Logika Matematyczna (1)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

Wprowadzenie

Plan konwersatorium

- Dzisiaj: wprowadzenie.
- Semestr zimowy: Elementarz — Klasyczny Rachunek Zdań (KRZ).
- Semestr letni: Elementarz — Klasyczny Rachunek Predykatów (KRP).

Materiały dydaktyczne będą dostępne na stronie Zakładu Logiki Stosowanej UAM:

www.logic.amu.edu.pl

Tam także: linki do stron poświęconych logice matematycznej.

Konwersatorium kończy się egzaminem pisemnym.

Polecana literatura

- Batóg, T. 2003[4]. *Podstawy logiki.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
- Ławrow, I.A., Maksimowa, L.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Marek, I. *Elementy logiki formalnej.* Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2002.
- Murawski, R., Świrydowicz, K. *Podstawy logiki i teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2006.
- Omyła, M. 1995. *Zarys logiki.* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
- Stanosz, B. 2000[11]. *Ćwiczenia z logiki.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Logika — działy

- Logika matematyczna
- Logika filozoficzna
- Ogólna metodologia nauk
- Semiotyka logiczna
- Logiczne podstawy informatyki.

Logika w rozwiniętej postaci wyłoniła się z refleksji filozoficznej Zachodu. Obecnie wszystkie jej działy posługują się narzędziami matematycznymi. Logika jest dyscypliną o najbardziej rozwiniętej i usystematyzowanej metodologii.

Logika matematyczna — działy

- Elementarz Logiczny (KRZ + KRP)
- Teoria dowodu
- Teoria modeli
- Teoria rekursji
- Metalogika.

Z logiką matematyczną blisko związane są Podstawy Matematyki, obejmujące m.in. Teorię Mnogości.

Są dwa sposoby dydaktyki logiki:

- Logica docens
- Logica utens.

Logika — kilka podstawowych pojęć

Pojęcia syntaktyczne:

- wnioskowanie, przesłanka, wniosek;
- aksjomat, dowód, teza;
- operacja konsekwencji, teoria.

Pojęcia semantyczne:

- wynikanie logiczne,
- prawo logiki (tautologia).

Pojęcia metalogiczne:

- system logiczny;
- niesprzeczność, pełność, zupełność, itd.

System logiczny

Logiką (**systemem logicznym**) nazywamy trójkę uporządkowaną (L, C, S), gdzie:

- L jest **językiem** systemu;
- C jest **operatorem konsekwencji**;
- S jest **semantyką** systemu.

L jest (precyzyjnie określonym) językiem formalnym. C jest funkcją przyporządkowującą każdemu zbiorowi X formuł z L zbiór $C(X)$ wszystkich logicznych konsekwencji X. S jest pewną klasą systemów relacyjnych (układów złożonych ze zbioru obiektów oraz wiążących je relacji).

Języki formalne

Określenie języka systemu logicznego wymaga podania:

- alfabetu języka;
- reguł formowania wyrażeń złożonych (ustalonych kategorii składniowych).

Komponentem składniowym systemu logicznego (L, C, S) jest też operacja konsekwencji C rozważana w tym systemie. Może ona być opisana na różne sposoby, np.:

- poprzez wybranie pewnych aksjomatów oraz reguł inferencji (metoda aksjomatyczna);
- poprzez wybranie stosownych reguł wnioskowania (metoda założeniowa).

Naczelną zasadą metodologiczną jest przy tym zgodność składni z semantyką.

Systemy logiczne: składnia

Rozważmy prosty przykład języka formalnego $L_\heartsuit$.

Alfabet języka $L_\heartsuit$ zawiera wyłącznie:

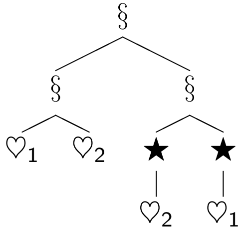
- wszystkie elementy nieskończonego zbioru $A_\heartsuit = \{\heartsuit_1, \heartsuit_2, \heartsuit_3, \ldots\}$
- dwa symbole: $\S$ oraz $\bigstar$.

Zbiór $F_\heartsuit$ wszystkich **wyrażeń** języka $L_\heartsuit$ definiujemy przez indukcję:

- (1) $A_\heartsuit \subseteq F_\heartsuit$
- (2) Jeśli $\alpha, \beta \in F_\heartsuit$, to $\S\alpha\beta \in F_\heartsuit$
- (3) Jeśli $\alpha \in F_\heartsuit$, to $\bigstar\alpha \in F_\heartsuit$
- (4) Każde wyrażenie w $F_\heartsuit$ jest bądź elementem $A_\heartsuit$, bądź powstaje z elementów $F_\heartsuit$ przez zastosowanie reguły (2) lub reguły (3).

Przykład reprezentacji składniowej

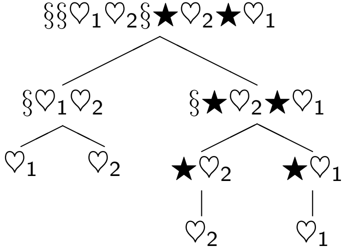
Wyrażeniem języka $L_\heartsuit$ jest np. ciąg: $\S\S\heartsuit_1\heartsuit_2\S\bigstar\heartsuit_2\bigstar\heartsuit_1$. Jego budowę składniową można reprezentować poprzez drzewa składniowe, np. tak:



Na liściach tego drzewa umieszczono elementy zbioru $A_\heartsuit$, w jego węzłach symbole § lub $\bigstar$, w korzeniu funktor główny rozważanego wyrażenia.

Przykład reprezentacji składniowej

Inny sposób drzewowej reprezentacji struktury składniowej wyrażenia $\S\S\heartsuit_1\heartsuit_2\S\bigstar\heartsuit_2\bigstar\heartsuit_1$:



Węzły tego drzewa oznakowano wszystkimi podwyrażeniami rozważanego wyrażenia.

Aksjomatami systemu $(L_\heartsuit, C_\heartsuit)$ są wszystkie wyrażenia postaci:

- $\S\S\alpha\beta\S\S\beta\gamma\S\alpha\gamma$
- $\S\S\bigstar\alpha\alpha\alpha$
- $\S\alpha\S\bigstar\alpha\beta$.

Reguła odcinania ogona to zbiór wszystkich par postaci $(\{\S\alpha\beta, \alpha\}, \beta)$, gdzie $\alpha, \beta \in F_\heartsuit$. **Dowodem** wyrażenia α ze zbioru wyrażeń X nazywamy każdy skończony ciąg $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ taki, że α jest identyczne z α_n, a każdy element α_k tego ciągu jest bądź aksjomatem $L_\heartsuit$, bądź elementem X, bądź drugim elementem pary w regule odcinania ogona, gdzie pierwszy element tej pary składa się z wyrażeń występujących w tym ciągu wcześniej niż α_k. Dla dowolnego $X \subseteq F_\heartsuit$ niech:
$C_\heartsuit(X) = \{\alpha \in F_\heartsuit\colon \text{ istnieje dowód } \alpha \text{ z } X\}$.

Tezą systemu $(L_\heartsuit, C_\heartsuit)$ jest każde wyrażenie α takie, że istnieje dowód α z aksjomatów $(L_\heartsuit, C_\heartsuit)$.

Notacja infiksowa

Wyrażenia języka $L_\heartsuit$ zapisywane były w notacji polskiej (prefiksowej): symbol funktora przed symbolami jego argumentów.
W dalszych wykładach używać będziemy notacji infiksowej: symbol funktora dwuargumentowego będzie występował między symbolami swoich argumentów (podobnie jak czynimy to np. w zapisach arytmetycznych).
Notacja infiksowa wymaga dodania do alfabetu symboli pomocniczych: nawiasu lewego (oraz nawiasu prawego).

W notacji infiksowej formuła $\S\S\heartsuit_1\heartsuit_2\S\bigstar\heartsuit_2\bigstar\heartsuit_1$ przyjmuje postać: $((\heartsuit_1)\S(\heartsuit_2))\S((\bigstar(\heartsuit_2))\S(\bigstar(\heartsuit_1)))$, a aksjomaty $L_\heartsuit$ mają postać:

- $((\alpha)\S(\beta))\S(((\beta)\S(\gamma))\S((\alpha)\S(\gamma)))$
- $((\bigstar(\alpha))\S(\alpha))\S(\alpha)$
- $(\alpha)\S((\bigstar(\alpha))\S(\beta))$.

(Później przyjmiemy konwencję redukowania liczby nawiasów.)

Struktury relacyjne

Komponent semantyczny systemu logicznego (L, C, S) to odniesienie przedmiotowe języka L.

Struktura relacyjna to układ postaci:

$\mathfrak{A} = \langle U, \{R_i\}_{i \in I}, \{f_j\}_{j \in J}, \{a_k\}_{k \in K} \rangle$

- U jest zbiorem, zwanym **uniwersum** struktury $\mathfrak{A}$
- $\{R_i\}_{i \in I}$ jest rodziną **relacji** na zbiorze U
- $\{f_j\}_{j \in J}$ jest rodziną **funkcji** określonych na zbiorze U i o wartościach w tym zbiorze
- $\{a_k\}_{k \in K}$ jest rodziną **elementów wyróżnionych** zbioru U.

Struktury relacyjne

Kilka uwag (terminologicznych):

- Gdy $J = K = \emptyset$, to mówimy o strukturach relacyjnych **czystych**.
- Gdy $I = K = \emptyset$, to mówimy o **algebrach**.
- Często rozważamy struktury **wielosortowe**: zamiast zbioru U mamy wtedy rodzinę zbiorów $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$; wtedy odpowiednio określone są relacje oraz funkcje takiej wielosortowej struktury.
- Struktury relacyjne są interpretacjami języka Klasycznego Rachunku Predykatów (z identycznością).

Matryce logiczne

Matryce logiczne to algebry, w których uniwersum pewne elementy są wyróżnione. **Matrycą logiczną** nazywamy więc układ postaci:

$\mathfrak{M} = \langle U, \{f_j\}_{j \in J}, D \rangle$,

gdzie $\{f_j\}_{j \in J}$ jest rodziną funkcji na U, a D jest pewnym podzbiorem U.

W Klasycznym Rachunku Zdań posługiwać się będziemy matrycą dwuelementową, z jednym elementem wyróżnionym. Funkcje z tej matrycy będą semantycznymi odpowiednikami spójników prawdziwościowych (znanych wszystkim ze szkoły).

Pojęcie izomorfizmu

Pojęcie **izomorfizmu** struktur relacyjnych omówimy w grubym uproszczeniu, dla struktur z jedną relacją dwuargumentową oraz jedną funkcją jednoargumentową (ogólniej o tym: na Wstępie do Matematyki).

Powiemy, że struktury:

$\mathfrak{A}_1 = \langle U_1, R_1, f_1 \rangle$ i $\mathfrak{A}_2 = \langle U_2, R_2, f_2 \rangle$

są **izomorficzne**, gdy istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja f z U_1 na U_2 taka, że dla dowolnych $x, y \in U_1$:

- $xR_1y \equiv f(x)R_2f(y)$
- $f(f_1(x)) = f_2(f(x))$.

Funkcja $f : U_1 \to U_2$ jest **homomorfizmem** $\mathfrak{A}_1$ w $\mathfrak{A}_2$, gdy dla dowolnych $x, y \in U_1$:

- jeśli xR_1y, to $f(x)R_2f(y)$
- $f(f_1(x)) = f_2(f(x))$.

Elementarz Logiczny

System $(L_\heartsuit, C_\heartsuit)$ to (składniowo-inferencyjna) część Elementarza Logicznego — jak później zobaczymy, może on być utożsamiany z (implikacyjno-negacyjnym) Klasycznym Rachunkiem Zdań.

Trzeba jeszcze określić komponent semantyczny $S_\heartsuit$, tj. określić takie matryce logiczne $\mathfrak{M} = \langle U, \{f_j\}_{j \in J}, D \rangle$, że przy każdym homomorfizmie $L_\heartsuit$ w $\mathfrak{M}$ tezy systemu $(L_\heartsuit, C_\heartsuit)$ (i tylko one) będą miały wartości wyłącznie w zbiorze D.

Tym właśnie zajmiemy się na dalszych zajęciach.

Przestrogi

Będziemy uczyć się jedynie Elementarza Logicznego. Pominięte zostaną aspekty pragmatyczne (o tym — na roku IV).

Akceptujemy klasyczną definicję prawdy.

Nie traktujemy Logiki Matematycznej jako dyscypliny normatywnej.

W zastosowaniach (znajdowanie „przekładów" z języka naturalnego na języki systemów logicznych) ograniczamy się do wybranych fragmentów języków etnicznych.

Motto

Naszym mottem w tym roku będzie hasło jednego z Bohaterów I Wojny Światowej:

Do zobaczenia na dalszych wykładach. jp