jeśli spełnia on następujące warunki (tutaj C jest strukturalną operacją konsekwencji, a $X \vdash \alpha$ jest zapisem reguły wnioskowania w tym systemie, czyli $X \vdash \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C(X)$):
  1. $\vdash (\alpha \equiv \alpha)$
  2. $\alpha, \alpha \equiv \beta \vdash \beta$
  3. dla każdego n-argumentowego funktora F_i w rozważanym systemie: $\alpha_1 \equiv \beta_1, \alpha_2 \equiv \beta_2, \ldots, \alpha_n \equiv \beta_n \vdash F_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \equiv F_i(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n)$.
- Pierwsza z tych reguł to reguła aksjomatyczna, druga jest specyficzna dla spójnika identyczności, a reguły wymienione jako trzecie są regułami inwariancji.
- Z powyższej definicji wynika, że $\equiv$ jest spójnikiem identyczności w systemie $(\mathbf{S}, C)$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda teoria w tym systemie jest zamknięta na powyższe reguły.

- **Twierdzenie**. Jeśli $(\mathbf{S}, C)$ jest rachunkiem zdaniowym ze spójnikiem identyczności $\equiv$, a T jest dowolną teorią niezmienniczą w tym rachunku, to relacja $\sim_T$ określona w zbiorze S warunkiem: $\alpha \sim_T \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \equiv \beta) \in T$ jest kongruencją niezmienniczą i algebra $\mathbf{S}/\sim_T$ jest wolno generowana przez zbiór wszystkich klas $\sim_T$-równoważności zmiennych zdaniowych języka $\mathbf{S}$. $\square$
- **Twierdzenie**. Jeśli $\equiv$ jest spójnikiem równoważności w rachunku $(\mathbf{S}, C)$, to relacja $\sim_{C(\emptyset)}$ określona w zbiorze S warunkiem: $\alpha \sim_{C(\emptyset)} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \equiv \beta) \in C(\emptyset)$ jest największą kongruencją logiczną rachunku $(\mathbf{S}, C)$.
- **Dowód**. Niech θ będzie dowolną kongruencją logiczną rachunku $(\mathbf{S}, C)$ i niech $\alpha\theta\beta$.
- Ponieważ $\alpha\theta\beta$ i $\beta\theta\beta$, więc $(\alpha \equiv \beta)\theta(\beta \equiv \beta)$.
- Skoro θ jest kongruencją logiczną i $(\beta \equiv \beta) \in C(\emptyset)$, więc $(\alpha \equiv \beta) \in C(\emptyset)$, co znaczy, że $\alpha \sim_{C(\emptyset)} \beta$. $\square$

- Algebra ilorazowa $\mathbf{S}/\sim_{C(\emptyset)}$ to algebra Lindenbauma-Tarskiego dla rachunku $(\mathbf{S}, C)$.
- Przez $\mathcal{K}_{\mathbf{S}}(C)$ oznaczymy klasę algebr podobnych do $\mathbf{S}$ takich, że dla każdej algebry $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_{\mathbf{S}}(C)$ dowolne odwzorowanie ze zbioru klas $\sim_{C(\emptyset)}$-równoważności zmiennych zdaniowych języka $\mathbf{S}$ daje się rozszerzyć do homomorfizmu $\mathbf{S}/\sim_{C(\emptyset)}$ w $\mathbf{A}$.
- Klasa $\mathcal{K}_{\mathbf{S}}(C)$ stanowi podstawę dla budowania semantyk rachunków zdaniowych ze spójnikiem identyczności.
- Zauważmy różnicę między spójnikami równoważności $\leftrightarrow$ i identyczności $\equiv$ w rachunku $(\mathbf{S}, C)$:

  1. $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(X \cup \{\alpha\}) = C(X \cup \{\beta\})$
  2. $(\alpha \equiv \beta) \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(X \cup \{\varphi[p/\alpha]\}) = C(X \cup \{\varphi[p/\beta]\})$

  (gdzie $\alpha, \beta, \varphi \in S$, $X \subseteq S$, a p jest dowolną zmienną zdaniową języka $\mathbf{S}$).

- Język logiki SCI to algebra $\mathcal{L} = (L, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \equiv)$.
- Jedyną regułą wnioskowania jest reguła odrywania: $\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$.
- Zbiór LA aksjomatów logicznych to suma zbiorów TFA (aksjomaty dla spójników prawdziwościowych) oraz IDA (aksjomaty dla identyczności).
- Zbiór TFA zawiera następujące schematy:

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
3. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
4. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$
5. $(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
6. $(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
7. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta))$
8. $(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$

- Zbiór IDA zawiera następujące schematy:
  1. $\alpha \equiv \alpha$
  2. $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\neg\alpha \equiv \neg\beta)$
  3. $((\alpha \equiv \beta) \wedge (\gamma \equiv \delta)) \rightarrow ((\alpha \circ \gamma) \equiv (\beta \circ \delta))$, gdzie $\circ$ jest dowolnym ze spójników $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\equiv$
  4. $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$
- Operację C konsekwencji w $\mathcal{L}$ określamy następująco: $\alpha \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest wyprowadzalne z $LA \cup X$ w skończonej liczbie kroków, za pomocą wyłącznie reguły odrywania.
- Tak określona operacja konsekwencji jest: finitystyczna, strukturalna, zwarta i regularna. Zachodzi też klasyczne twierdzenie o dedukcji.
- Parę $(\mathcal{L}, C)$ nazywamy niefregowskim rachunkiem zdaniowym (rachunkiem zdaniowym z identycznością, SCI). Najmniejszą SCI-teorię, czyli $C(\emptyset)$ nazywamy zbiorem twierdzeń logicznych SCI.

W dalszym ciągu symbol C będzie odnosił się do określonej wyżej operacji.

- Niech $\mathbf{A} = (A, \circ, \ldots)$ będzie algebrą z operacją dwuargumentową $\circ$ (oraz ewentualnie innymi operacjami).
- Mówimy, że kongruencja θ algebry $\mathbf{A}$ jest regularna ze względu na operację $\circ$, gdy dla wszystkich $a, b, c \in A$: jeśli $(a \circ b, c \circ c) \in \theta$, to $(a, b) \in \theta$
- **Twierdzenie**. Jeżeli kongruencja θ algebry $\mathbf{A}$ jest regularna ze względu na operację $\circ$, to w algebrze ilorazowej $\mathbf{A}/\theta$ kongruencja identycznościowa jest regularna ze względu na operację $\circ^\theta$, odpowiadającą operacji $\circ$.
- **Dowód**. Mamy pokazać, że dla $x, y, z \in A/\theta$ zachodzi warunek: jeśli $(x \circ^\theta y) = (z \circ^\theta z)$, to $x = y$.
- Załóżmy, że $(x \circ^\theta y) = (z \circ^\theta z)$. Niech $x = a/\theta$, $y = b/\theta$, $z = c/\theta$.
- Wtedy $(a \circ b)/\theta = (c \circ c)/\theta$, a stąd $(a \circ b, c \circ c) \in \theta$.
- Ponieważ θ jest regularna względem $\circ$, więc $(a, b) \in \theta$, czyli $a/\theta = b/\theta$, a więc $x = y$. $\square$

- Algebrę $\mathbf{A} = (A, \circ, \ldots)$ nazywamy regularną względem $\circ$, jeśli każda kongruencja tej algebry jest regularna względem $\circ$.
- Algebrę $\mathbf{A} = (A, \circ_1, \ldots, \circ_n)$ nazywamy regularną, jeśli $\mathbf{A}$ jest regularna ze względu na pewną operację $\circ_i$, dla $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Jeśli zatem podzielimy algebrę regularną przez jej dowolną kongruencję, to kongruencja identycznościowa w algebrze ilorazowej będzie regularna ze względu na pewną operację algebry ilorazowej.
- **Twierdzenie**. Dla każdej SCI-teorii T relacja $\sim_T$, określona następująco: $\alpha \sim_T \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \equiv \beta) \in T$ ma następujące własności:
  1. $\sim_T$ jest kongruencją algebry $\mathcal{L} = (L, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \equiv)$.
  2. $\sim_T$ jest regularna ze względu na operację $\equiv$.
  3. Jeśli $\alpha \sim_T \beta$ i $\alpha \in T$, to $\beta \in T$

- **Dowód**. Relacja $\sim_T$ jest zwrotna na mocy aksjomatu IDA1. Symetria i przechodniość tej relacji wynika z aksjomatu IDA4 oraz twierdzeń:
  $((\alpha \equiv \beta) \wedge (\alpha \equiv \alpha)) \rightarrow ((\alpha \equiv \alpha) \equiv (\beta \equiv \alpha))$
  $((\alpha \equiv \beta) \wedge (\gamma \equiv \delta)) \rightarrow ((\alpha \equiv \gamma) \equiv (\beta \equiv \beta))$.
- Relacja $\sim_T$ jest kongruencją na mocy aksjomatów IDA2, IDA3, IDA4.
- Załóżmy, że dla dowolnych α, β i γ zachodzi $((\alpha \equiv \beta), (\gamma \equiv \gamma)) \in \sim_T$.
- Znaczy to, że $((\alpha \equiv \beta) \equiv (\gamma \equiv \gamma)) \in T$.
- Wtedy, na mocy IDA4, $(\alpha \equiv \beta) \in T$, a zatem $(\alpha, \beta) \in \sim_T$.
- Z IDA4 wynika, że jeśli $\alpha \sim_T \beta$ i $\alpha \in T$, to $\beta \in T$. $\square$

Formuły o postaci $\alpha \equiv \beta$ nazywamy równościami, a zbiór wszystkich równości będących twierdzeniami teorii T oznaczamy przez $Eq(T)$.

- Algebry podobne do algebry SCI-języka nazywamy SCI-algebrami. Klasa tych algebr zawiera klasę wszystkich algebr Boole'a z operacją dwuargumentową $\circ$, czyli klasę wszystkich B-algebr.
- Podzbiór F uniwersum SCI-algebry $\mathbf{A}$ nazywamy SCI-filtrem, gdy dla dowolnego homomorfizmu algebry SCI-języka w algebrę $\mathbf{A}$ przeciwobraz zbioru F jest SCI-teorią.
- Parę $(\mathbf{A}, F)$, gdzie $\mathbf{A}$ jest SCI-algebrą, a F jest SCI-filtrem, nazywamy SCI-matrycą. Ze strukturalności operacji C wynika, że dla dowolnego zbioru zdań X matryca typu Lindenbauma $(\mathcal{L}, C(X))$ jest SCI-matrycą (bo $h^{-1}[C(X)]$ jest SCI-teorią dla homomorfizmów $h : \mathcal{L} \to \mathbf{A}$).
- Parę $(\mathbf{A}, D)$ nazywamy SCI-modelem, gdy $\mathbf{A}$ jest SCI-algebrą, a D jest podzbiorem jej uniwersum takim, że dla dowolnych $a, b \in A$:
  1. $\neg^{\mathbf{A}} a \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \notin D$
  2. $a \wedge^{\mathbf{A}} b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in D$ oraz $b \in D$
  3. $a \vee^{\mathbf{A}} b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in D$ lub $b \in D$
  4. $a \rightarrow^{\mathbf{A}} b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \notin D$ lub $b \in D$
  5. $a \leftrightarrow^{\mathbf{A}} b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a, b \in D$ lub $a, b \notin D$
  6. $a \circ^{\mathbf{A}} b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$

- Jeśli $(\mathbf{A}, D)$ jest SCI-modelem, to D nazywamy normalnym ultrafiltrem algebry $\mathbf{A}$, a samą tę algebrę półmodelem języka $\mathcal{L}$. Jeśli $\mathbf{A}$ jest półmodelem, to iloczyn wszystkich normalnych ultrafiltrów tej algebry jest niepusty, ponieważ zbiory $\{a \vee^{\mathbf{A}} -a : a \in A\}$, $\{a \rightarrow^{\mathbf{A}} a : a \in A\}$, $\{a \leftrightarrow^{\mathbf{A}} a : a \in A\}$, $\{a \circ^{\mathbf{A}} a : a \in A\}$, $\{\neg^{\mathbf{A}}(a \circ^{\mathbf{A}} a) : a, b \in A, a \neq b\}$ są wszystkie zawarte w każdym normalnym ultrafiltrze tej algebry.
- Przypominamy, że ultrafiltr boolowski U nazywamy ultrafiltrem normalnym algebry $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div, \circ)$, gdy dla dowolnych $a, b \in A$ zachodzi: $a \circ b \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.
- **Twierdzenie**. W B-algebrze $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div, \circ)$ istnieje ultrafiltr normalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych n i m oraz każdych ciągów skończonych $c_1, \ldots, c_n$, $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_m$ jej elementów zachodzi warunek: $(*)$ jeżeli $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} (c_i \circ c_i) \leqslant \bigvee\limits_{j=1}^{m} (a_j \circ b_j)$, to $a_j = b_j$ dla pewnego $1 \leqslant j \leqslant m$.

- **Dowód**. Załóżmy, że w algebrze **A** istnieje ultrafiltr normalny U. Wtedy dla dowolnych $a, b \in A$ mamy: $a \circ b \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$. Musimy pokazać, że zachodzi warunek $(*)$.
- Załóżmy, że dla ustalonych liczb m i n zachodzi $\bigwedge_{i=1}^{n}(c_i \circ c_i) \leqslant \bigvee_{j=1}^{m}(a_j \circ b_j)$. Pokażemy, że wtedy $a_j = b_j$ dla pewnego $1 \leqslant j \leqslant m$.
- Na mocy normalności ultrafiltru U mamy: $c_i \circ c_i \in U$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Stąd, ponieważ U jest filtrem, więc $\bigvee_{j=1}^{m}(a_j \circ b_j) \in U$, a ponieważ ta suma jest skończona, a U jest ultrafiltrem, więc $a_j \circ b_j \in U$ dla pewnego $1 \leqslant j \leqslant m$.
- Ponieważ U jest ultrafiltrem normalnym, więc $a_j = b_j$.

- Założymy z kolei, że zachodzi warunek $(*)$ i pokażemy, że w **A** istnieje ultrafiltr normalny.
- Warunkiem wystarczającym, aby istniał taki ultrafiltr jest to, aby każdy skończony podzbiór zbioru $D = \{(c_i \circ c_i) : c_i \in A\} \cup \{-(a_j \circ b_j) : a_j, b_j \in A, a_j \neq b_j\}$ był różny od zera algebry **A**.
- Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że dla pewnych n oraz m mamy: $\bigwedge\limits_{i=1}^{n}(c_i \circ c_i) \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{m} -(a_j \circ b_j) = 0$.
- Wtedy, na mocy prawa De Morgana: $\bigwedge\limits_{i=1}^{n}(c_i \circ c_i) \wedge - \bigvee\limits_{j=1}^{m}(a_j \circ b_j) = 0$
- To znaczy, że $\bigwedge\limits_{i=1}^{n}(c_i \circ c_i) \leqslant \bigvee\limits_{j=1}^{m}(a_j \circ b_j)$.
- Jednak z definicji zbioru D mamy $a_j \neq b_j$ dla wszystkich $1 \leqslant j \leqslant m$, a zatem nie zachodzi warunek $(*)$. $\square$

- Przypomnienie notacji. $Sat_h(\mathfrak{M})$ oznacza zbiór wszystkich zdań spełnionych przez h w $\mathfrak{M}$, czyli zdań α takich, że $h(\alpha) \in D$. Tutaj $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ jest matrycą logiczną. Mamy więc: $Sat_h(\mathfrak{M}) = h^{-1}(D)$. Przypominamy, że zbiorem tautologii matrycy $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ nazywamy zbiór $E(\mathfrak{M}) = \bigcap\limits_h Sat_h(\mathfrak{M})$, gdzie h przebiega zbiór wszystkich homomorfizmów algebry języka w algebrę $\mathbf{A}$. Mamy zatem: $E(\mathfrak{M}) = \bigcap\limits_h h^{-1}(D)$.
- **Twierdzenie**. T jest teorią zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje model $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ oraz homomorfizm h algebry języka w algebrę $\mathbf{A}$ taki, że $T = Sat_h(\mathfrak{M})$.
- Zauważmy, że jeśli T jest teorią zupełną, to matryca Lindenbauma-Tarskiego $\mathfrak{M}(T) = (\mathcal{L}/\sim_T, T/\sim_T)$ jest SCI-modelem, a nadto $T = \mathrm{Sat}_{k_{\sim_T}}\mathfrak{M}(T)$, gdzie $k_{\sim_T}(a) = a/\sim_T$ oraz $\alpha \sim_T \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \equiv \beta) \in T$. □

- Ponieważ C jest regularną operacją konsekwencji, więc każda SCI-teoria jest iloczynem wszystkich teorii zupełnych ją zawierających. To pozwala udowodnić twierdzenie o pełności dla SCI:
- **Twierdzenie**. Dla dowolnych $X \subseteq L$ oraz $\alpha \in L$: $\alpha \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego SCI-modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ i dla każdego homomorfizmu h algebry języka w algebrę $\mathbf{A}$ zachodzi implikacja: jeżeli $X \subseteq Sat_h(\mathfrak{M})$, to $\alpha \in Sat_h(\mathfrak{M})$. $\square$
- Twierdzenie o pełności można także sformułować przy użyciu konsekwencji matrycowej:
- **Twierdzenie**. Dla dowolnych $X \subseteq L$ oraz $\alpha \in L$: $\alpha \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego SCI-modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$: $\alpha \in C_{\mathfrak{M}}(X)$. $\square$
- Mamy zatem: $\alpha \in C(\emptyset)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C_{\mathfrak{M}}(\emptyset)$ dla każdego SCI-modelu $\mathfrak{M}$.

- Teorię T w SCI-języku nazywamy quasi-zupełną, gdy:
  1. T jest niesprzeczna
  2. T jest niezmiennicza
  3. dla dowolnych formuł α i β, jeżeli $V(\alpha) \cap V(\beta) = \emptyset$ oraz $\alpha \vee \beta \in T$, to $\alpha \in T$ lub $\beta \in T$ (tu $V(\alpha)$ oznacza zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych występujących w α).
- **Twierdzenie**. T jest quasi-zupełną SCI-teorią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje SCI-model $\mathfrak{M}$ taki, że $E(\mathfrak{M}) = T$.
- **Szkic dowodu**. Niech $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ będzie SCI-modelem. Najpierw pokażemy, że $E(\mathfrak{M})$ jest teorią quasi-zupełną.
- Niesprzeczność zbioru $E(\mathfrak{M})$ jest oczywista.
- Niezmienniczość zbioru $E(\mathfrak{M})$ oznacza, że jeśli $\alpha \in E(\mathfrak{M})$, to $e(\alpha) \in E(\mathfrak{M})$ dla każdego homomorfizmu $e : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, a ten fakt wynika z definicji zbioru $E(\mathfrak{M})$.
- Przypuśćmy (dla dowodu nie wprost), że istnieją α i β takie, że $V(\alpha) \cap V(\beta) = \emptyset$ oraz $\alpha \vee \beta \in E(\mathfrak{M})$, ale $\alpha \notin E(\mathfrak{M})$ i $\beta \notin E(\mathfrak{M})$.

- Istnieją zatem wartościowania zmiennych zdaniowych v_1 i v_2 takie, że $h^{v_1}(\alpha) \notin D$ i $h^{v_2}(\beta) \notin D$.
- Ponieważ $V(\alpha) \cap V(\beta) = \emptyset$, więc możemy określić wartościowanie v tak, aby: $h^v(\alpha) = h^{v_1}(\alpha)$ i $h^v(\beta) = h^{v_2}(\beta)$.
- Jednak wtedy $h^v(\alpha \vee \beta) \notin D$, co stoi w sprzeczności z założeniem, że $\alpha \vee \beta \in E(\mathfrak{M})$.
- Pokażemy z kolei, że dla każdej teorii quasi-zupełnej T istnieje SCI-model $\mathfrak{M}$ taki, że $E(\mathfrak{M}) = T$.
- Dowodzi się, że dla każdej teorii quasi-zupełnej T istnieje teoria zupełna T_0 taka, że T jest największą teorią niezmienniczą zawartą w T_0.
- Tworzymy matrycę Lindenbauma $(\mathcal{L}, T_0)$.
- Wtedy $E((\mathcal{L}, T_0))$ jest największą teorią zamkniętą na podstawianie zawartą w T_0, co implikuje, że $E((\mathcal{L}, T_0)) = T$.

- Tworzymy matrycę ilorazową $(\mathcal{L}/\sim_{T_0}, T_0/\sim_{T_0})$.
- Wtedy $T = E((\mathcal{L}/\sim_{T_0}, T_0/\sim_{T_0}))$, co oznacza, że także $E((\mathcal{L}/\sim_{T_0}, T_0/\sim_{T_0})) = E((\mathcal{L}, T_0))$.
- Równości te wynikają z tego, że każdy homomorfizm $e : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ wyznacza homomorfizm $h : \mathcal{L} \to \mathcal{L}/\sim_{T_0}$ taki, że $h = k_{\sim_{T_0}} \circ e$, gdzie $k_{\sim_{T_0}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}/\sim_{T_0}$ jest homomorfizmem kanonicznym.
- Także na odwrót: każdy homomorfizm $h : \mathcal{L} \to \mathcal{L}/\sim_{T_0}$ wyznacza odwzorowanie e takie, że $h = k_{\sim_{T_0}} \circ e$, co wynika z faktu, iż $\mathcal{L}$ jest algebrą absolutnie wolną. $\square$

- Teorią sytuacji w SCI nazywamy dowolną teorię inwariantną w SCI. Dla dowolnego SCI-modelu $\mathbf{M} = (\mathbf{A}, D)$ algebrą sytuacji istniejących w tym modelu nazywamy algebrę $\mathbf{A}$, a zbiór D nazywamy zbiorem faktów, zachodzących w tym modelu.
- Element $a \in A$ nazywamy:
    - faktem niewłaściwym, gdy $h(\alpha) = a$ dla pewnego twierdzenia logicznego α i pewnego homomorfizmu algebry $\mathcal{L}$ w algebrę $\mathbf{A}$.
    - sytuacją logicznie niemożliwą, gdy istnieje formuła α taka, że $h(\alpha) = a$ i $\neg\alpha \in C(\emptyset)$.
    - sytuacją konieczną w algebrze sytuacji $\mathbf{A}$, gdy $a \in D$ dla dowolnego zbioru faktów D określonego w algebrze $\mathbf{A}$.

- Ontologią sytuacji wyznaczoną przez algebrę sytuacji $\mathbf{A}$ nazywamy zbiór wszystkich formuł SCI-języka $\mathcal{L}$, które są prawdziwe w dowolnym modelu określonym na algebrze $\mathbf{A}$.
- Niech I będzie zbiorem indeksującym wszystkie ultrafiltry normalne w algebrze sytuacji $\mathbf{A}$, a h przebiega zbiór wszystkich homomorfizmów algebry języka $\mathcal{L}$ w algebrę sytuacji $\mathbf{A}$. Wtedy:
  1. $Core(\mathbf{A}) = \bigcap\limits_{i \in I} D_i$ (rdzeń algebry $\mathbf{A}$)
     $Core(\mathbf{A})$ to zbiór wszystkich sytuacji koniecznych w algebrze sytuacji $\mathbf{A}$.
  2. $Val(\mathbf{A}) = \bigcap\limits_{i \in I} E((\mathbf{A}, D_i))$ (prawdziwość w półmodelu)
     $Val(\mathbf{A})$ to ontologia sytuacji wyznaczona przez algebrę sytuacji $\mathbf{A}$.
  3. $Val(\mathbf{A}) = \bigcap\limits_{h} h^{-1} Core(\mathbf{A})$.

- Operację konsekwencji C możemy rozszerzyć, określając jej wzmocnienie C_A aksjomatyczne wykorzystujące zbiór A dodatkowych aksjomatów: $C_A(X) = C(A \cup X)$. Mamy oczywiście $C_A(\emptyset) = C(A)$.
- Wzmocnienia operacji konsekwencji C są interesujące ze względu na ich związek z różnymi teoriami sytuacji.
- Wzmocnienia aksjomatyczne odpowiadają dodatkowym warunkom, które nakładamy na ogół sytuacji.
- Zauważmy, że jeśli zbiory A, B formuł nie są C-równoważne (czyli $C(A) \neq C(B)$), to także $C_A \neq C_B$.
- Wzmocnień aksjomatycznych wyjściowej operacji konsekwencji C jest więc tyle, ile jest C-nierównoważnych zbiorów formuł.
- Istnieją jednak też wzmocnienia operacji C poprzez dodanie nowych reguł wnioskowania, które nie są równoważne żadnym aksjomatycznym wzmocnieniom tej operacji.

- **Twierdzenie**. C_A jest strukturalną operacją konsekwencji wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem niezmienniczym.
- **Dowód**. Załóżmy, że C_A jest strukturalną operacją konsekwencji. Wtedy dla dowolnego podstawienia e oraz wszystkich $X \subseteq L$ i $\alpha \in L$ mamy: jeśli $\alpha \in C_A(X)$, to $e\alpha \in C_A(X)$.
- Dla $X = \emptyset$ mamy zatem: jeśli $\alpha \in C_A(\emptyset)$, to $e\alpha \in C_A(\emptyset)$ dla dowolnego podstawienia e.
- To znaczy, że jeśli $\alpha \in C(A)$, to $e\alpha \in C(A)$ dla dowolnego podstawienia e, czyli zbiór A jest niezmienniczy.
- Załóżmy z kolei, że zbiór A jest niezmienniczy i niech $\alpha \in C_A(X)$, czyli $\alpha \in C(A \cup X)$.
- Na mocy strukturalności C mamy $e\alpha \in C(eA \cup eX)$ dla dowolnego podstawienia e.
- Na mocy niezmienniczości A mamy $e\alpha \in C_A(eX)$. □

- Teorie niezmiennicze w SCI-języku nazywaliśmy teoriami sytuacji. Z każdą teorią sytuacji T związana jest klasa modeli $\mathcal{K}$ taka, że dla dowolnych $\alpha \in L$ oraz $X \subseteq L$ zachodzi warunek: $\alpha \in C_T(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C_{\mathfrak{M}}$ dla każdego $\mathfrak{M} \in \mathcal{K}$. Jednak klasa $\mathcal{K}$ nie jest jednoznacznie wyznaczona.
- Jeśli za $\mathcal{K}$ przyjmiemy klasę wszystkich modeli, które są matrycami Lindenbauma-Tarskiego dla wszystkich teorii zupełnych T_i zawierających teorię T, to jej elementami są modele: $\mathfrak{M}(T_i) = (\mathcal{L}/\sim_{T_i}, T_i/\sim_{T_i})$, przy czym kongruencja $\sim_{T_i}$ jest określona następująco: $\alpha \sim_{T_i} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \equiv \beta) \in T_i$. Wtedy oczywiście $T \subseteq E(\mathfrak{M}(T_i))$.
  1. Jeśli istnieje model $\mathfrak{M}$ taki, że $T = E(\mathfrak{M})$, to $\mathfrak{M}$ nazywamy modelem adekwatnym dla teorii T.
  2. Gdy model $\mathfrak{M}$ jest taki, że dla wszystkich $\alpha \in L$ oraz $X \subseteq L$ zachodzi: $\alpha \in C_T(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C_{\mathfrak{M}}(X)$, to $\mathfrak{M}$ nazywamy modelem adekwatnym dla rachunku logicznego $(\mathcal{L}, C_T)$ (dla konsekwencji C_T).

Wszystkie teorie sytuacji posiadają adekwatne matryce, ale jedynie quasi-zupełne teorie sytuacji posiadają modele adekwatne.

- **Twierdzenie**. Jeżeli T jest teorią niesprzeczną, to $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ jest modelem adekwatnym dla C_T wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:
  1. $\mathfrak{M}$ jest modelem adekwatnym dla T.
  2. Dla każdej teorii zupełnej T_i zawierającej T istnieje homomorfizm h z $\mathcal{L}$ w $\mathbf{A}$ taki, że $T_i = h^{-1}(D)$. □
- **Twierdzenie**. Teoria T posiada model adekwatny wtedy i tylko wtedy, gdy operator C_T posiada model adekwatny. □
- **Twierdzenie**. Jeżeli $\mathbf{M}$ jest modelem adekwatnym dla teorii T, to: $C_T = C_{\mathbf{M}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{\mathbf{M}}$ jest finitystycznym operatorem konsekwencji. □

- Przez teorię boolowską w SCI (WB-teorię) rozumiemy teorię T, której twierdzeniami są wszystkie podstawienia formuł (zauważmy, że są to aksjomaty teorii algebr Boole'a, zapisane przy pomocy zmiennych zdaniowych, spójników prawdziwościowych i spójnika identyczności):
  1. $((p \wedge q) \vee r) \equiv ((q \vee r) \wedge (p \vee r))$
  2. $((p \vee q) \wedge r) \equiv ((q \wedge r) \vee (p \wedge r))$
  3. $(p \vee (q \wedge \neg q)) \equiv p$
  4. $(p \wedge (q \vee \neg q)) \equiv p$
  5. $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$
  6. $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$.
- Zestaw tych aksjomatów oznaczymy przez AB i zdefiniujemy: $WB = C(AB)$. Zachodzi równość $WB = C(\{\alpha \equiv \beta : \alpha \leftrightarrow \beta \in TFT\})$. Teoria WB jest niezmiennicza, a więc jest pewną teorią sytuacji. Wyznacza ona strukturalną operację konsekwencji C_{WB} określoną następująco: $\alpha \in C_{WB}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C(WB \cup X)$.
- Parę $(\mathbf{A}, U)$ nazywamy B-modelem, gdy $\mathbf{A}$ jest B-algebrą, a U jest normalnym ultrafiltrem boolowskim w tej algebrze.

- **Twierdzenie**. *WB* jest zbiorem wszystkich i tylko tych SCI-formuł, które są prawdziwe w każdym *B*-modelu.
- **Dowód.** Niech $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, U)$ będzie dowolnym *B*-modelem. Ponieważ reguła odrywania nie wyprowadza poza zbiór $E(\mathfrak{M})$, więc dla dowodu inkluzji $WB \subseteq E(\mathfrak{M})$ wystarczy pokazać, że $AB \subseteq E(\mathfrak{M})$.
- W tym celu obliczamy wartość każdego aksjomatu z *AB* przy każdym homomorfizmie $h : \mathcal{L} \to \mathbf{A}$ i przekonujemy się, że jest ona elementem zbioru *U* (wykorzystujemy fakt, że *U* jest ultrafiltrem normalnym).
- Przypuśćmy z kolei, że $\alpha \notin WB$. Pokażemy, że wtedy $\alpha \notin E(\mathfrak{M})$ dla pewnego *B*-modelu $\mathfrak{M}$.
- Jeśli $\alpha \notin WB$, to istnieje teoria zupełna *T* taka, że $WB \subseteq T$, ale $\alpha \notin T$.
- Model ilorazowy $(\mathcal{L}/\sim_T, T/\sim_T)$ jest *B*-modelem dla *T*, a więc także dla *WB*. Mamy zatem: $\alpha \notin (\mathcal{L}/\sim_T, T/\sim_T)$.
- Pokazaliśmy więc, że $WB = \bigcap\limits_{\mathfrak{N}} E(\mathfrak{N})$. □

- Niech $WT = C(\{\alpha \equiv \beta : \alpha \leftrightarrow \beta \in C(\emptyset)\})$. Teorie zawierające WT nazywamy WT-teoriami. Mają one formalizować tezę 5.141 *Traktatu logiczno-filozoficznego*, która głosi: *Jeżeli p wynika z q, a q wynika z p, to są one jednym i tym samym zdaniem.*
- T jest WT-teorią, gdy $T = C(WT \cup X)$ dla pewnego zbioru SCI-formuł X.
- Każda WT-teoria jest teorią operacji konsekwencji C_{WT}: $\alpha \in C_{WT}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C(WT \cup X)$.
- W każdej WT-teorii formuły logicznie równoważne są wzajemnie wymienialne we wszelkich kontekstach, co oznacza, że jeśli $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in C(\emptyset)$, to $\varphi[p/\alpha] \in T$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi[p/\beta] \in T$, dla dowolnej formuły φ i zmiennej p.

- Niektóre własności teorii $C_{WT}(\emptyset) = WT$:
  1. WT jest najmniejszą teorią boolowską w SCI zamkniętą na regułę Gödla: $\frac{\alpha,\beta}{\alpha\equiv\beta}$.
  2. WT jest najmniejszą teorią w SCI zamkniętą na regułę quasi-fregowską $\frac{\alpha\leftrightarrow\beta}{\alpha\equiv\beta}$. Teorie zamknięte ze względu na tę regułę nazywamy quasi-fregowskimi. Spójnik identyczności jest w nich spójnikiem równoważności. Oznacza to, że jeśli T jest quasi-fregowska, to $(\alpha \equiv \beta) \in T$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(T \cup \{\alpha\}) = C(T \cup \{\beta\})$.
- Zbiór WT jest niezmienniczy, a więc jest teorią sytuacji. Suszko pisze, że był nieco zaskoczony faktem, iż istnieje pewien związek między tą teorią a systemem modalnym S_4. Można dokonać przekładu f języka $\mathcal{L}$ na język systemu S_4, przy czym $f(\alpha) = \alpha$, gdy α nie zawiera spójnika identyczności oraz $f(\alpha \equiv \beta) = \Box(\alpha \leftrightarrow \beta)$. Wtedy $\alpha \in WT$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\alpha) \in S_4$. Przekładu odwrotnego dostarcza funkcja g taka, że $g(\alpha) = \alpha$, gdy w α nie występuje $\Box$, zaś $g(\Box\alpha) = \alpha \equiv (\alpha \vee \neg\alpha)$. Wtedy $\alpha \in S_4$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(\alpha) \in WT$.

- Na temat systemu S_4 znane są następujące fakty:
  1. $\alpha \in S_4$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej TB-algebry $\mathbf{A}$ i dowolnego homomorfizmu z $\mathcal{L}$ w $\mathbf{A}$: $h(\alpha) = 1_{\mathbf{A}}$.
  2. $(\Box\alpha \vee \Box\beta) \in S_4$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Box\alpha \in S_4$ lub $\Box\beta \in S_4$.
  3. Niech $\alpha \sim_{S_4} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Box(\alpha \leftrightarrow \beta) \in S_4$. Wtedy $\sim_{S_4}$ jest kongruencją i $\mathcal{L}/\sim_{S_4}$ jest dobrze spójną algebrą Boole'a.
  4. S_4 jest quasi-zupełna.
- Opisane wyżej przekłady pokazują więc, że:
  1. $\alpha \in WT$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej TB-algebry $\mathbf{A}$ i dowolnego homomorfizmu z $\mathcal{L}$ w $\mathbf{A}$: $h(\alpha) = 1_{\mathbf{A}}$.
  2. $\alpha \equiv \beta \vee \gamma \equiv \delta \in WT$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \equiv \beta \in WT$ lub $\gamma \equiv \delta \in WT$.
  3. Algebra $\mathcal{L}/\sim_{WT}$ jest dobrze spójną TB-algebrą.
  4. WT jest teorią quasi-zupełną.

- Przypomnienie: TB-algebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div, \circ)$ jest dobrze spójna, gdy dla dowolnych $a, b, c, d \in A$ spełniony jest warunek: jeśli $(a \circ b) \vee (c \circ d) = 1$, to $a = b$ lub $c = d$.
- **Twierdzenie**. W dowolnej TB-algebrze $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div, \circ)$ istnieje ultrafiltr normalny wtedy i tylko wtedy, gdy ta algebra jest dobrze spójna.
- **Dowód**. Załóżmy, że w TB-algebrze $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, -, \triangleright, \div, \circ)$ istnieje ultrafiltr normalny U, czyli ultrafiltr boolowski taki, że dla dowolnych $a, b \in A$ zachodzi: $a \circ b \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.
- Załóżmy, że $(a \circ b) \vee (c \circ d) = 1$. Wtedy $(a \circ b) \vee (c \circ d) \in U$, ponieważ U jest filtrem.
- Skoro U jest ultrafiltrem, to $a \circ b \in U$ lub $c \circ d \in U$, a ponieważ U jest ultrafiltrem normalnym, to $a = b$ lub $c = d$.
  Pokazaliśmy więc, że $\mathbf{A}$ jest dobrze spójna.

- Załóżmy z kolei, że **A** jest dobrze spójna.
- Przez indukcję pokazujemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ spełniony jest warunek: jeśli $(a_1 \circ b_1) \vee \ldots \vee (a_n \circ b_n) = 1$, to $a_1 = b_1$ lub ... lub $a_n = b_n$.
- Jeśli każdy skończony iloczyn boolowski elementów ze zbioru $\{c \circ c : c \in A\} \cup \{-(a_i \circ b_i) : a_i, b_i \in A, a_i \neq b_i\}$ jest różny od zera algebry, to w **A** istnieje ultrafiltr normalny.
- Ponieważ **A** jest TB-algebrą, więc każdy iloczyn elementów ze zbioru $\{c \circ c : c \in A\}$ jest równy 1.
- Wystarczy zatem pokazać, że każdy skończony iloczyn elementów ze zbioru $D = \{-(a_i \circ b_i) : a_i, b_i \in A, a_i \neq b_i\}$ jest różny od zera.
- Przypuśćmy, że $-(a_1 \circ b_1) \wedge \ldots \wedge -(a_n \circ b_n) = 0$ dla pewnych $(a_i \circ b_i) \in D$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Na mocy prawa De Morgana mamy $(a_1 \circ b_1) \vee \ldots \vee (a_n \circ b_n) = 1$, co jest sprzeczne z założeniem, że **A** jest dobrze spójna, ponieważ $a_i \neq b_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Pokazaliśmy zatem, że w **A** istnieje ultrafiltr normalny. □

- Istnieje SCI-model $\mathfrak{M}$ taki, że $WT = E(\mathfrak{M})$. Zauważmy bowiem, że WT jest quasi-zupełna oraz istnieje zupełna SCI-teoria T taka, że WT jest największą teorią inwariantną zawartą w T.
- Niech $\sim_T$ będzie relacją kongruencji określoną następująco: $\alpha \sim_T \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \equiv \beta) \in T$.
- Niech $\mathfrak{M}_T = (\mathcal{L}/\sim_T, T/\sim_T)$. Wtedy: $E(\mathfrak{M}_T) = WT$ i $\mathfrak{M}_T$ jest przeliczalnym modelem adekwatnym dla WT.
- Ponadto, ponieważ operacja konsekwencji C_{WT} jest regularna, więc klasa wszystkich modeli Lindenbauma-Tarskiego $(\mathcal{L}/\sim_T, T/\sim_T)$, gdzie T jest zupełną WT-teorią, jest adekwatna dla systemu logicznego $(\mathcal{L}, C_{WT})$.

- Następny rodzaj WB-teorii to te, w których modelach przyporządkowany jest element największy B-algebry wszystkim równościom spełnionym w modelu, a równościom niespełnionym w modelu przyporządkowany jest element najmniejszy B-algebry.
- Możemy rozszerzyć SCI-język poprzez następujące definicje (nietwórcze i równościowo przekładalne) stałych zdaniowych: $1 \equiv (p \vee \neg p) \quad 0 \equiv (p \wedge \neg p)$.
- Do aksjomatów AB dodajemy wszystkie podstawienia powyższych dwóch formuł oraz obie te definicje.
- Dodajemy także zbiór H wszystkich formuł SCI-języka reprezentowanych przez schemat: $(\alpha \equiv \beta) \equiv 0 \vee (\alpha \equiv \beta) \equiv 1$.
- Niech AH będzie sumą tych wszystkich zbiorów formuł i niech $WH = C(AH)$. Teorie, które zawierają zbiór WH nazywamy WH-teoriami.

- Najmniejszą WH-teorią jest $WH = C(AH)$. Jest ona niezmiennicza i równościowo aksjomatyzowalna – taką aksjomatykę tworzą aksjomaty algebry Boole'a wraz ze schematami:
  1. $1 \equiv (\alpha \vee \neg\alpha)$
  2. $0 \equiv (\alpha \wedge \neg\alpha)$
  3. $(\alpha \equiv \beta) \equiv ((\alpha \equiv \beta) \equiv 1)$
  4. $\neg(\alpha \equiv \beta) \equiv ((\alpha \equiv \beta) \equiv 0)$.
- Niech $\alpha \sim_{WH} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \equiv \beta) \in WH$. Wtedy $\sim_{WH}$ jest kongruencją.
- Twierdzenie. Dla dowolnej WH-teorii T algebra $\mathcal{L}/\sim_T = (L/\sim_T, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \circ)$ spełnia następujące warunki:
  1. $\mathcal{L}/\sim_T$ jest TB-algebrą.
  2. Dla dowolnych $\alpha, \beta \in L$: $\neg(|\alpha| \circ |\beta|) = (|\alpha| \circ |\beta| \circ 0)$.
  3. Jeżeli T jest teorią zupełną, to $\mathcal{L}/\sim_T$ jest algebrą Henlego.
  4. $\alpha \in WH$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej TB-algebry $\mathbf{A} = (A, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \circ)$ i dla dowolnych $a, b \in A$ zachodzi: $\neg(a \circ b) = ((a \circ b) \circ 0)$, a także dla dowolnego homomorfizmu h z $\mathcal{L}$ w $\mathbf{A}$: $h(\alpha) = 1_{\mathbf{A}}$. □

- Elementy o postaci $a \circ b$ są elementami otwartymi w TB-algebrach, a jeśli $\neg(a \circ b) = ((a \circ b) \circ 0)$, to każdy element domknięty jest też jednocześnie otwarty. Wszystkie elementy otwarte danej algebry tworzą algebrę Boole'a. TB-algebry, w których $\neg(a \circ b) = ((a \circ b) \circ 0)$ nazywamy w sobie dualnymi TB-algebrami.
- Wiadomo, że twierdzenia systemu modalnego S_5 to dokładnie te formuły, których wartością (przy każdym homomorfizmie) jest jedynka we wszystkich topologicznych algebrach Boole'a, w których każdy element otwarty jest jednocześnie domknięty.
- Systemy S_5 i WH są wzajem przekładalne (ponieważ w TB-algebrach operacje wnętrza i $\circ$ są wzajemnie definiowalne):
  $\Box\alpha \mapsto \alpha \equiv (\alpha \vee \neg\alpha)$,
  $\alpha \equiv \beta \mapsto \Box(\alpha \leftrightarrow \beta)$.

- Ponieważ S_5 jest quasi-zupełna, więc WH też jest quasi-zupełna, a zatem istnieje zupełna WH-teoria T taka, że WH jest największą zawartą w niej teorią niezmienniczą.
- Podobnie jak poprzednio, dzielimy matrycę Lindenbauma $(\mathcal{L}, T)$ przez kongruencję $\sim_T$ (gdzie $\alpha \sim_T \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \equiv \beta) \in T$), co daje nam SCI-model $\mathfrak{M}_T$. Wtedy $E(\mathfrak{M}_T) = WH$. Model $\mathfrak{M}_T$ jest modelem przeliczalnym silnie adekwatnym dla WH.
- Modelem Henlego (H-modelem) nazywamy dowolny SCI-model $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ taki, że $\mathbf{A}$ jest algebrą Henlego.
- **Twierdzenie**. Dla dowolnych $\alpha \in L$ oraz $X \subseteq L$ zachodzi równoważność: $\alpha \in C_{WH}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C_{\mathfrak{M}}(X)$ dla wszystkich modeli Henlego $\mathfrak{M}$.
- **Dowód**. Załóżmy, że $\alpha \notin C_{WH}(X)$.
- Ponieważ SCI jest regularny, więc istnieje teoria zupełna T taka, że $X \subseteq T$ i $\alpha \notin T$.

- Dzieląc matrycę $(\mathcal{L}, T)$ przez kongruencję $\sim_T$ (gdzie $\alpha \sim_T \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \equiv \beta \in T$) tworzymy matrycę ilorazową $\mathfrak{M}(T)(\mathcal{L}/\sim_T, T/\sim_T)$, która jest H-modelem.
- Dla homomorfizmu kanonicznego $k_{\sim_T}$ mamy wtedy: $k_{\sim_T}(\alpha) = \alpha/\sim_T$, $X \subseteq Sat_{k_{\sim_T}}(\mathfrak{M}(T))$ oraz $\alpha \notin Sat_{k_{\sim_T}}(\mathfrak{M}(T))$.
- Załóżmy z kolei, że dla pewnego H-modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ i dla pewnego homomorfizmu $h : \mathcal{L} \to \mathbf{A}$ mamy: $h[X] \subseteq D$ i $h(\alpha) \notin D$.
- Ponieważ $h^{-1}[D]$ jest zupełną WH-teorią, więc istnieje teoria zupełna T taka, że $WH \cup X \subseteq T$ i $\alpha \notin T$, a zatem $\alpha \notin C_{WH}(X)$. $\square$

- Teorię T w SCI-języku nazywamy fregowską, gdy jej twierdzeniami są wszystkie formuły języka $\mathcal{L}$ reprezentowaane przez schemat: $(\alpha \equiv \beta) \equiv (\alpha \leftrightarrow \beta)$. Niech AF oznacza zbiór wszystkich takich formuł. Najmniejszą teorię fregowską, czyli $C(AF)$ oznaczamy przez WF. Jest ona inwariantna, a więc jest pewną teorią sytuacji i wyznacza pewien operator konsekwencji C_{WF}, będący aksjomatycznym wzmocnieniem SCI. Każda teoria fregowska jest B-teorią. Modelem dowolnej teorii fregowskiej jest zawsze dwuelementowa algebra Boole'a $\mathbf{B}_2$, której jedynka jest elementem wyróżnionym. W teoriach fregowskich spójnik identyczności jest spójnikiem prawdziwościowym. Spójnik równoważności ma wszystkie własności spójnika identyczności.
- Operacja konsekwencji C_{WF} jest określona następująco. Dla dowolnych $\alpha \in L$ i $X \subseteq L$, $\alpha \in C_{WF}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego homomorfizmu h z $\mathcal{L}$ w $\mathbf{B}_2$: jeśli $h[X] \subseteq \{1\}$, to $h(\alpha) = 1$.

- Rachunek SCI jest rozstrzygalny, czego dowodzi się odwołując się do skończonych modeli tego rachunku.
- **Twierdzenie**. Dla dowolnych liczb naturalnych $n \geqslant 2$, $1 \leqslant t < n$ istnieje SCI-model $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ taki, że $|A| = n$ i $|D| = t$. □
- **Twierdzenie**. Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje skończona SCI-algebra $\mathbf{A}$ zawierająca n różnych podzbiorów $D_1, \ldots, D_n$ takich, że dla $1 \leqslant i \leqslant n$ para $(\mathbf{A}, D_i)$ jest SCI-modelem, a ponadto $E((\mathbf{A}, D_i)) \neq E((\mathbf{A}, D_j))$ dla $i \neq j$. □
- **Twierdzenie**. Jeśli formuła α jest spełnialna w pewnym modelu, to jest też spełnialna w pewnym modelu skończonym. □
- Wiemy, że $C(\emptyset) = \bigcap E(\mathfrak{M})$, gdzie iloczyn dotyczy wszystkich SCI-modeli. Na mocy powyższych twierdzeń, mamy również: $C(\emptyset) = \bigcap E(\mathfrak{M})$, gdzie iloczyn dotyczy skończonych wszystkich SCI-modeli. Pamiętajmy jednak, że dla żadnego pojedynczego modelu skończonego $\mathfrak{M}$ warunek $C(\emptyset) = E(\mathfrak{M})$ nie zachodzi.

- Istnieje matryca adekwatna $\mathbf{M} = (\mathbf{A}, D)$ dla SCI taka, że dla pewnego homomorfizmu h z $\mathcal{L}$ w $\mathbf{A}$:
  1. $\alpha \equiv \beta$ jest spełniona przez h w $\mathbf{M}$, ale $h(\alpha) \neq h(\beta)$ (co oznacza, że spójnik identyczności nie ma w $\mathbf{M}$ zamierzonej interpretacji).
  2. $h^{-1}(D)$ nie jest maksymalną teorią niesprzeczną (co oznacza, że spójnik negacji nie ma zamierzonej interpretacji w tej matrycy).
- Dla każdego SCI-modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ zachodzą inkluzje:

$$C(\emptyset) \subseteq Val(\mathbf{A}) \subseteq E((\mathfrak{A}, D)).$$

- **Twierdzenie**. Dla pewnego modelu przeliczalnego $\mathbf{M} = (\mathbf{A}, D)$ zachodzi równość: $C(\emptyset) = E((\mathbf{A}, D))$. $\square$
- **Twierdzenie**. Każdy model adekwatny dla teorii $C(\emptyset)$ jest nieskończony. $\square$
- **Twierdzenie**. Istnieje model $\mathfrak{M}$ mocy kontinuum taki, że $C = C_{\mathfrak{M}}$. $\square$
- **Twierdzenie**. Każdy model $\mathfrak{M}$ taki, że $C = C_{\mathfrak{M}}$ jest nieprzeliczalny. $\square$
- **Twierdzenie**. Istnieje przeliczalny model $\mathfrak{M}$ taki, że $C_{WH} = C_{\mathfrak{M}}$. $\square$
- **Twierdzenie**. Każda matryca adekwatna dla rachunku $(\mathcal{L}, C_{WT})$ jest nieprzeliczalna, a więc także każdy model adekwatny dla tego rachunku jest nieprzeliczalny. $\square$

- Bloom, S., Suszko, R. 1972. Investigations into the sentential calculus with identity. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 13 (3), 289–308.
- Hawranek, J., Zygmunt, J. 2001. Problematyka adekwatności matryc logicznych w pracach Romana Suszki. W: Omyła, M. (Red.) *Idee logiczne Romana Suszki*, Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 53–71.
- Łoś, J., Suszko, R. 1958. Remarks on sentential logics. *Indagationes Mathematicae* 20, 177–189.
- Omyła, M. 1986. *Zarys logiki niefregowskiej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Wójcicki, R. 1984. *Lectures on propositional calculi.* Ossolineum, Wrocław.