Logika algebraiczna 8c

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

2021

- Niech *Fm* będzie zbiorem wszystkich formuł SCI-języka, a *Var* zbiorem wszystkich zmiennych zdaniowych tego języka.
- Odwzorowanie $t : Fm \to \{0, 1\}$ nazywamy wartościowaniem prawdziwościowym dla SCI ($t \in TV$), gdy t jest funkcją charakterystyczną zbioru formuł pewnej maksymalnej teorii niesprzecznej.
- Niech $\dot{\neg}$ i $\dot{\to}$ będą funkcjami prawdziwościowymi, odpowiednio, negacji i implikacji.
- **Lemat**. Odwzorowanie $t : Fm \to \{0, 1\}$ jest wartościowaniem prawdziwościowym wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki, dla wszystkich formuł α, β, φ, ψ:
  1. $t(\neg\varphi) = \dot{\neg}t(\varphi)$
  2. $t(\varphi \to \psi) = t(\varphi)\dot{\to}t(\psi)$
  3. $t(\varphi \equiv \varphi) = 1$
  4. Jeśli $t(\varphi \equiv \psi) = 1$, to $t(\varphi) = t(\psi)$
  5. Jeśli $t(\varphi \equiv \psi) = 1$, to $t(\neg\varphi \equiv \neg\psi) = 1$
  6. Jeśli $t(\varphi \equiv \psi) = t(\alpha \equiv \beta) = 1$, to $t((\varphi \to \alpha) \equiv (\psi \to \beta)) = t((\varphi \equiv \alpha) \equiv (\psi \equiv \beta)) = 1$. □

- Niech Eq będzie zbiorem wszystkich równości. Definiujemy zbiory formuł i równości stopnia co najwyżej k:
  - $Fm_0 = Var$, $Fm_{k+1} = Fm_k \cup \{\neg\varphi, \varphi \to \psi, \varphi \equiv \psi : \varphi, \psi \in Fm_k\}$
  - $Eq_0 = \emptyset$, $Eq_{k+1} = Eq \cap (Fm_{k+1} - Fm_k)$
- Mówimy, że $f : Var \cup Eq_1 \to \{0, 1\}$ jest elementarnym wartościowaniem prawdziwościowym ($f \in ETV$), gdy dla wszystkich $i, j, k \geqslant 1$:
  - $f(p_k \equiv p_k) = 1$
  - Jeśli $f(p_i \equiv p_j) = 1$, to $f(p_i) = f(p_j)$
  - Jeśli $f(p_i \equiv p_k) = f(p_j \equiv p_k) = 1$, to $f(p_i \equiv p_j) = 1$.
- Jeśli $t \in TV$, to $t \upharpoonright Var \cup Eq_1 \in ETV$.
- Naszym celem będzie pokazanie, że zachodzi też implikacja odwrotna, czyli że każde elementarne wartościowanie prawdziwościowe może zostać rozszerzone do wartościowania prawdziwościowego.

- Każde elementarne wartościowanie prawdziwościowe f może być uważane za sumę $h \cup g$ dwóch rozłącznych funkcji o wartościach w $\{0,1\}$ takich, że $Var = Fm_0 = dom(h)$ oraz $Eq_1 = dom(g)$.
- Ponadto, g jest funkcją charakterystyczną relacji równoważności $\approx$ na zbiorze Var, która spełnia warunek:
  $(*)$ Jeśli $p_i \approx p_j$, to $h(p_i) = h(p_j)$.
- Tak więc, elementarne wartościowania prawdziwościowe można uważać za pary $(h, \approx)$, gdzie $h : Var \to \{0,1\}$, zaś $\approx$ jest relacją równoważności na Var, spełniającą warunek $(*)$.
- Pokażemy, że także wartościowania prawdziwościowe mogą być w ten sposób reprezentowane.
- Podana niżej definicja ciągu częściowych wartościowań prawdziwościowych zdaje sprawę z tego, w jaki sposób przyporządkowujemy wartości z $\{0,1\}$ formułom o określonym stopniu złożoności, wykorzystując stosowne przyporządkowania wartości formułom o mniejszym stopniu złożoności.

Nieskończony ciąg par $\{(h_k, \approx_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ nazywamy ciągiem częściowych wartościowań prawdziwościowych (PTV), gdy dla wszystkich k spełnione są warunki:

1. $h_k : Fm_k \to \{0, 1\}$
2. $h_{k+1}(\varphi) = h_k(\varphi)$, gdy $\varphi \in Fm_k$
3. $h_{k+1}(\neg\varphi) = \dot{\neg} h_k(\varphi)$, gdy $\varphi \in Fm_k$
4. $h_{k+1}(\varphi \to \psi) = h_k(\varphi) \dot{\to} h_k(\psi)$, , gdy $\varphi, \psi \in Fm_k$
5. $\approx_k$ jest relacją równoważności na Fm_k
6. $\varphi \approx_{k+1} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \approx_k \psi$, dla $\varphi, \psi \in Fm_k$
7. Jeśli $\varphi \approx_k \psi$, to $h_k(\varphi) = h_k(\psi)$
8. $h_{k+1}(\varphi \equiv \psi) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \approx_k \psi$, dla $\varphi, \psi \in Fm_k$
9. Jeśli $\varphi \approx_k \psi$ oraz $\alpha \approx_k \beta$, to $\neg\varphi \approx_{k+1} \neg\psi$, $(\varphi \to \alpha) \approx_{k+1} (\psi \to \beta)$ oraz $(\varphi \equiv \alpha) \approx_{k+1} (\psi \equiv \beta)$.

- **Fakt 1**. Jeśli $t \in TV$ oraz dla wszystkich $k \geqslant 0$ i wszystkich $\varphi, \psi \in Fm_k$:
  - $t_k(\varphi) = t(\varphi)$ i
  - $\varphi \approx_k^t \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t_k(\varphi \equiv \psi) = 1$,
- to $\{(t_k, \approx_k^t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem częściowych wartościowań prawdziwościowych oraz $t = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} t_k$. □
- **Fakt 2**. Jeśli $\{(h_k, \approx_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem częściowych wartościowań prawdziwościowych, to suma $t = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} h_k$ jest wartościowaniem prawdziwościowym takim, że $\{(h_k, \approx_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ jest odpowiadającym mu ciągiem częściowych wartościowań prawdziwościowych, czyli $h_k = t_k$ oraz $\approx_k = \approx_k^t$ dla wszystkich $k \geqslant 0$. □

- **Twierdzenie**. Każde elementarne wartościowanie prawdziwościowe można rozszerzyć do wartościowania prawdziwościowego.
- **Dowód**. Załóżmy, że f jest elementarnym wartościowaniem prawdziwościowym reprezentowanym przez $(h, \approx)$. Definiujemy:
  1. $h_0 = h$ oraz $\approx_0 = \approx$
  2. $h_1(p_i \equiv p_j) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p_i \approx_0 p_j$
  3. $h_{k+1}(\varphi \equiv \psi) = 0$ i nie zachodzi $\varphi \approx_k \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ i ψ są różnymi formułami z Fm_k
  4. $h_{k+1}(\neg\varphi) = \dot{\neg} h_k(\varphi)$ dla $\varphi \in Fm_k$
  5. $h_{k+1}(\varphi \rightarrow \psi) = h_k(\varphi) \dot{\rightarrow} h_k(\psi)$ dla $varphi, \psi \in Fm_k$.
- Wtedy $\{(h_k, \approx_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem częściowych wartościowań prawdziwościowych, a wartościowanie prawdziwościowe $t = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}}$ jest rozszerzeniem f. $\square$

- **Uwaga do powyższego twierdzenia**. Jeśli w powyższej definicji zastąpimy warunek 3) przez następujące dwa warunki:
  - $h_{k+1}(\varphi \equiv \psi) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h_k(\varphi) = h_k(\psi)$ dla $\varphi, \psi \in Fm_k$
  - $\varphi \approx_k \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h_k(\varphi) = h_k(\psi)$ dla $\varphi, \psi \in Fm_k$,
- to opisana wyżej procedura określa inne wartościowanie prawdziwościowe t^*, które także jest rozszerzeniem f. Różnica między t i t^* polega na tym, że:
  - przy wartościowaniu t wszystkie nietrywialne równości są fałszywe;
  - przy wartościowaniu t^* wszystkie równości są wartościowane tak, jak równoważność materialna.
- **Wniosek**. Zbiór tych zmiennych oraz elementarnych równości, które są prawdziwe przy elementarnym wartościowaniu prawdziwościowym jest niesprzeczny. □

Bloom i Suszko wykorzystują powyższe konstrukcje w innym jeszcze dowodzie rozstrzygalności SCI:

- Niech Fm_k^n będzie zbiorem tych wszystkich formuł z Fm_k, które zawierają co najwyżej zmienne $p_1, \ldots, p_n$.
- Ograniczenia (elementarnych) wartościowań prawdziwościowych do Fm_k^n nazwiemy n/k-wartościowaniami prawdziwościowymi.
- Ponieważ zbiór Fm_k^n jest skończony, więc istnieje tylko skończenie wiele n/k-wartościowań prawdziwościowych i każde z nich można przedstawić w postaci zerojedynkowej tabeli dla wszystkich formuł w Fm_k^n.
- Ponadto, dla danego elementarnego n/k-wartościowania prawdziwościowego f istnieje efektywna procedura rozszerzania f na zbiory $Fm_1^n, \ldots, Fm_k^n$ do n/k-wartościowania prawdziwościowego, które rozszerza f.

- Ponieważ $\varphi \in C(\emptyset)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t(\varphi) = 1$ dla każdego wartościowania prawdziwościowego t, więc także: $\varphi \in C(\emptyset)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t(\varphi) = 1$ dla każdego n/k-wartościowania prawdziwościowego t.
- Dla danej formuły φ wystarczy zatem określić najmniejszy zbiór Fm_k^n zawierający φ, a przejrzenie wszystkich n/k-wartościowań prawdziwościowych dostarcza wtedy rozstrzygnięcia czy $\varphi \in C(\emptyset)$.

Wniosek. $(\varphi \equiv \psi) \in C(\emptyset)$ wtedy i tylko wtedy, gdy formuły φ i ψ są identyczne. $\square$

Niniejsza prezentacja wykorzystuje fragment artykułu:

Bloom, S., Suszko, R. 1972. Investigations into the sentential calculus with identity. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 13 (3), 289–308.