Tablice analityczne

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

MDTiAR 10xi2015

Plan na dziś

- Notacja Smullyana dla formuł z kwantyfikatorami
- Metoda tablicowa dla KRZ
- Metoda tablicowa dla logiki pierwszego rzędu

- Przypomnienie: semantyka logiki pierwszego rzędu
- Zbiory Hintikki i Lemat Hintikki (dla logiki pierwszego rzędu)
- Własności niesprzeczności (dla logiki pierwszego rzędu)
- Twierdzenie o Istnieniu Modelu (dla logiki pierwszego rzędu)

- Twierdzenia o trafności i pełności metody tablicowej
- Przykłady dowodów tablicowych poznamy też na konwersatorium

Notacja

Notacja Smullyana dla języków pierwszego rzędu oprócz podanych wcześniej konwencji dla funktorów prawdziwościowych uwzględnia jeszcze notację dla formuł skwantyfikowanych oraz ich negacji. Rozróżnia się dwa typy: γ-*formuły*, które „działają" uniwersalnie (czyli formuły z kwantyfikatorem generalnym lub z zaprzeczeniem kwantyfikatora egzystencjalnego) oraz δ-*formuły*, które „działają" egzystencjalnie (czyli formuły z kwantyfikatorem egzystencjalnym lub z zaprzeczeniem kwantyfikatora generalnego). Dla każdego z tych typów formuł oraz dowolnego termu t określa się ich *instancje* w sposób następujący:

γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall x\varphi$	$\varphi(x/t)$	$\exists x\varphi$	$\varphi(x/t)$
$\neg\exists x\varphi$	$\neg\varphi(x/t)$	$\neg\forall x\varphi$	$\neg\varphi(x/t)$

O metodzie TA

Metoda tablic analitycznych jest metodą *nie wprost*. Aby udowodnić formułę φ budujemy *tablicę analityczną* dla formuły $\neg\varphi$. Jeśli ta tablica jest *zamknięta* (prowadzi do sprzeczności), to uznajemy, że formuła φ jest *tezą* systemu tablicowego.

W trakcie budowania tablicy analitycznej korzystamy z reguł redukcji, nazywanych *regułami rozszerzania tablic*. Pozwalają one przechodzić od formuł złożonych do ich składników (w sensie Smullyana). Wykonanie wszystkich reguł rozszerzania tablic doprowadza do uzyskania literałów.

Tablice analityczne są drzewami – można o nich myśleć jako o alternatywach pewnych koniunkcji.

Reguły

Reguły rozszerzania tablic analitycznych dla formuł bez kwantyfikatorów (dla języka KRZ) zapisanych w notacji Smullyana są następujące:

$$\frac{\neg\neg\psi}{\psi} \qquad \frac{\neg\top}{\bot} \qquad \frac{\neg\bot}{\top}$$

$$\begin{array}{c} \alpha \\ | \\ \alpha_1 \\ | \\ \alpha_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \beta \\ \diagup \quad \diagdown \\ \beta_1 \qquad \beta_2 \end{array}$$

Reguły

Stosowanie reguł redukcji należy rozumieć następująco. Jeśli T jest drzewem znakowanym formułami, to zastosowanie reguły redukcji do formuły (nie będącej literałem) w którymś z wierzchołków tego drzewa skutkuje utworzeniem nowego drzewa T^*, poprzez przedłużenie gałęzi drzewa T na której znajduje się rozważana formuła (bez rozgałęziania w przypadku $\neg\top$, $\neg\bot$, podwójnie zanegowanych formuł oraz α-formuł, natomiast z rozgałęzieniem w przypadku β-formuł).

Reguły

1. Jeśli $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ jest skończonym zbiorem formuł, to tablicą analityczną dla tego zbioru jest drzewo złożone z jednej gałęzi:

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \\ | \\ \varphi_2 \\ | \\ \vdots \\ | \\ \varphi_n \end{array}$$

2. Jeśli T jest tablicą analityczną dla $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ oraz T^* powstaje z T poprzez zastosowanie którejś reguły rozszerzania tablic analitycznych, to T^* jest tablicą analityczną dla $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$.

Dowody i tezy tablicowe

Gałąź θ tablicy analitycznej T jest *zamknięta*, jeśli zawiera ona $\perp$ lub formuły φ oraz $\neg\varphi$, dla pewnej φ. Tablica, której wszystkie gałęzie są zamknięte jest *zamknięta* (*sprzeczna*).

Dowodem tablicowym formuły φ jest zamknięta tablica analityczna dla zbioru $\{\neg\varphi\}$. Formuła φ jest *tezą* systemu tablic analitycznych, gdy ma dowód tablicowy.

Gałąź θ tablicy analitycznej T jest *spełnialna*, gdy zbiór formuł tej gałęzi jest spełnialny. Tablica analityczna T jest *spełnialna* (*otwarta*), gdy co najmniej jedna jej gałąź jest spełnialna.

Skończony zbiór formuł S jest *tablicowo niesprzeczny*, jeśli nie istnieje zamknięta tablica analityczna dla S.

Reguły

W przypadku języków pierwszego rzędu, dodajemy następujące reguły rozszerzania tablic analitycznych (w notacji Smullyana):

$$\begin{array}{c} \gamma \\ | \\ \gamma(t) \end{array} \qquad \text{(dla dowolnego termu domkniętego języka } L^{\mathbf{par}}\text{)}$$

$$\begin{array}{c} \delta \\ | \\ \delta(a) \end{array} \qquad \text{(dla dowolnego nowego parametru } a\text{)}$$

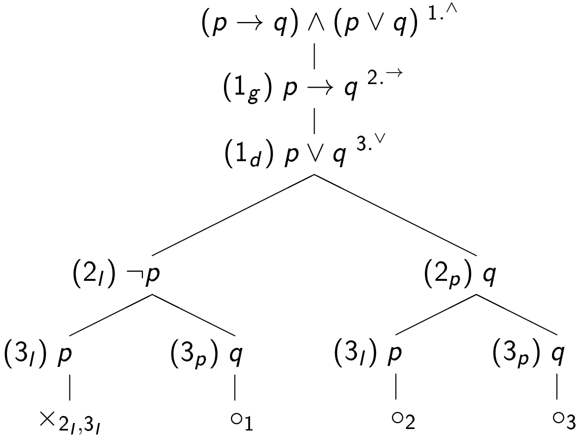
Pojęcia wprowadzone dla metody tablic analitycznych w KRZ (gałąź zamknięta, tablica zamknięta, gałąź spełnialna, tablica spełnialna, zbiór tablicowo niesprzeczny, itd.) mają swoje odpowiedniki w przypadku języka logiki pierwszego rzędu, z oczywistymi modyfikacjami syntaktycznymi.

Propozycja notacji

W korzeniu drzewa znajduje się formuła, której tablicę budujemy. Numerujemy poszczególne kroki tworzenia tablicy (z prawej strony odpowiednich formuł, z zaznaczeniem użytej reguły). Wyniki zastosowanych reguł numerowane są z lewej strony odpowiednich formuł. Oznaczenia (górna, dolna oraz lewa, prawa) są oczywiste. Gałąź zamkniętą kończymy liściem $\times$, gałąź otwartą np. liściem $\circ$ (z indeksem, jeśli chcemy się do niej odwoływać) lub nie dodajemy takich ozdób.

Wprowadzanie nowej stałej (parametru) a zaznaczamy z prawej strony odpowiedniej formuły znaczkiem $\sqrt{a}$. Zastosowanie reguły dla γ-formuł i termu domkniętego t zaznaczamy z prawej strony odpowiedniej formuły znaczkiem $\star t$.

Tablica analityczna formuły $(p \to q) \wedge (p \vee q)$:



TA dla $\neg(((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q)$:

$\neg(((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q)$ $^{1.\neg\to}$

(1_g) $(p \to q) \wedge (\neg p \to q)$ $^{2.\wedge}$

(1_d) $\neg q$

(2_g) $p \to q$ $^{3.\to}$

(2_d) $\neg p \to q$ $^{4.\to}$

- (3_l) $\neg p$
  - (4_l) $\neg\neg p$ $^{5.\neg\neg}$
    - (5) p
    - $\times_{4_l,5}$
  - (4_p) q
    - $\times_{1_d,4_p}$
- (3_p) q
  - $\times_{1_d,3_p}$

TA dla $(\exists x\, Px \rightarrow \exists y\, Qy) \rightarrow \exists x\, (Px \rightarrow Qx)$:

$(\exists x\, P(x) \rightarrow \exists y\, Q(y)) \rightarrow \exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ $^{1.\rightarrow}$

- (1_l) $\neg(\exists x\, P(x) \rightarrow \exists y\, Q(y))$ $^{2.\neg\rightarrow}$
  - (2_g) $\exists x\, P(x)$ $^{3.\surd a}$
  - (2_d) $\neg\exists y\, Q(y)$ $^{4.\star a}$
  - (3) $P(a)$
  - (4) $\neg Q(a)$
- (1_p) $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ $^{5.\surd b}$
  - (5) $P(b) \rightarrow Q(b)$ $^{6.\rightarrow}$
    - (6_l) $\neg P(b)$
    - (6_p) $Q(b)$

TA dla $\exists x \forall y \forall z\, (R(x,y,z) \vee Q(x,y))$:

$$\exists x \forall y \forall z\, (R(x,y,z) \vee Q(x,y))\ ^{1.\surd a}$$

$$(1)\ \forall y \forall z\, (R(a,y,z) \vee Q(a,y))\ ^{2.\star a}$$

$$(2)\ \forall z\, (R(a,a,z) \vee Q(a,a))\ ^{3.\star a}$$

$$(3)\ R(a,a,a) \vee Q(a,a)\ ^{4.\vee}$$

$$(4_l)\ R(a,a,a) \qquad\qquad (4_p)\ Q(a,a)$$

TA dla $\neg(\exists x \forall y\ P(x,y) \to \exists z\ P(z,z))$:

$$\neg(\exists x \forall y\ P(x,y) \to \exists z\ P(z,z))\ ^{1.\neg\to}$$

$$(1_g)\quad \exists x \forall y\ P(x,y)\ ^{2.\surd a}$$

$$(1_d)\quad \neg\exists z\ P(z,z)\ ^{3.\star a}$$

$$(2)\quad \forall y\ P(a,y)\ ^{4.\star a}$$

$$(3)\quad \neg P(a,a)$$

$$(4)\quad P(a,a)$$

$$\times_{3,4}$$

TA dla zbioru $\{\ \neg\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)),\ \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)),\ \exists x\ P(x)\ \}$:

$\neg\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$ $^{2.\star a}$

$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ $^{3.\star a}$

$\exists x\ P(x)$ $^{1.\surd a}$

(1) $P(a)$

(2) $\neg(P(a) \wedge Q(a))$ $^{4.\neg\wedge}$

(3) $P(a) \rightarrow Q(a)$ $^{5.\rightarrow}$

(4$_l$) $\neg P(a)$ — $\times_{1,4_l}$

(4$_p$) $\neg Q(a)$

(5$_l$) $\neg P(a)$ — $\times_{1,5_l}$

(5$_p$) $Q(a)$ — $\times_{4_p,5_p}$

TA dla zbioru $\{\ \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)),\ \forall x\,(P(x) \to R(x)),\ \forall x\,(Q(x) \to R(x))\ \}$:

$\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$ $^{1.\surd a}$

$\forall x\,(P(x) \to R(x))$ $^{2.\star a}$

$\forall x\,(Q(x) \to R(x))$ $^{3.\star a}$

(1) $P(a) \wedge \neg Q(a)$ $^{4.\wedge}$

(2) $P(a) \to R(a)$ $^{5.\to}$

(3) $Q(a) \to R(a)$ $^{6.\to}$

(4_g) $P(a)$

(4_d) $\neg Q(a)$

- (5_l) $\neg P(a)$
  - $\times_{4_g,5_l}$
- (5_p) $R(a)$
  - (6_l) $\neg Q(a)$
    - $\circ_1$
  - (6_p) $R(a)$
    - $\circ_2$

Przez *model* języka pierwszego rzędu L o sygnaturze złożonej ze zbioru predykatów $\mathbf{R}$, symboli funkcyjnych $\mathbf{F}$ oraz stałych indywidualnych $\mathbf{C}$ rozumiemy parę $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$, gdzie:

1. $\mathbf{D}$ jest niepustym zbiorem (*dziedziną* $\mathbf{M}$)
2. $\mathbf{I}$ jest odwzorowaniem (*interpretacją*), które przyporządkowuje:
   1. każdemu n-argumentowemu predykatowi $P \in \mathbf{R}$ relację $P^{\mathbf{I}} \subseteq \mathbf{D}^{\mathbf{n}}$
   2. każdemu n-argumentowemu symbolowi funkcyjnemu $f \in \mathbf{F}$ funkcję $f^{\mathbf{I}} : \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$
   3. każdej stałej $c \in \mathbf{C}$ element $c^{\mathbf{I}} \in \mathbf{D}$.

Zakładamy, że słuchacze pamiętają definicje następujących pojęć:

1. Wartościowanie (w dziedzinie modelu)
2. Podstawienie (termu za zmienną w termie lub formule)
3. Wartość termu/formuły w modelu dla danego wartościowania
4. Spełnianie i prawdziwość formuł w modelu
5. Wynikanie logiczne

W notacji proponowanej przez Fittinga:

1. Podstawienie $\sigma : \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ (funkcja ze zbioru zmiennych w zbiór termów).
   1. Jeśli σ jest podstawieniem, to σ_x jest podstawieniem, które przyjmuje wartość x dla argumentu x, a pozostałe wartości ma takie same, jak podstawienie σ.
   2. Operację podstawiania rozszerzamy w znany sposób na zbiór formuł.
   3. Wartość podstawienia σ dla formuły Φ oznaczamy przez $\Phi\sigma$.
2. Wartościowanie $\mathbf{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{D}$ (funkcja ze zbioru zmiennych w dziedzinę modelu). Niech $x^{\mathbf{A}}$ oznacza wartość $\mathbf{A}$ dla argumentu x.
   1. Wartościowania rozszerzamy w znany sposób na zbiory: termów oraz formuł.
   2. Wartość termu t w modelu $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ przy wartościowaniu $\mathbf{A}$ oznaczamy przez $t^{\mathbf{I},\mathbf{A}}$.
   3. Wartość formuły Φ w modelu $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ przy wartościowaniu $\mathbf{A}$ oznaczamy przez $\Phi^{\mathbf{I},\mathbf{A}}$.

Znany Fakt. Załóżmy, że t jest termem domkniętym, Φ formułą języka pierwszego rzędu L, a $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ modelem dla L. Niech x będzie zmienną, zaś $\mathbf{A}$ wartościowaniem takim, że $x^{\mathbf{A}} = t^{\mathbf{I}}$. Wtedy: $(\Phi(x/t))^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = \Phi^{\mathbf{I},\mathbf{A}}$.

Uwaga. Pierwsza część tej prezentacji nie jest systematycznym wykładem semantyki języków pierwszego rzędu.
Przywołujemy jedynie te pojęcia i fakty, które zostaną wykorzystane w omawianiu metody tablic analitycznych (a także metody rezolucji, później).

Model $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ dla języka L nazywamy *modelem Herbranda*, gdy:

1. $\mathbf{D}$ jest zbiorem wszystkich termów domkniętych (bazowych) języka L.
2. $t^{\mathbf{I}} = t$ dla każdego termu domkniętego t.

Zauważmy, że w modelu Herbranda wartościowania pokrywają się z podstawieniami. W konsekwencji (co łatwo dowieść przez indukcję strukturalną; zob. Fitting 1990, 108):

1. Jeśli $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ jest modelem Herbranda dla L, to $t^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = (t\mathbf{A})^{\mathbf{I}}$ dla każdego termu języka L.
2. Jeśli $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ jest modelem Herbranda dla L, to $\Phi^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = (\Phi\mathbf{A})^{\mathbf{I}}$.

Warunki prawdziwości dla kwantyfikatorów w modelu Herbranda:

1. $\mathbf{M} \models \forall x \Phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{M} \models \Phi[x/d]$ dla wszystkich $d \in \mathbf{D}$.
2. $\mathbf{M} \models \exists x \Phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{M} \models \Phi[x/d]$ dla pewnego $d \in \mathbf{D}$.

Użyteczny Lemat. Niech S będzie zbiorem zdań, a γ, δ zdaniami. Wtedy:

1. Jeśli $S \cup \{\gamma\}$ jest spełnialny, to spełnialny jest $S \cup \{\gamma, \gamma(t)\}$ dla dowolnego termu domkniętego t.
2. Jeśli $S \cup \{\delta\}$ jest spełnialny, to spełnialny jest $S \cup \{\delta, \delta(a)\}$ dla dowolnej stałej a, która nie występuje ani w S ani w δ.

Dowód punktu 1. Załóżmy, że $S \cup \{\gamma\}$ jest spełnialny w modelu $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$. Pokażemy, że w tym samym modelu spełnialny jest $S \cup \{\gamma, \gamma(t)\}$ dla dowolnego termu domkniętego t.
Ponieważ w modelu $\mathbf{M}$ prawdziwe jest γ, więc w modelu tym prawdziwe jest także $\forall x \gamma(x)$, gdzie x jest zmienną nie występującą w γ.
Tak więc, dla każdego wartościowania $\mathbf{A}$, w $\mathbf{M}$ prawdziwe jest $(\gamma(x))^{\mathbf{I},\mathbf{A}}$.
Niech $\mathbf{A}$ będzie wartościowaniem takim, że $x^{\mathbf{A}} = t^{\mathbf{I}}$. Na mocy przywołanego wcześniej Znanego Faktu, mamy: $(\gamma(t))^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = (\gamma(x/t))^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = (\gamma(x))^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = 1$

Dowód punktu 2. Załóżmy, że $S \cup \{\delta\}$ jest spełnialny w modelu $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ oraz że a jest stałą nie występującą ani w S ani w δ.
Pokażemy, że $S \cup \{\delta, \delta(a)\}$ jest spełnialny w *pewnym* modelu dla L.
Ponieważ w modelu $\mathbf{M}$ prawdziwe jest δ, więc w modelu tym prawdziwe jest także $\exists x \delta(x)$, gdzie x jest zmienną nie występującą w δ.
Tak więc, $(\delta(x))^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = 1$ dla pewnego wartościowania $\mathbf{A}$. Nie można jednak dogmatycznie założyć, że $x^{\mathbf{A}} = a^{\mathbf{I}}$. Mimo to, *damy radę*, wPiSując się w deklarację powszechnego optymizmu.
Budujemy nowy model $\mathbf{M}^* = (\mathbf{D}, \mathbf{J})$ o tej samej dziedzinie $\mathbf{D}$ co model $\mathbf{M}$ oraz interpretacji $\mathbf{J}$, która nie różni się od $\mathbf{I}$ dla wszystkich symboli różnych od a, natomiast $a^{\mathbf{J}} = x^{\mathbf{A}}$.
Zdania nie zawierające stałej a mają te same wartości w modelach $\mathbf{M}$ oraz $\mathbf{M}^*$.
A zatem $S \cup \{\delta\}$ jest spełnialny w modelu $\mathbf{M}^*$ oraz $(\delta(x/a))^{\mathbf{J},\mathbf{A}} = 1$.
Ponieważ $a^{\mathbf{J}} = x^{\mathbf{A}}$, więc mamy: $(\delta(a))^{\mathbf{J},\mathbf{A}} = (\delta(x/a))^{\mathbf{J},\mathbf{A}} = (\delta(x))^{\mathbf{J},\mathbf{A}} = 1$
A zatem $S \cup \{\delta, \delta(a)\}$ jest spełnialny w modelu $\mathbf{M}^*$.

Szczególny przypadek powyższego lematu to:

Fakt. Jeśli $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ jest modelem Herbranda dla L, to:

1. $\mathbf{M} \models \gamma$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{M} \models \gamma(d)$ dla wszystkich $d \in \mathbf{D}$.
2. $\mathbf{M} \models \delta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{M} \models \delta(d)$ dla pewnego $d \in \mathbf{D}$.

W językach pierwszego rzędu zachodzą twierdzenia: o indukcji strukturalnej oraz rekursji strukturalnej (zob. Fitting 1990, 111-112).

Lemat Hintikki

Zbiór zdań $\mathbf{H}$ języka pierwszego rzędu L jest *zbiorem Hintikki pierwszego rzędu* (dla L), gdy $\mathbf{H}$ jest zdaniowym zbiorem Hintikki (zob.: wykład drugi) oraz:

1. Jeśli $\gamma \in \mathbf{H}$, to $\gamma(t) \in \mathbf{H}$, dla każdego termu domkniętego języka L.
2. Jeśli $\delta \in \mathbf{H}$, to $\delta(t) \in \mathbf{H}$, dla pewnego termu domkniętego języka L.

Lemat Hintikki. Załóżmy, że zbiór termów domkniętych języka pierwszego rzędu L jest niepusty. Jeśli $\mathbf{H}$ zbiorem Hintikki pierwszego rzędu dla L, to $\mathbf{H}$ jest spełnialny w modelu Herbranda dla L.

Dowód Lematu Hintikki. Niech $\mathbf{H}$ będzie zbiorem Hintikki pierwszego rzędu dla L. Skonstruujemy model Herbranda $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ dla L, a potem pokażemy, że $\mathbf{H}$ jest spełnialny w $\mathbf{M}$.

Dowód Lematu Hintikki

Niech $\mathbf{D}$ będzie zbiorem termów domkniętych języka L. Z założenia: $\mathbf{D} \neq \emptyset$. Określamy interpretację $\mathbf{I}$:

1. Jeśli c jest stałą języka L, to $c^{\mathbf{I}} = c$.
2. Jeśli f jest n-argumentowym symbolem funkcyjnym w L oraz $t_1, t_2, \ldots, t_n$ są elementami $\mathbf{D}$, to $f^{\mathbf{I}}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ jest termem domkniętym $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.
3. Jeśli R jest n-argumentowym predykatem w L oraz $t_1, t_2, \ldots, t_n$ są elementami $\mathbf{D}$, to $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^{\mathbf{I}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ należy do $\mathbf{H}$.

Przez indukcję strukturalną pokażemy teraz, że dla każdego zdania Φ języka L: jeśli $\Phi \in \mathbf{H}$, to $\mathbf{M} \models \Phi$.

Dowód Lematu Hintikki

- Załóżmy, że zdanie atomowe $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ należy do $\mathbf{H}$. Trzeba pokazać, że $(R(t_1, t_2, \ldots, t_n))^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = 1$ dla każdego wartościowania $\mathbf{A}$. Ponieważ $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ jest zdaniem, każdy t_i jest termem domkniętym, a więc $t_i^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = t_i^{\mathbf{I}} = t_i$. Z założenia, że $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ należy do $\mathbf{H}$ i z definicji zbioru Hintikki mamy: $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^{\mathbf{I}}$. Ostatecznie:
$$(t_1^{\mathbf{I},\mathbf{A}}, t_2^{\mathbf{I},\mathbf{A}}, \ldots, t_n^{\mathbf{I},\mathbf{A}}) \in R^{\mathbf{I}},$$
czyli $(R(t_1, t_2, \ldots, t_n))^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = 1$ dla wszystkich wartościowań $\mathbf{A}$, a więc pokazaliśmy, że $\mathbf{M} \models R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.
- Kroki dotyczące $\bot$, $\top$ są oczywiste (definicja relacji $\models$).
- Kroki indukcyjne dla funktorów prawdziwościowych są także oczywiste (definicja relacji $\models$).

Dowód Lematu Hintikki

- Załóżmy, że γ jest zdaniem w L oraz $\gamma \in \mathbf{H}$. Pokażemy, że $\mathbf{M} \models \gamma$. Ponieważ $\gamma \in \mathbf{H}$, więc $\gamma(t) \in \mathbf{H}$ dla *każdego* termu domkniętego t (na mocy definicji zbioru Hintikki). Na mocy założenia indukcyjnego oraz faktu, że $\mathbf{D}$ jest zbiorem wszystkich termów domkniętych mamy: $\mathbf{M} \models \gamma(t)$ dla *każdego* termu domkniętego t. Na mocy Użytecznego Lematu, $\mathbf{M} \models \gamma$.
- Załóżmy, że δ jest zdaniem w L oraz $\delta \in \mathbf{H}$. Pokażemy, że $\mathbf{M} \models \delta$. Ponieważ $\delta \in \mathbf{H}$, więc $\delta(t) \in \mathbf{H}$ dla *pewnego* termu domkniętego t (na mocy definicji zbioru Hintikki). Na mocy założenia indukcyjnego oraz faktu, że $\mathbf{D}$ jest zbiorem wszystkich termów domkniętych mamy: $\mathbf{M} \models \delta(t)$ dla *pewnego* termu domkniętego t. Na mocy Użytecznego Lematu, $\mathbf{M} \models \delta$.

Parametry

- W dalszej części wykorzystywać będziemy często nowe symbole (stałe) dodawane do rozważanego języka pierwszego rzędu L.
- Jeśli $L(\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C})$ jest językiem ze zbiorem predykatów $\mathbf{R}$, zbiorem symboli funkcyjnych $\mathbf{F}$ oraz zbiorem stałych $\mathbf{C}$, zaś **par** jest przeliczalnym zbiorem stałych takim, że $\mathbf{C} \cap \mathbf{par} = \emptyset$, to przez $L^{\mathbf{par}}$ rozumiemy język $L(\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C} \cup \mathbf{par})$.
- Elementy zbioru **par** nazywamy *nowymi stałymi* albo *parametrami*.

Własności niesprzeczności

Jeśli $\mathcal{C}$ jest rodziną zbiorów zdań języka $L^{\mathbf{par}}$, to $\mathcal{C}$ nazywamy *własnością niesprzeczności pierwszego rzędu* (dla języka L), gdy $\mathcal{C}$ jest zdaniową własnością niesprzeczności (zob. wykład drugi) oraz dla każdego $S \in \mathcal{C}$:

1. Jeśli $\gamma \in S$, to $S \cup \{\gamma(t)\} \in \mathcal{C}$ dla każdego termu domkniętego języka $L^{\mathbf{par}}$.
2. Jeśli $\delta \in S$, to $S \cup \{\delta(a)\} \in \mathcal{C}$ dla pewnego parametru a języka $L^{\mathbf{par}}$.

Przez *alternatywną własność niesprzeczności pierwszego rzędu* rozumiemy rodzinę $\mathcal{C}$ spełniającą warunki nakładane na własności niesprzeczności pierwszego rzędu ale przy zastąpieniu warunku dla δ-formuł przez warunek:

- Jeśli $\delta \in S$, to $S \cup \{\delta(a)\} \in \mathcal{C}$ dla *każdego* parametru a, który nie występuje w S.

Przez *podstawienie parametru* rozumiemy dowolne odwzorowanie zbioru **par** w siebie. Jeśli π jest takim odwzorowaniem, Φ jest formułą, a S zbiorem formuł, to:

1. $\Phi\pi$ jest formułą powstającą z Φ przez dokonanie podstawienia π.
2. $S\pi$ jest zbiorem formuł $\{\Phi\pi \ : \ \Phi \in S\}$.

Fakt. Niech $\mathcal{C}$ będzie własnością niesprzeczności pierwszego rzędu domkniętą na podzbiory. Definiujemy $\mathcal{C}^+$: $S \in \mathcal{C}^+$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S\pi \in \mathcal{C}$ dla pewnego podstawienia parametrów π. Wtedy:

1. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^+$
2. $\mathcal{C}^+$ jest domknięta na podzbiory.
3. $\mathcal{C}^+$ jest alternatywną własnością niesprzeczności pierwszego rzędu.

Każda alternatywna własność niesprzeczności pierwszego rzędu, która jest domknięta na podzbiory może zostać rozszerzona do własności niesprzeczności charakteru skończonego.

Twierdzenie o istnieniu modelu

Twierdzenie o Istnieniu Modelu. Jeśli $\mathcal{C}$ jest własnością niesprzeczności pierwszego rzędu dla L, a S jest zbiorem zdań z L oraz $S \in \mathcal{C}$, to S jest spełnialny (w modelu Herbranda dla języka $L^{\mathbf{par}}$).

Dowód. Załóżmy, $\mathcal{C}$ jest własnością niesprzeczności pierwszego rzędu dla L, a S jest zbiorem zdań z L oraz $S \in \mathcal{C}$. Zbudujemy model, w którym prawdziwe będą wszystkie zdania z S.

Rozszerzamy $\mathcal{C}$ do alternatywnej własności niesprzeczności pierwszego rzędu charakteru skończonego $\mathcal{C}^*$. Wtedy oczywiście $S \in \mathcal{C}^*$.

Dowód twierdzenia o istnieniu modelu

Ponieważ język $L^{\mathbf{par}}$ ma przeliczalną liczbę symboli, więc ma też przeliczalnie wiele zdań. Niech $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$ będzie wyliczeniem tych wszystkich zdań w ustalonym porządku. Zdefiniujemy teraz ciąg $S_1, S_2, S_3, \ldots$ zbiorów należących do $\mathcal{C}^*$ w ten sposób, że dla każdego takiego zbioru S_n liczba dotąd nieużywanych w tych zbiorach parametrów będzie nieskończona (jest tak oczywiście dla S, ponieważ w S nie ma żadnych parametrów). Niech mianowicie:

1. $S_1 = S$.
2. Jeśli $S_n \cup \{\Phi_n\} \notin \mathcal{C}^*$, to niech $S_{n+1} = S_n$.
3. Jeśli $S_n \cup \{\Phi_n\} \in \mathcal{C}^*$ oraz Φ_n nie jest δ-zdaniem, to niech $S_{n+1} = S_n \cup \{\Phi_n\}$.
4. Jeśli $S_n \cup \{\Phi_n\} \in \mathcal{C}^*$ oraz Φ_n jest zdaniem δ, to nieskończona liczba parametrów będzie nowa dla $S_n \cup \{\Phi_n\}$; wybieramy jeden z nich, powiedzmy a i definiujemy: $S_{n+1} = S_n \cup \{\Phi_n\} \cup \{\delta(a)\}$.

Dowód twierdzenia o istnieniu modelu

Na mocy powyższej konstrukcji, dla każdego n: $S_n \in \mathcal{C}^*$ oraz $S_n \subseteq S_{n+1}$. Niech $\mathbf{H} = \bigcup\limits_n S_n$. Wtedy $S \subseteq \mathbf{H}$. Tak, jak w przypadku zdaniowych zbiorów Hintikki (zob.: wykład drugi) dowodzimy, że:

1. $\mathbf{H} \in \mathcal{C}^*$
2. $\mathbf{H}$ jest elementem maksymalnym w $\mathcal{C}^*$
3. $\mathbf{H}$ jest zbiorem Hintikki pierwszego rzędu dla języka $L^{\mathbf{par}}$.

Na mocy Lematu Hintikki $\mathbf{H}$ jest spełnialny, a ponieważ $S \subseteq \mathbf{H}$, więc także S jest spełnialny w modelu Herbranda dla $L^{\mathbf{par}}$.

Zastosowania twierdzenia o istnieniu modelu

Fitting 1990 (117–119) podaje kilka bezpośrednich zastosowań Twierdzenia o Istnieniu Modelu:

1. **Twierdzenie o Zwartości**. Niech S będzie zbiorem zdań języka pierwszego rzędu L. Jeśli każdy skończony podzbiór zbioru S jest spełnialny, to S jest spełnialny.
2. **Wniosek**. Jeśli S jest zbiorem zdań języka pierwszego rzędu i S jest spełnialny w dowolnie dużych modelach skończonych, to S jest spełnialny w modelu nieskończonym.
3. **Twierdzenie Löwenheima-Skolema**. Niech S będzie zbiorem zdań języka pierwszego rzędu L. Jeśli S jest spełnialny, to S jest spełnialny w modelu przeliczalnym.

Zastosowania twierdzenia o istnieniu modelu

Dodajmy na marginesie, że na mocy powyższych wyników widoczne jest m.in., że:

1. Pojęcie skończoności nie jest wyrażalne w logice pierwszego rzędu.
2. Jeśli teoria mnogości pierwszego rzędu jest niesprzeczna, to ma model przeliczalny. Nie stoi to w sprzeczności z faktem, iż w teorii mnogości dowodzimy istnienia zbiorów nieprzeliczalnych. Ujmując rzecz w wielkim skrócie, przeliczalny model dla teorii mnogości nie zawiera wystarczającej liczby bijekcji.

- **Fakt Zachowawczy**. Zastosowanie reguły rozszerzania tablic analitycznych do tablicy spełnialnej daje tablicę spełnialną.
- **Fakt**. Jeśli istnieje tablica zamknięta dla zbioru formuł S, to S nie jest spełnialny.
- **Trafność metody TA w KRZ**. Jeśli φ ma dowód tablicowy, to φ jest tautologią KRZ. **Dowód**. Dowód tablicowy dla φ jest zamkniętą tablicą analityczną dla $\{\neg\varphi\}$. Jeśli tablica analityczna dla $\{\neg\varphi\}$ jest zamknięta, to $\{\neg\varphi\}$ nie jest spełnialny. W konsekwencji, φ jest tautologią KRZ.
- **Fakt**. Rodzina wszystkich tablicowo niesprzecznych zbiorów formuł jest zdaniową własnością niesprzeczności.
- **Pełność metody TA w KRZ**. Jeśli φ jest tautologią KRZ, to φ ma dowód tablicowy. **Dowód**. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Jeśli φ nie ma dowodu tablicowego, to nie istnieje zamknięta tablica analityczna dla $\{\neg\varphi\}$. Wtedy $\{\neg\varphi\}$ jest tablicowo niesprzeczny, a zatem jest spełnialny (na mocy Faktu poprzedzającego niniejsze twierdzenie oraz Twierdzenia o Istnieniu Modelu dla KRZ). Tak więc, φ nie jest tautologią.

Konsekwencja tablicowa w KRZ

Możemy przeprowadzać dowody tablicowe *z dowolnych zbiorów przesłanek*. Niech S będzie dowolnym zbiorem formuł (języka KRZ). *Reguła wprowadzania przesłanek* (dla zbioru S) głosi, że możemy dołączyć dowolny element zbioru S na końcu dowolnej gałęzi tablicy analitycznej. Piszemy $S \vdash_{pt} \varphi$, gdy istnieje zamknięta tablica analityczna dla $\neg\varphi$, w której stosowano regułę wprowadzania przesłanek dla zbioru S. Jeśli $S \vdash_{pt} \varphi$, to mówimy, że φ *wynika tablicowo z* S.

Silna Trafność i Pełność Metody TA w KRZ. Dla dowolnego zbioru formuł S oraz formuły φ języka KRZ następujące warunki są równoważne:

1. $S \models_{krz} \varphi$ (φ wynika logicznie z S)
2. $S \vdash_{pt} \varphi$ (φ wynika tablicowo z S)

Nietrudny dowód tego faktu znajdą słuchacze w Fitting 1990, 67–68:

Konsekwencja tablicowa w KRZ

Trafność. (Jeśli $S \vdash_{pt} \varphi$, to $S \models_{krz} \varphi$.)
Nazwiemy gałąź tablicy analitycznej S-*spełnialną*, gdy istnieje wartościowanie v, przy którym wszystkie formuły na tej gałęzi przyjmują wartość 1, a ponadto wszystkie formuły ze zbioru S przyjmują wartość 1 przy wartościowaniu v. Nazwiemy tablicę analityczną S-*spełnialną*, gdy pewna jej gałąź jest S-spełnialna. Tak więc, $\emptyset$-spełnialność tablicy analitycznej to po prostu jej spełnialność w sensie podanym uprzednio. Reguły rozszerzania tablic analitycznych oraz reguły dołączania przesłanek prowadzą od tablic S-spełnialnych do tablic S-spełnialnych. Oczywiście nie istnieją zamknięte tablice S-spełnialne. Jeśli zatem istnieje tablica zamknięta dla $\neg\varphi$, w której użyto przesłanek z S, to także tablica analityczna dla $\neg\varphi$ nie może być S-spełnialna. Wynika z tego, że $S \cup \{\neg\varphi\}$ nie jest spełnialny, a zatem $S \models_{krz} \varphi$.

Konsekwencja tablicowa w KRZ

Pełność. (Jeśli $S \models_{krz} \varphi$, to $S \vdash_{pt} \varphi$.)
Dla dowolnej formuły φ zbiór S nazwiemy *φ-tablicowo sprzecznym*, gdy $S \vdash_{pt} \varphi$. Zbiory, które nie są φ-tablicowo sprzeczne, nazwiemy *φ-tablicowo niesprzecznymi*. Tak więc, S jest φ-tablicowo niesprzeczny, gdy φ nie wynika tablicowo z S. Zauważmy też, że $\perp$-tablicowa niesprzeczność to po prostu tablicowa niesprzeczność w sensie podanym uprzednio. Podobnie jak w przypadku omawianej wcześniej Hilbertowskiej φ-niesprzeczności, łatwo pokazać, że:

1. Dla każdej formuły φ rodzina wszystkich zbiorów φ-tablicowo niesprzecznych jest zdaniową własnością niesprzeczności.
2. Jeśli S jest φ-tablicowo niesprzeczny, to również $S \cup \{\neg\varphi\}$ jest φ-tablicowo niesprzeczny.

Konsekwencja tablicowa w KRZ

Przypuśćmy, że nie zachodzi $S \vdash_{pt} \varphi$. Wtedy S jest φ-tablicowo niesprzeczny, a więc również $S \cup \{\neg\varphi\}$ jest φ-tablicowo niesprzeczny. Wtedy jednak, na mocy Twierdzenia o Istnieniu Modelu, $S \cup \{\neg\varphi\}$ jest spełnialny, co oznacza, że φ nie wynika logicznie z S.

Uwaga. W przypadku skończonego zbioru przesłanek S mamy oczywiście: $S \vdash_{tab} \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zamknięta tablica analityczna dla $S \cup \{\neg\varphi\}$.

Uwaga. Silną trafność i pełność metody tablicowej w KRZ można wykorzystać w dowodzie twierdzenia głoszącego, iż dla dowolnej zbioru formuł S i formuły φ języka KRZ: $S \models_{krz} \varphi$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje skończony zbiór $S_0 \subseteq S$ taki, że $S_0 \models_{krz} \varphi$. (zob. Fitting 1990, 66–68.)

Trafność

- **Trafność metody TA dla logiki pierwszego rzędu**. Jeśli Φ ma dowód tablicowy, to jest tautologią języka pierwszego rzędu L.
- **Dowód**. Przypuśćmy, że Φ ma dowód tablicowy, ale nie jest tautologią. Istnieje zatem model języka L, w którym $\neg\Phi$ jest prawdziwa. Konstrukcja dowodu tablicowego dla Φ rozpoczyna się od tablicy o jednym wierzchołku: $\neg\Phi$. Ta tablica jest zatem spełnialna. Na mocy Faktu Zachowawczego, każde rozszerzenie tej tablicy (poprzez zastosowanie którejś z reguł rozszerzania tablic analitycznych) także jest tablicą spełnialną. W szczególności, ostateczna zamknięta tablica analityczna, będąca tablicowym dowodem Φ jest spełnialna. Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ tablica zamknięta nie jest spełnialna.

Pełność

- **Lemat**. Rodzina wszystkich zbiorów tablicowo niesprzecznych jest własnością niesprzeczności pierwszego rzędu (prosty dowód: Fitting 1990, 132).
- **Pełność metody TA dla logiki pierwszego rzędu**. Jeśli zdanie Φ języka L jest tautologią, to Φ ma dowód tablicowy.
- **Dowód**. Jeśli Φ nie ma dowodu tablicowego, to nie istnieje zamknięta tablica analityczna dla $\{\neg\Phi\}$. Wtedy $\{\neg\Phi\}$ jest tablicowo niesprzeczny, a zatem (na mocy Lematu poprzedzającego niniejsze twierdzenie oraz Twierdzenia o Istnieniu Modelu), $\{\neg\Phi\}$ jest spełnialny. Oznacza to, że Φ nie jest tautologią.