Logika Matematyczna I JiNoI 7 stycznia 2015

Imię i nazwisko: .... SKRZATY LUBIĄ KWADRATY

1. Zbadaj, czy następujące wnioskowanie przebiega wedle reguły niezawodnej: *Premiera wskazuje Prezydent lub Prezes. Jeśli Premiera wskazuje Prezydent, to nie robi tego Prezes. Stąd wniosek, że Prezes nie ma nic wspólnego z Prezydentem.*

Rozwiązanie. Znajdujemy zdania proste i budujemy schemat tego wnioskowania:

p — Premiera wskazuje Prezydent.

q — Premiera wskazuje Prezes.

r — Prezes nie ma nic wspólnego z Prezydentem.

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \to \neg q \\ \hline r \end{array}$$

Czy istnieje co najmniej jedno wartościowanie zmiennych zdaniowych przy którym obie przesłanki tej reguły są prawdziwe, a wniosek fałszywy? Wystarczy sprawdzić, czy formuły $p \vee q$ oraz $p \to \neg q$ mogą być prawdziwe przy jakimkolwiek wartościowaniu, przy którym r jest fałszywa:

p	q	$\neg q$	$p \vee q$	$p \to \neg q$
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

Widać więc, że przy wartościowaniach w_1 oraz w_2 takich, że:

$Val(p, w_1) = 0, Val(q, w_1) = 1, Val(r, w_1) = 0$

$Val(p, w_2) = 1, Val(q, w_2) = 0, Val(r, w_2) = 0$

przesłanki reguły są obie prawdziwe, a jej wniosek fałszywy. Reguła jest zawodna, jej wniosek ***nie*** wynika logicznie z przesłanek. Są też inne, śmiesznie krótkie rozwiązania tego zadania. Widzisz je?

2. Zbadaj, czy następujący zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny: $\{\ p \to q,\ r \to s,\ \neg q \vee r,\ p \wedge \neg s\ \}$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że istnieje wzz w takie, że wszystkie te formuły mają przy nim wartość 1. Wtedy:

1. Skoro $Val(p \wedge \neg s, w) = 1$, to $Val(p, w) = 1$ oraz $Val(\neg s, w) = 1$, czyli $Val(s, w) = 0$.
2. Skoro $Val(p \to q, w) = 1$ oraz $Val(p, w) = 1$, to $Val(q, w) = 1$.
3. Skoro $Val(\neg q \vee r, w) = 1$ oraz $Val(\neg q, w) = 0$ (bo $Val(q, w) = 1$), to $Val(r, w) = 1$.
4. Skoro $Val(r \to s, w) = 1$ oraz $Val(r, w) = 1$, to $Val(s, w) = 0$.
5. Przypuszczenie, że istnieje wzz w takie, że wszystkie podane formuły mają przy nim wartość 1 doprowadziło zatem do konieczności uznania, że: $Val(s, w) = 1$ oraz $Val(s, w) = 0$. To jest niemożliwe, a więc nie istnieje wzz w takie, że wszystkie podane formuły mają przy nim wartość 1.
6. Rozważany zbiór formuł jest więc semantycznie sprzeczny.

3. Zbadaj czy z przesłanki: *Drink jest wstrząśnięty, ale nie jest zmieszany* wynika logicznie wniosek: *Jeśli drink nie jest wstrząśnięty, to jest zmieszany*.

Rozwiązanie. Niech zdaniom prostym odpowiadają zmienne zdaniowe:

- *Drink jest wstrząśnięty* — p
- *Drink jest zmieszany* — q.

Wtedy przesłanka ma strukturę: $p \wedge \neg q$, natomiast wniosek ma strukturę: $\neg p \rightarrow q$.

Zauważmy, że $Val(p \wedge \neg q, w) = 1$ tylko dla takiego wzz w, dla którego $Val(p) = 1$ oraz $Val(\neg q) = 1$, czyli $Val(q, w) = 0$. Jednak dla takiego wartościowania w mamy: $Val(\neg p \rightarrow q, w) = 1$, bo skoro $Val(p, w) = 1$, to $Val(\neg p, w) = 0$, a implikacja, której poprzednik ma wartość 0, a następnik ma wartość 1 przy jakimś wartościowaniu, sama ma wartość 1 przy tymże wartościowaniu. Pokazaliśmy tym samym, że wniosek ma wartość 1 przy każdym wartościowaniu, przy którym przesłanka ma wartość 1. A zatem wniosek wynika logicznie z przesłanki.

Można też oczywiście było cierpliwie wypisać wszystkie cztery wzz i badać wartości przesłanki oraz wniosku przy każdym z nich.

Można też było badać (skróconą metodą $0 - 1$) czy formuła $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ jest prawem KRZ.

Logika Matematyczna I JiNoI 7 stycznia 2015

Imię i nazwisko:.. KRASNALE LUBIĄ OWALE

1. Zbadaj, czy następujące wnioskowanie przebiega wedle reguły niezawodnej: *Premiera wskazuje Prezydent lub Prezes. Jeśli Premiera nie wskazuje Prezydent, to robi to Prezes. Stąd wniosek, że Prezes nie ma nic wspólnego z Prezydentem.*

Rozwiązanie. Znajdujemy zdania proste i budujemy schemat tego wnioskowania:

p — Premiera wskazuje Prezydent.

q — Premiera wskazuje Prezes.

r — Prezes nie ma nic wspólnego z Prezydentem.

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \to q \end{array}}{r}$$

Czy istnieje co najmniej jedno wartościowanie zmiennych zdaniowych przy którym obie przesłanki tej reguły są prawdziwe, a wniosek fałszywy? Wystarczy sprawdzić, czy formuły $p \vee q$ oraz $\neg p \to q$ mogą być prawdziwe przy jakimkolwiek wartościowaniu, przy którym r jest fałszywa:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \to q$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Widać więc, że przy wartościowaniach w_1, w_2 oraz w_3 takich, że:

$Val(p, w_1) = 0, Val(q, w_1) = 1, Val(r, w_1) = 0$

$Val(p, w_2) = 1, Val(q, w_2) = 0, Val(r, w_2) = 0$

$Val(p, w_3) = 1, Val(q, w_3) = 1, Val(r, w_3) = 0$

przesłanki reguły są obie prawdziwe, a jej wniosek fałszywy. Reguła jest zawodna, jej wniosek ***nie*** wynika logicznie z przesłanek. Są też inne, śmiesznie krótkie rozwiązania tego zadania. Widzisz je?

2. Zbadaj, czy następujący zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny: $\{\ \neg p \vee q,\ r \to s,\ p \wedge \neg s,\ q \to r\ \}$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że istnieje wzz w takie, że wszystkie te formuły mają przy nim wartość 1. Wtedy:

1. Skoro $Val(p \wedge \neg s, w) = 1$, to $Val(p, w) = 1$ oraz $Val(\neg s, w) = 1$, czyli $Val(s, w) = 0$.
2. Skoro $Val(r \to s, w) = 1$ oraz $Val(s, w) = 0$, to $Val(r, w) = 0$.
3. Skoro $Val(p \vee r, w) = 1$ oraz $Val(r, w) = 0$, to $Val(p, w) = 1$.
4. Skoro $Val(\neg p \vee q, w) = 1$ oraz $Val(q, w) = 0$, to $Val(\neg p, w) = 1$, czyli $Val(p, w) = 0$.
5. Przypuszczenie, że istnieje wzz w takie, że wszystkie podane formuły mają przy nim wartość 1 doprowadziło zatem do konieczności uznania, że: $Val(p, w) = 1$ oraz $Val(p, w) = 0$. To jest niemożliwe, a więc nie istnieje wzz w takie, że wszystkie podane formuły mają przy nim wartość 1.
6. Rozważany zbiór formuł jest więc semantycznie sprzeczny.

3. Zbadaj czy z przesłanki: *Drink jest wstrząśnięty, ale nie jest zmieszany* wynika logicznie wniosek: *Jeśli drink jest wstrząśnięty, to nie jest zmieszany*.

Rozwiązanie. Niech zdaniom prostym odpowiadają zmienne zdaniowe:

- *Drink jest wstrząśnięty* — p
- *Drink jest zmieszany* — q.

Wtedy przesłanka ma strukturę: $p \wedge \neg q$, natomiast wniosek ma strukturę: $p \rightarrow \neg q$.

Zauważmy, że $Val(p \wedge \neg q, w) = 1$ tylko dla takiego wzz w, dla którego $Val(p) = 1$ i $Val(\neg q) = 1$. Jednak dla takiego wartościowania w mamy: $Val(p \rightarrow \neg q, w) = 1$, bo implikacja, której poprzednik oraz następnik mają wartość 1 przy jakimś wartościowaniu, sama ma wartość 1 przy tymże wartościowaniu. Pokazaliśmy tym samym, że wniosek ma wartość 1 przy każdym wartościowaniu, przy którym przesłanka ma wartość 1. A zatem wniosek wynika logicznie z przesłanki.

Można też oczywiście było cierpliwie wypisać wszystkie cztery wzz i badać wartości przesłanki oraz wniosku przy każdym z nich.

Można też było badać (skróconą metodą $0-1$) czy formuła $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ jest prawem KRZ.