Logika algebraiczna 8a

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

2021

- **Lemat A**. Załóżmy, że D jest normalnym ultrafiltrem w algebrze $\mathbf{A}$. Wtedy istnieje SCI-język $\mathcal{L}$, niesprzeczny zbiór Φ formuł języka $\mathcal{L}$ oraz homomorfizm matrycowy h algebry $(\mathcal{L}/\sim_{\Phi}, C(\Phi)/\sim_{\Phi})$ na algebrę $(\mathbf{A}, D)$, gdzie $\varphi \sim_{\Phi} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \equiv \psi \in \Phi$.
- **Dowód**. Niech V będzie zbiorem równolicznym z uniwersum algebry $\mathbf{A}$ i niech $\mathcal{L}$ będzie SCI-językiem o zbiorze zmiennych zdaniowych V.
- Dowolną bijekcję h z V na A rozszerzamy do homomorfizmu $\mathcal{L}$ na $\mathbf{A}$.
- Niech $\Phi = h^{-1}(D) = Sat_h(\mathbf{A}, D)$. Wtedy $C(\Phi) = \Phi$, a na mocy twierdzenia o pełności Φ jest niesprzeczny.
- Ponieważ D jest ultrafiltrem normalnym, więc h jest poprawnie określoną bijekcją algebry $(\mathcal{L}/\sim_{\Phi}, C(\Phi)/\sim_{\Phi})$ na algebrę $(\mathbf{A}, D)$. $\square$

- **Lemat B**. Niech $\mathbf{A} = (A, \neg^{\mathbf{A}}, \rightarrow^{\mathbf{A}}, \equiv^{\mathbf{A}})$ będzie SCI-algebrą i niech $D \subseteq A$. Zbiór D jest filtrem pierwszym (ultrafiltrem) w $\mathbf{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą warunki 1, 2, 3 podane poniżej. D jest ultrafiltrem normalnym w $\mathbf{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą warunki 1, 2, 3, 4 podane poniżej:
  1. $a \rightarrow^{\mathbf{A}} b \notin D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in D$ oraz $b \notin D$
  2. $a \notin D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\neg^{\mathbf{A}} a \in D$
  3. $\sim_D$ jest kongruencją algebry $\mathbf{A}$, gdzie: $a \sim_D b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \equiv^{\mathbf{A}} b \in D$
  4. $\sim_D$ jest relacją identyczności, czyli: $a \sim_D b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$. $\square$
- Zachęcamy słuchaczy do samodzielnego udowodnienia tego lematu.

- Rachunek SCI jest rozstrzygalny, czego dowodzi się odwołując się do skończonych modeli tego rachunku.
- **Twierdzenie A**. Dla dowolnych liczb naturalnych $n \geqslant 2$, $1 \leqslant t < n$ istnieje SCI-model $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ taki, że $|A| = n$ i $|D| = t$. □
- **Twierdzenie B**. Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje skończona SCI-algebra $\mathbf{A}$ zawierająca n różnych podzbiorów $D_1, \ldots, D_n$ takich, że dla $1 \leqslant i \leqslant n$ para $(\mathbf{A}, D_i)$ jest SCI-modelem, a ponadto $E((\mathbf{A}, D_i)) \neq E((\mathbf{A}, D_j))$ dla $i \neq j$. □
- **Twierdzenie C**. Jeśli formuła φ jest spełnialna w pewnym modelu, to jest też spełnialna w pewnym modelu skończonym. □
- Wiemy, że $C(\emptyset) = \bigcap E(\mathfrak{M})$, gdzie iloczyn dotyczy wszystkich SCI-modeli. Na mocy powyższych twierdzeń, mamy również: $C(\emptyset) = \bigcap E(\mathfrak{M})$, gdzie iloczyn dotyczy skończonych wszystkich SCI-modeli. Dla żadnego pojedynczego modelu skończonego $\mathfrak{M}$ warunek $C(\emptyset) = E(\mathfrak{M})$ nie zachodzi, gdyż formuła $(p_1 \equiv p_2) \vee (p_1 \equiv p_3) \vee \ldots \vee (p_n \equiv p_{n+1})$ jest prawdziwa w modelu n-elementowym, nie jest jednak prawdziwa w żadnym modelu o więcej niż n elementach.

- **Dowód twierdzenia A**. Dla każdej pary liczb naturalnych (n, t), gdzie $n \geqslant 2$, $1 \leqslant t < n$ możemy skonstruować skończony model $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ taki, że $|A| = n$ i $|D| = t$. Niech mianowicie $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz $D = \{2, 3, \ldots, t\}$
- Na mocy Lematu B operacje $\neg^{\mathbf{A}}$, $\rightarrow^{\mathbf{A}}$ i $\equiv^{\mathbf{A}}$ można określić na różne sposoby, ale tak, aby spełnione były warunki podane w poniższych tabelkach (tu $a, a_1, a_2 \in A - D$, $d, d_1, d_2, d_3 \in D$):

	$\neg^{\mathbf{A}}$
d	a_1
a	d_1

$\rightarrow^{\mathbf{A}}$	d	a
d	d_1	a_1
a	d_2	d_3

$\equiv^{\mathbf{A}}$	d	a
d	d_1	a_2
a	a_1	d_2

Nietrudno wtedy sprawdzić, że dla wszystkich $x, y \in A$:

1. $\neg^{\mathbf{A}} x \notin D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in D$
2. $x \rightarrow^{\mathbf{A}} y \notin D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in D$ i $y \notin D$
3. $x \equiv^{\mathbf{A}} y \notin D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \neq y$. □

- **Dowód twierdzenia B**. Niech $A_0 = \{0,1\}^n$, czyli A_0 jest zbiorem wszystkich n-elementowych ciągów zero-jedynkowych. Niech A będzie sumą A_0 oraz zbioru $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ ciągów n-elementowych o postaci:
  $(0,2,0,\ldots,0)$,
  $(0,0,2,0,\ldots,0)$, $(0,0,3,0,\ldots,0)$,
  $(0,0,0,2,0,\ldots,0)$, $(0,0,0,3,0,\ldots,0)$, $(0,0,0,4,0,\ldots,0)$,
  $\vdots$
  $(0,\ldots,0,2)$, $(0,\ldots,0,3)$, …, $(0,\ldots,0,n)$.
- Operacje $\neg^{\mathbf{A}}$, $\rightarrow^{\mathbf{A}}$ i $\equiv^{\mathbf{A}}$ określamy następująco:
  - $(\neg^{\mathbf{A}} a)_i = 0$, gdy $(a)_i \neq 0$, $(\neg^{\mathbf{A}} a)_i = 1$ w przeciwnym przypadku
  - $(a \rightarrow^{\mathbf{A}} b)_i = 0$, gdy $(a)_i \neq 0$ i $(b)_i = 0$, $(a \rightarrow^{\mathbf{A}} b)_i = 1$ w p.p.
  - $a \equiv^{\mathbf{A}} b = (0,0,\ldots,0)$, gdy $a \neq b$, $a \equiv^{\mathbf{A}} b = (1,1,\ldots,1)$, w p.p.
- Określamy zbiory $D_1,\ldots,D_n$: $D_i = \{a \in A : (a)_i \neq 0\}$.
- Z Lematu B i powyższych definicji wynika, że każdy zbiór D_i jest ultrafiltrem normalnym w **A**.

- Ponadto: $|D_1| < |D_2| < \ldots < |D_n|$.
- Jeśli $i < j$ oraz $|A - D_j| = r$, to formuła:
  $[\neg(p_1 \equiv p_2) \wedge \neg(p_1 \equiv p_3) \wedge \ldots \wedge \neg(p_r \equiv p_{r+1})] \rightarrow [p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_{r+1}]$
  - jest prawdziwa w $(\mathbf{A}, D_j)$
  - nie jest prawdziwa w $(\mathbf{A}, D_i)$.
- Pokazaliśmy zatem, że $E((\mathbf{A}, D_i)) \neq E((\mathbf{A}, D_j))$ dla $i \neq j$.
- W konsekwencji mamy także: $C_{(\mathbf{A},D_i)} \neq C_{(\mathbf{A},D_j)}$ dla $i \neq j$. $\square$

- **Dowód twierdzenia C**. Załóżmy, że φ jest spełniona w modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ przez wartościowanie h. Niech $\mathbf{A} = (A, \neg^{\mathbf{A}}, \rightarrow^{\mathbf{A}}, \equiv^{\mathbf{A}})$.
- Niech $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ będą wszystkimi podformułami formuły φ (φ to formuła φ_n).
- Niech $C_0 = \{h(\varphi_1), \ldots, h(\varphi_n)\}$.
- Ponieważ $h(\varphi) \in D$, więc $h(\varphi_n) \in D$.
- Jeśli $C_0 \cap (A - D) \neq \emptyset$, to niech $C = C_0$, a w przeciwnym przypadku niech $C = C_0 \cup \{\mathbf{0}\}$, gdzie $\mathbf{0}$ jest dowolnym elementem $A - D$. Oznaczmy ponadto $h(\varphi_n) = \mathbf{1}$.
- Niech $\mathcal{D} = C \cap D$. Określimy operacje $\neg^{\circ}$, $\rightarrow^{\circ}$, $\equiv^{\circ}$ na zbiorze C w taki sposób, aby $\mathcal{D}$ był ultrafiltrem normalnym w C. Dla $a \in C$ niech:
  - $\neg^{\circ} a = \neg^{\mathbf{A}} a$, gdy $\neg^{\mathbf{A}} a \in C$
  - $\neg^{\circ} a = \mathbf{1}$, gdy $\neg^{\mathbf{A}} \in D - C$
  - $\neg^{\circ} a = \mathbf{0}$, w pozostałych przypadkach.

- Dla $a, b \in C$ niech:
  - $a \rightarrow^{\circ} b = a \rightarrow^{\mathbf{A}} b$, gdy $a \rightarrow^{\mathbf{A}} b \in C$
  - $a \rightarrow^{\circ} b = \mathbf{1}$, gdy $a \rightarrow^{\mathbf{A}} b \in D - C$
  - $a \rightarrow^{\circ} b = \mathbf{0}$, w pozostałych przypadkach.
- Dla $a, b \in C$ niech:
  - $a \equiv^{\circ} b = a \equiv^{\mathbf{A}} b$, gdy $a \equiv^{\mathbf{A}} b \in C$
  - $a \equiv^{\circ} b = \mathbf{1}$, gdy $a \equiv^{\mathbf{A}} b \in D - C$
  - $a \equiv^{\circ} b = \mathbf{0}$, w pozostałych przypadkach.
- $\mathcal{D}$ jest normalnym ultrafiltrem w algebrze $\mathbf{C} = (C, \neg^{\circ}, \rightarrow^{\circ}, \equiv^{\circ})$, ponieważ D jest normalnym ultrafiltrem w algebrze $\mathbf{A}$ oraz zachodzą równoważności:
  - $\neg^{\circ} a \in \mathcal{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\neg^{\mathbf{A}} a \in D$
  - $a \rightarrow^{\circ} b \in \mathcal{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \rightarrow^{\mathbf{A}} b \in D$
  - $a \equiv^{\circ} b \in \mathcal{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \equiv^{\mathbf{A}} b \in D$.

- A zatem $\mathfrak{M} = (\mathbf{C}, \mathcal{D})$ jest modelem skończonym, w którym formuła φ jest spełniona przez wartościowanie h', zdefiniowane następująco:
  - $h'(p) = h(p)$, gdy p jest podformułą formuły φ
  - $h'(p) = \mathbf{1}$, w przeciwnym przypadku.
- Wtedy bowiem $h'(\varphi) = h(\varphi)$, co wynika z definicji operacji w **C**.
- Z konstrukcji modelu $\mathfrak{M}$ wynika, że jeśli formuła φ ma n podformuł, to moc modelu $\mathfrak{M}$ jest mniejsza lub równa $n + 1$
- **Wniosek**. Istnieje efektywna procedura rozstrzygania czy dowolna formuła SCI-języka jest twierdzeniem logicznym SCI. $\square$