Funkcje rekurencyjne (1) (JiNoI III)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

14 lutego 2007

Konwersatorium jest poświęcone omówieniu matematycznych reprezentacji pojęcia obliczalności.

Nie trzeba chyba przekonywać nikogo, kto (jak właśnie Państwo Studenci i Studentki *Językoznawstwa i Nauk o Informacji*) aspiruje do przynależności do Elity Intelektualnej Rzeczpospolitej Polskiej, Unii Europejskiej, itd., że jest to problematyka należąca do rudymentów wykształcenia w społeczeństwie informatycznym.

Ze względu na to, iż Wasze studia określane są jako Humanistyczne, prezentacji materiału stawiane są określone wymogi, inne niż np. w przypadku audytorium matematycznego lub informatycznego.

Będziemy więc starali się połączyć niezbędną ścisłość wykładu z jego przystępnością — ma to być Wykład Humanistycznie Obliczalny.

Program konwersatorium:

- Intuicje dotyczące obliczania oraz algorytmów.
- Pojęcie nieskończoności — charakterystyki numeryczne.
- Nieskończona złożoność strukturalna — fraktale.
- Pojęcie efektywności w matematyce.
- Maszyny Turinga. Algorytmy Markowa.
- Rachunek lambda. Numeracje Kleene'go i Posta.
- Funkcje rekurencyjne — podstawowe własności. Teza Churcha.
- Arytmetyka Peana.
- Reprezentowalność funkcji i relacji rekurencyjnych w arytmetyce Peana.
- Zbiory rekurencyjnie przeliczalne. Hierarchia arytmetyczna.
- Arytmetyzacja składni.
- Twierdzenia Gödla.
- Twierdzenie Tarskiego i twierdzenie Löba.
- O teoriach rozstrzygalnych i nierozstrzygalnych.

Zalecana literatura (w języku polskim):

- Grzegorczyk, A. 1973. *Zarys logiki matematycznej.* PWN, Warszawa.
- Krajewski, S. 2003. *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu.* Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa.
- Ławrow, I.A., Maksimowa, L.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Moczurad, M. 2002. *Wybrane zagadnienia z teorii rekursji.* Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
- Murawski, R. 2000^3. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Wykładowca będzie korzystał także z pozycji obcojęzycznych

Plan na dziś:

- Intuicje dotyczące obliczania.
- Przypomnienie: pojęcie algorytmu.
- Przypomnienie: sposoby definiowania funkcji.
- Przypomnienie: grafy, drzewa.
- Przypomnienie: gramatyki i automaty.

Uwaga: uczestnicy tego konwersatorium wysłuchali wcześniej wykładów z:

- *Logiki matematycznej*;
- *Wstępu do matematyki*;
- *Lingwistyki matematycznej*;
- *Wstępu do informatyki*;
- *Współczesnych problemów informatyki*.

Zakłada się, że słuchali tego ze zrozumieniem.

Czym jest obliczanie?

Liczyć każdy umie. Czy zastanawiałaś się jednak kiedykolwiek, ***co*** właściwie robisz, kiedy liczysz?
Na czym polega obliczanie?

Liczą nie tylko ludzie, ale także inne Zwierzęta.
Liczą również maszyny liczące.

W obliczaniu mamy jakieś dane wejściowe.
Coś (a mianowicie obliczanie) się z tymi danymi robi.
W wyniku otrzymuje się znowu jakieś dane (wyjściowe).

Co wyniosłaś ze szkoły?

Mutacja szkolnej matematyki

W POLSCE wciąż trwa dyskusja nad nauczaniem „matematyki nowoczesnej". Jako głos w dyskusji pozwolę sobie przytoczyć tekst rozpowszechniany przez prasę w Belgii — czyli w kraju o wiele bardziej od nas zaawansowanym w rozwoju.

Szkoła ogólnokształcąca 1950

Chłop sprzedaje worek ziemniaków za 100 franków. Jego koszty produkcji wynoszą 4/5 ceny sprzedaży. Jaki jest jego zysk?

Szkoła o specjalizacji humanistycznej 1960

Chłop sprzedaje worek ziemniaków za 100 franków. Jego koszty produkcji wynoszą 80 franków. Oblicz jego zysk.

Nauczanie nowoczesne w latach 70

Chłop sprzedaje pewną ilość ziemniaków (Q) za sumę pieniędzy (S). S wynosi 100. Każdy element „S" ze zbioru S ma wartość jednego franka. Narysuj sto kreseczek przedstawiających zbiór S, każda z nich będzie oznaczała jego element s. Zbiór kosztów produkcji (P) liczy o 20 kreseczek mniej niż zbiór S. Przedstaw zbiór P jako podzbiór zbioru S. Pojawi się w ten sposób podzbiór (R) przedstawiający odpowiedź na następujące pytanie: Jaki jest otrzymany zysk?

Odnowa 1982

Rolnik sprzedaje worek ziemniaków za 100 franków. Koszty produkcji wynoszą 80 fr., a zysk 20 fr.
Zadanie:
Podkreśl grupę słów „worek ziemniaków" i przedyskutuj je z twym sąsiadem.

Nauczanie zreformowane 1990

Rolnik kapitalista niesprawiedliwie się wzbogaca o 20 franków na worku ziemnioków. Pszestudjój tyn tykst i poszukoj błyndy jego zawartości, gramatyki, ortographi i punktuacyji. Nastympnie powidz co myślesz o tyj metodzie robienia pinjendzy.

Tłumaczył
MAREK GŁOGOCZOWSKI

Liczebniki indoeuropejskie

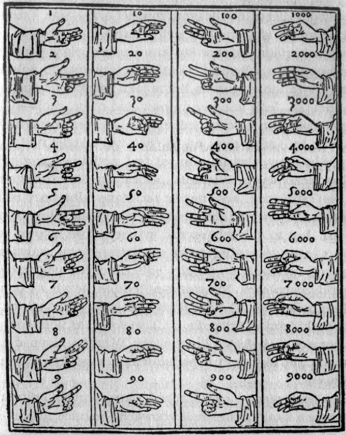
	greka	łacina	j. niemiecki	j. angielski	j. francuski	j. rosyjski	j. polski
1	hen	unus	eins	one	un	один	jeden
2	duo	duo	zwei	two	deux	два	dwa
3	treis	tres	drei	three	trois	три	trzy
4	tettares	quattuor	vier	four	quatre	четыре	cztery
5	pente	quinque	fünf	five	cinq	пять	pięć
6	hex	sex	sechs	six	six	шесть	sześć
7	hepta	septem	sieben	seven	sept	семь	siedem
8	okto	octo	acht	eight	huit	восемь	osiem
9	ennea	novem	neun	nine	neuf	девять	dziewięć
10	deka	decem	zehn	ten	dix	десять	dziesięć

Liczenie w języku z klasyfikatorami

	liczenie ustne	przedmioty płaskie	przedmioty okrągłe	ludzie	przedmioty wydłużone	łodzie	miary
1	gyak	gak	g'erel	k'al	k'awutskan	k'amaet	k'al
2	t'epqat	t'epqat	goupel	t'epqadal	gaopskan	g'alpeeltk	gulbel
3	guant	guant	gutle	gulal	galtskan	galtskantk	guleont
4	tqalpq	tqalpq	tqalpq	tqalpqdal	tqaapskan	tqalpqsk	tqalpqalont
5	ketone	ketone	ketone	keenecal	k'etoentskan	tetoonsk	ketonsilont
6	k'alt	k'alt	k'alt	k'aldal	k'aoltskan	k'altk	k'aldelont
7	t'epqalt	t'epqalt	t'epqalt	t'epqaldal	t'epqaltskan	t'epqaltk	t'epqaldelont
8	guandalt	yuktalt	yuktalt	yuktleadal	ek'tlaedskan	yuktalkt	yuktaldelont
9	ketemac	ketemac	ketemac	ketemacal	ketemaetskan	ketemack	ketemasilont
10	gy'ap	gy'ap	kpeel	kpal	kpeetskan	gy'apsk	kpeont

Rys. 2.5. Tabela przedstawia liczebniki w języku tsimszian, który używany jest przez Indian w Kolumbii Brytyjskiej (Kanada). Dane te zostały zebrane przez amerykańskiego antropologa Franza Boasa; po raz pierwszy opublikowano je w 1881 roku.

Liczenie na paluszkach

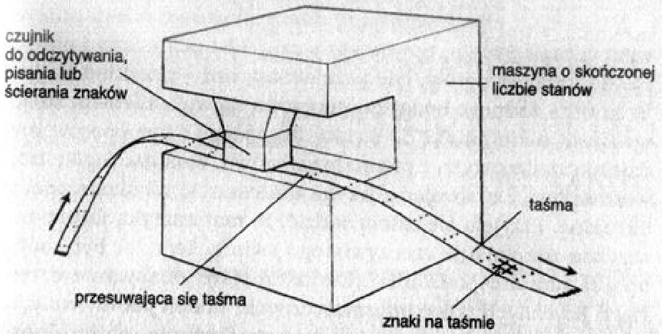


Rys. 2.8. Ilustracja „sztuki rachowania na palcach": system liczenia na palcach Bedy Czcigodnego, odtworzony tysiąc lat później przez Jacoba Leupolda i opublikowany w Niemczech w 1727 roku. Zwróćmy uwagę, że liczenie polega tu na zginaniu palców lewej dłoni, a nie, jak u nas jest w zwyczaju, rozprostowywaniu palców zaciśniętej dłoni.

Perła Filozoficzna

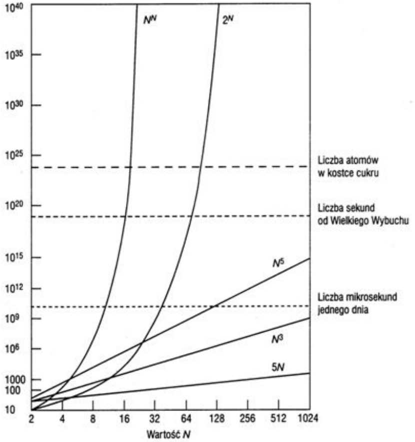
Rys. 2.28. Drzeworyt Gregora Reischa z początku XVI wieku zatytułowany *Margarita philosophica*, co oznacza „Perła filozofii". Ukazuje on kiepsko wyglądającego Pitagorasa, który liczy na abakusie, przyrządzie będącym, jak głosi tradycja, wynalazkiem tego uczonego. Z lewej strony Pitagoras ustawił sobie liczbę 1241: widzimy jeden żeton w górnym rzędzie tysięcy, dwa żetony w rzędzie setek, cztery w rzędzie dziesiątek oraz jeden na samym dole. Z prawej zaś starożytny matematyk ustawił właśnie liczbę 82: jeden żeton jest w połowie odległości między rzędem dziesiątek a rzędem setek, co oznacza liczbę pięćdziesiąt, trzy żetony są w rzędzie dziesiątek, a jeden w rzędzie jedności. Przeciwnikiem Pitagorasa jest siedzący z lewej, zadowolony z siebie Boecjusz, który pracuje nad algorytmicznym obliczeniem, używając cyfr indoarabskich, które dodaje rzędami. Widzimy, że posługuje się symbolem zera i radzi sobie z ułamkami. Jak się domyślamy, obaj uczeni chcą dowieść wyższości swojej metody, a stojąca nad nimi postać to, jak głosi łaciński napis, Dame Arithmetica, która ma rozstrzygnąć, kto zwyciężył. Gdybym to ja był Pitagorasem, czułbym się nieco zaniepokojony faktem, że bezstronna rzekomo sędzina ma wyhaftowane na sukni indoarabskie cyfry.

Metafora Turingowska



Rys. 5.12. Uniwersalna maszyna Alana Turinga, wymyślona przez niego w latach trzydziestych XX wieku. Składa się ona ze: skończonego zbioru znaków; skończonego zbioru stanów, w których może się znajdować; nieskończonej taśmy podzielonej na kratki, z których każda zawiera pojedynczy znak; czujnika, który analizuje taśmę kratka po kratce, odczytuje ją i ewentualnie pisze na niej; listy instrukcji podających reguły, które mówią, jaka zmiana (i czy w ogóle) ma nastąpić na taśmie, kiedy dany kwadracik został odczytany.

Niektóre „szybko rosnące” funkcje



ys. 4.8 Tempo wzrostu wartości $5N$, N^3, N^5, 2^N i N^N, wraz ze wzrostem N, w porównaniu z innymi wielkir
iczbami.

Przykład: wzrost wartości funkcji

Notacja Mosera-Steinhausa używana jest do zapisu pewnych wielkich liczb:

- n w trójkącie oznacza n^n;
- n w kwadracie oznacza n w n trójkątach;
- n w pięciokącie foremnym oznacza n w n kwadratach;
- n w k-kącie foremnym oznacza n w n $(k-1)$-kątach foremnych.

Np. 2 w kwadracie to 2 w dwóch trójkątach, czyli $4^4 = 256$. Do często wymienianych liczb zapisywanych w tej notacji należą: mega, czyli 2 w pięciokącie oraz moser, czyli 2 w mega-kącie.
Inne, często wymieniane (dla oszołomienia publiczności) wielkie liczby to m.in. liczba Grahama oraz liczba Skewesa.

Przykład: wzrost wartości funkcji

Funkcja Ackermanna:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{gdy } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{gdy } n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{w innych przypadkach} \end{cases}$$

Jest to funkcja rekurencyjna (ale nie jest pierwotnie rekurencyjna!). Jej wartości rosną dość szybko, np. $A(4,2) = 2^{65536} - 3$.

Innego interesującego przykładu (początkowo!) bardzo szybko rosnącej zależności funkcyjnej dostarczają ciągi Goodsteina, których wartości jednak dla odpowiednio dużego argumentu stają się równe zeru. Ciągi te były wykorzystane w podaniu przykładu zdania nierozstrzygalnego w arytmetyce Peana, posiadającego **konkretną** treść matematyczną.

Intuicje dotyczące obliczania.

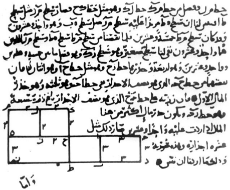
Na jednym z następnych wykładów pokażemy przykłady kilku „dziwnych" funkcji, tj. takich, o których zapewne nie mówiono ci w szkole: np. ciągłych w ***każdym*** punkcie, ale ***nieróżniczkowalnych*** w żadnym punkcie. Nie znaczy to, że takie „dziwactwa" nie są dobrze określonymi tworami matematycznymi.

Oznacza natomiast, że nasze „intuicje dnia powszedniego" niekoniecznie są dobrym przewodnikiem w krainie obiektów matematycznych. Potrzeba tam o wiele większej subtelności (nawet większej, niż dostarcza jej wyobraźnia poetów).

Nadto, jak dowiemy się później, ***większość*** funkcji (ze zbioru liczb naturalnych w tenże zbiór) jest nieobliczalna. Wszystkich funkcji obliczalnych jest tylko nieskończenie (przeliczalnie) wiele, natomiast wszystkich funkcji (ze zbioru liczb naturalnych w tenże zbiór) jest więcej. Dowiemy się też, cóż znaczy owo „więcej".

Przypomnienie: pojęcie algorytmu

Słowo algorytm pochodzi od nazwiska arabskiego matematyka Al Chwarizmiego.



Metoda obliczalna (efektywna): w skończonej liczbie prostych, mechanicznych kroków daje odpowiedź dla dowolnych danych ustalonej postaci.

Definicja algorytmu. Obliczenie za pomocą metody efektywnej nazywa się **algorytmem**.

Podane wyżej pojęcie obliczalności ma charakter **intuicyjny**. Możliwe są jego różne matematyczne precyzacje. I o tym właśnie będziemy gwarzyć w tym semestrze.

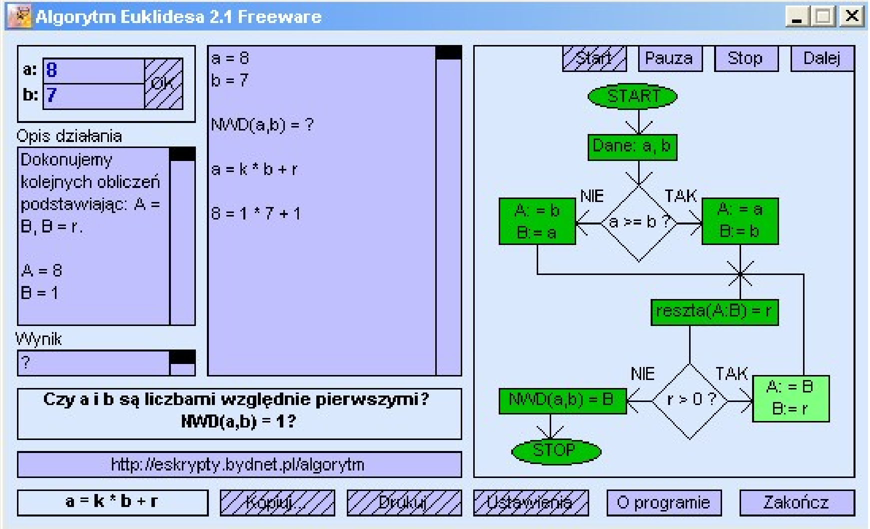
Przykłady algorytmów (tu oglądamy inne pliki, wyłowione *ad hoc* z sieci):

- algorytm Wędkowanie ... jak najbardziej serio [Mariola Stróżyk] algorytm_naryby.ppt
- Czego informatyka potrzebuje od językoznawstwa [Wiesław Lubaszewski] kom_pan.pdf
- algorytm Wyznaczania liczb Fibonacciego fibonacci2.pdf
- algorytm Pseudokolorowania obrazów medycznych [Marcin Ciecholewski] elektro01.pdf
- algorytm Ustalania wysokości stypendium szkolnego algorytm_projekt.pdf
- algorytm Postępowania z osobami kierującymi pojazdami mechanicznymi podejrzanymi o użycie środków działających podobnie do alkoholu algorytm-narkotyki.pdf
- Kwantowy algorytm Shora [Wiesław Płaczek] Shor.pdf
- algorytm Określania nazw grup studenckich algrupstud.pdf

- algorytm Określania symetrii cząsteczek [Witold Piskorz] algorytm_symetrii.pdf
- algorytm Football Teams Tactics football_team_stactics.pps
- algorytm Uruchomienia oscyloskopu Oscyloskop_ABC.pdf
- algorytm Wstępnej oceny skuteczności ruchów w grze w szachy [Cezary Dendek] 01-12-04.ppt
- algorytm Wyznaczanie powierzchni widocznych [Politechnika Gdańska] wyklad6-p3.pdf
- Algorytm Poszukiwania Niespokrewnionego Dawcy Komórek Hematopoetycznych Układu Krwiotwórczego Do Transplantacji algorytmpostepowania.pdf
- Samostabilizujący się algorytm kolorowania grafów dwudzielnych oraz kaktusów [Adrian Kosowski, Łukasz Kuszner] zkpn06.pdf

Pytanie metafizyczne: czy wiedza racjonalna tożsama jest z wiedzą osiąganą algorytmicznie?

Algorytm Euklidesa



Przykład metody efektywnej: algorytm ustalania, czy dana formuła języka Klasycznego Rachunku Zdań jest prawem (tautologią) tego rachunku.

- Wejście: formuła języka KRZ (o n zmiennych zdaniowych)
- Obliczenie: znajdowanie wartości logicznej tej formuły dla każdego z 2^n podstawień wartości logicznych za zmienne
- Wyjście: odpowiedź — TAK (gdy przy każdym takim podstawieniu formuła jest prawdziwa), NIE (w przeciwnym przypadku).

Przykład problemu, dla którego **nie istnieje** metoda obliczalna: ustalanie, czy dowolna formuła języka Klasycznego Rachunku Predykatów jest prawem (tautologią) tego rachunku.

Dla ustalenia, czy **dowolna** formuła języka KRP jest tautologią KRP potrzeba sprawdzić **nieskończoną** liczbę interpretacji, a więc istnienie algorytmu jest w tym przypadku wykluczone.

Np. ta formuła nie jest tautologią KRP:

$$\forall x \exists y\, A(x, y) \rightarrow \exists y \forall x\, A(x, y)$$

Uwaga: KRP jest **półrozstrzygalny** — jeśli formuła A **jest** tautologią KRP, to można to w **skończonej** liczbie kroków sprawdzić.

Dla przykładu, formuła:

$$\exists x \forall y \, R(y,x) \rightarrow \forall y \exists x \, R(y,x)$$

jest tautologią Klasycznego Rachunku Predykatów, a więc można tego dowieść w skończonej liczbie kroków (pokazując, iż negacja tej formuły nie jest prawdziwa w żadnej interpretacji):

$$\neg(\exists x \forall y\, R(y,x) \rightarrow \forall y \exists x\, R(y,x)) \quad {}^{1.\neg\rightarrow}$$

$$(1_g)\ \ \exists x \forall y\, R(y,x) \quad {}^{2.\surd a}$$

$$(1_d)\ \ \neg\forall y \exists x\, R(y,x) \quad {}^{3.\surd b}$$

$$(2)\ \ \forall y\, R(y,a) \quad {}^{4.\star b}$$

$$(3)\ \ \neg\exists x\, R(b,x) \quad {}^{5.\star a}$$

$$(4)\ \ R(b,a)$$

$$(5)\ \ \neg R(b,a)$$

$$\times_{4,5}$$

Natomiast np. formuła:

$$\exists x\ Px \wedge \forall y \exists z\ yQz$$

nie jest tautologią Klasycznego Rachunku Predykatów, co można wykazać konstruując model dla jej zaprzeczenia (i korzystając z Twierdzenia o Pełności KRP). Formuła ta nie jest też kontrtautologią (formułą fałszywą we wszystkich interpretacjach), ale nie można tego wykazać używając półalgorytmu stosowanego w poprzednim przypadku (wymagane drzewo dowodowe jest nieskończone):

$$\exists x\, Px \wedge \forall y \exists z\, yQz \quad ^{1.\wedge}$$

$$(1_g) \quad \exists x\, Px \quad ^{2.\surd a}$$

$$(1_d) \quad \forall y \exists z\, yQz \quad ^{3.\star a\ 5.\star b\ 7.\star c}$$

$$(2) \quad Pa$$

$$(3) \quad \exists z\, aQz \quad ^{4.\surd b}$$

$$(4) \quad aQb$$

$$(5) \quad \exists z\, bQz \quad ^{6.\surd c}$$

$$(6) \quad bQc$$

$$(7) \quad \exists z\, cQz$$

$$\vdots$$

Kto się boi dowodów komputerowych?

Dowody komputerowe.
Czy stosowanie maszyn liczących w tworzeniu dowodów twierdzeń matematycznych może odmienić postać matematyki?

Od niedawna w dowodzeniu twierdzeń matematycznych wspomagamy się komputerami — przede wszystkim wtedy, gdy trzeba sprawdzić jakąś bardzo wielką liczbę przypadków. Jak wiadomo, wszystkie bogatsze systemy matematyczne są nierozstrzygalne, a więc nie są możliwe czysto mechaniczne (rekurencyjne) procedury wyliczające wszystkie twierdzenia takich systemów.

Możemy jednak spekulować o matematyce uprawianej przez sztuczne inteligencje o wystarczająco dużym stopniu złożoności.

Cytat stale aktualny

Wyobraźmy sobie, że matematyk chce sprawdzić, czy jakieś wyrażenie jest twierdzeniem badanej przez niego teorii. Dowód tego twierdzenia wymaga jednak milionów bądź miliardów operacji, tak że wykonanie ich przez człowieka jest praktycznie niemożliwe. A więc o twierdzeniu tym nie można orzec czy jest ono prawdziwe czy nie. Zastosowanie w tym przypadku maszyny pozwoli przeprowadzić dowód; powstaje jednak pytanie, czy dowód ten może być przez człowieka rozumiany? W dotychczasowym sensie — chyba nie. Jeżeli nie, to za pomocą maszyn matematycznych można dowodzić twierdzeń, których nie można zrozumieć, ewentualnie pojęcie zrozumienia wymaga innej interpretacji.

Pawlak 1965, 6

Pawlak, Z. 1965. *Automatyczne dowodzenie twierdzeń.* Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa (seria: *Biblioteczka Matematyczna*, **19**).

Tworzenie teorii przez matematyka nie sprowadza się do kolejnego wypisywania twierdzeń i ich dowodów; teorie te są budowane w celach poznawczych. A więc twierdzenia teorii muszą być zrozumiałe, muszą dać się czytać przez człowieka ze zrozumieniem. Wiadomo zaś, że zdolności recepcyjne człowieka są ograniczone. Zbyt długie ciągi symboli nie mogą być przez człowieka rozpoznawane i czytane ze zrozumieniem.

Pawlak 1965, 25

Załóżmy, że kryterium takie [*kryterium „ciekawości" twierdzenia* — JP] udało się znaleźć i że maszyna produkuje rzeczywiście ciekawe twierdzenia. Przy dzisiejszej szybkości liczenia maszyna matematyczna może w krótkim czasie wyprodukować kilkaset tysięcy twierdzeń teorii. Pojawia się więc pytanie, kto będzie mógł te twierdzenia czytać, rozumieć i wykorzystywać? Właściwie należałoby zapytać, czy w jakiejkolwiek teorii może być rzeczywiście sto tysięcy interesujących twierdzeń?

Pawlak 1965, 141

Tęsknoty za platonizmem. . .

A computing machine can solve very complex problems owing to some software and data based on strong assumptions due to the bold Platonian approach. To opt for such an approach, going very far beyond the mundane realm of first-order logic, it is a human affair and human responsibility.

Marciszewski 2002, 5

Marciszewski, W. 2002. On going beyond the first-order logic in testing the validity of its formulas. A case study. *Mathesis Universalis*, nr **11**: *On the Decidability of First Order Logic.*

Przypomnienie: sposoby definiowania funkcji

Funkcje określane mogą być na różnorakie sposoby, np.:

- wzorem
- wykresem
- układem warunków
- przez rekursję.

Na pewno kazano ci już (np. na Wstępie do informatyki) napisać jakiś program obliczający (powiedzmy) silnię, lub kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego. W tych przypadkach stosowałaś właśnie procedury rekurencyjne: obliczanie wartości funkcji dla kolejnego argumentu wykorzystywało wartości obliczone dla argumentów mniejszych. O tym będzie wiele później.

To, że funkcja określona jest jakimś wzorem, nie oznacza jeszcze, że można podać jej wykres. Pomyśl o funkcji określonej dla wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmującej wartość 0 dla liczb wymiernych, a wartość 1 dla liczb niewymiernych.

Przypomnienie: grafy, drzewa

Grafem nazywamy dowolną parę $\langle X, R \rangle$, gdzie X jest zbiorem, a R jest podzbiorem $X \times X$. Elementy zbioru X nazywamy ***wierzchołkami***, a elementy zbioru R ***krawędziami*** grafu $\langle X, R \rangle$.

Wykorzystuje się różne reprezentacje grafów:

- rysunki — wierzchołki grafu zaznacza się kropkami, a krawędzie liniami: ze strzałkami (graf zorientowany) lub bez (graf niezorientowany);
- macierze — w macierzy kwadratowej (gdzie liczba wierszy równa jest liczbie wierzchołków grafu) umieszcza się na miejscu (i, j) np. liczbę 1, gdy $(x_i, x_j) \in R$, a na pozostałych miejscach np. liczbę 0.

Drzewem (o korzeniu x_0***)*** nazwiemy każdy układ $\langle X, R, x_0\rangle$ taki, że:

- $\langle X, R\rangle$ jest grafem;
- x_0 jest elementem R-najmniejszym w X;
- R jest przechodnia w X;
- R jest asymetryczna w X;
- R każdy element zbioru $X - \{x_0\}$ ma dokładnie jeden bezpośredni R-poprzednik.

To jedna z wielu definicji drzewa, używanych w matematyce.

Niech $D = \langle X, R, x_0 \rangle$ będzie drzewem o korzeniu x_0.

Liśćmi drzewa D nazywamy wszystkie te jego wierzchołki, które nie mają R-następników.

Jeśli $(x, y) \in R$ jest krawędzią w D, to x nazywamy ***przodkiem*** y, a y nazywamy ***potomkiem*** x. Jeśli $(x, y) \in R - R^2$ jest krawędzią w D, to x nazywamy ***bezpośrednim przodkiem*** y, a y nazywamy ***bezpośrednim potomkiem*** x.

Każdy podzbiór zbioru wierzchołków drzewa D, który jest uporządkowany liniowo przez R nazywamy ***łańcuchem*** w D. Każdy łańcuch maksymalny (względem inkluzji) w D nazywamy ***gałęzią*** w D.

Pniem drzewa D nazywamy część wspólną wszystkich gałęzi D.

Rzędem wierzchołka x nazywamy moc zbioru wszystkich potomków x. ***Rzędem*** drzewa D jest kres górny rzędów wszystkich wierzchołków drzewa D.

Drzewo D jest ***skończone***, jeśli zbiór jego wierzchołków jest skończony. Drzewo D jest ***nieskończone***, jeśli zbiór jego wierzchołków jest nieskończony. Drzewo D jest ***rzędu skończonego***, jeśli jego rząd jest liczbą skończoną.

Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma najwyżej dwóch bezpośrednich potomków nazywamy ***drzewem nierozwojowym***. Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków nazywamy ***drzewem dwójkowym***.

Ważnym twierdzeniem dotyczącym drzew jest następujący:

Lemat Königa.

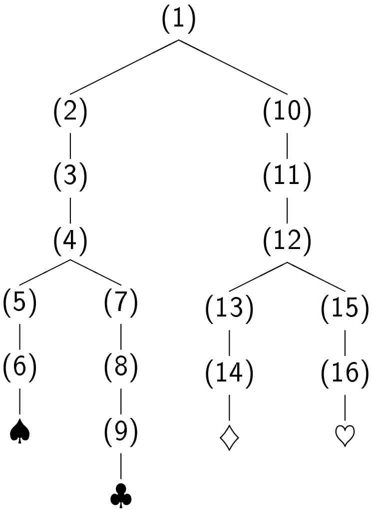
Jeśli D jest drzewem rzędu skończonego i dla każdej liczby naturalnej n w D istnieją łańcuchy o co najmniej n elementach, to D ma łańcuch nieskończony.

Mówimy, że $\langle Y, Q, y_0 \rangle$ jest ***poddrzewem*** drzewa $\langle X, R, x_0 \rangle$, gdy:

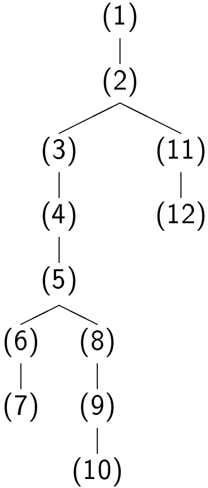
- 1) $Y \subseteq X$ oraz
- 2) $\langle Y, Q, y_0 \rangle$ jest drzewem o wierzchołku y_0.

Graficzne reprezentacje drzew są rysunkami, na których wierzchołki (jakoś znakowane — punktami, liczbami, formułami, itd.) połączone są liniami, odpowiadającymi krawędziom. Przy tym, jeśli $\langle X, R, x_0 \rangle$ jest drzewem, to na rysunku zaznaczamy tylko krawędzie należące do $R - R^2$ (przy tym, poprzedniki R umieszczane są nad następnikami).

Wspomnijmy na marginesie, że dla dowolnego drzewa można liniowo uporządkować wszystkie jego wierzchołki (odpowiednio je kodując). Dwa takie porządki są szczególnie ważne: wzdłużny i poprzeczny. Będzie o tym mowa później.



W tym drzewie są cztery gałęzie, zaczynające się w korzeniu drzewa (wierzchołek oznaczony przez (1)) i kończące się liśćmi drzewa: ♣, ♢, ♡ oraz ♠. Pień drzewa jest tu zbiorem jednoelementowym: $\{(1)\}$.



W drzewie powyższym są trzy gałęzie, zaczynające się w korzeniu drzewa (wierzchołek oznaczony przez (1)), kończące się liśćmi: (7), (10) oraz (12). Pień drzewa stanowią wierzchołki o numerach: (1) i (2).

Przypomnienie: gramatyki i automaty

Nie będziemy korzystać ze wszystkich wiadomości, które przekazano ci na zajęciach z *Lingwistyki matematycznej* (oraz, ewentualnie, *Wstępu do językoznawstwa*). Jednak warto przypomnieć sobie niektóre z nich: np. znajomość pojęcia automatu przyda się w rozważaniach dotyczących maszyn Turinga, znajomość pojęcia gramatyki formalnej będzie użyteczna przy omawianiu algorytmów Markowa, itp.

Niech zatem będzie **zadaniem domowym**: odszukanie notatek dotyczących teorii automatów oraz teorii gramatyk formalnych. Chętnie je zobaczę. Ułatwi to nam dalszą pracę.

Koniec na dziś

Inne zadania.

- Wskaż różnice między modlitwą a obliczaniem.
- Pomyśl o przykładach procedur (intuicyjnie) nieobliczalnych.
- Na następnym wykładzie będzie mowa o pojęciu nieskończoności. Spróbuj samodzielnie zdefiniować to pojęcie, w sposób czysto numeryczny, a więc nie odwołując się np. do zależności przestrzennych i czasowych, nie używając poetyckich (lub zdroworozsądkowych) metafor, itd.
- Pobaw się funkcją Ackermanna. Spróbuj uświadomić sobie, jak (w jakiej kolejności) liczymy wartości $A(m,n)$ dla $m,n \leqslant 3$.