Metalogika (14)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Uniwersytet Opolski

Plan wykładu

Ostatni wykład poświęcamy niektórym związkom metalogiki z ***teorią mnogości***. Nie jest to oczywiście żadne systematyczne wprowadzenie w teorię mnogości — takie znajdzie zainteresowany czytelnik w literaturze przedmiotu.

- Zakładamy, że słuchacze mają elementarne wiadomości dotyczące rachunku zbiorów.
- Przedstawiamy wybrane podstawowe wiadomości dotyczące liczb porządkowych i kardynalnych.
- Podajemy krótkie informacje o: uniwersum zbiorów konstruowalnych, metodzie wymuszania, aksjomatach istnienia dużych liczb kardynalnych, aksjomacie determinacji.
- Przytaczamy konsekwencje wybranych twierdzeń metalogicznych dla teorii mnogości.

Plan wykładu

W dzisiejszej prezentacji stosujemy wiele uproszczeń: pomijamy dowody twierdzeń, używamy czasem uproszczonej notacji (np. w przypadku działań na liczbach porządkowych i kardynalnych), itp.

- To już koniec tych wykładów i słuchacze zapewne biegną chyżo myślami raczej ku Wiośnie niż ku ezoterycznym zawiłościom metalogiki i teorii mnogości.
- Trzeba będzie tylko najpierw zdać egzamin.
- To nietrudne: ponad 1500 slajdów tych wykładów przekłada się na ok. 300 stron druku, co podobno filolożki metodą *szybkiego czytania* opanowują w jeden wieczór. [*Czytałam. To było coś o logice.*]
- Skoro nawet mnie udało się zdać (choć nie za pierwszym ani drugim podejściem) *Nauki polityczne* oraz *Przysposobienie obronne*, to wy zdacie *Metalogikę*, wierzę. [*To wiara, nie wynikanie logiczne.*]

Aksjomaty teorii mnogości

Język $L_{\in}$ teorii mnogości to język pierwszego rzędu z jedną stałą pozalogiczną $\in$ (oraz predykatem identyczności $\doteq$). Wyrażenie $x \in y$ czytamy: x jest elementem y.

Aksjomat ekstensjonalności:

$\forall x \forall y \, (\forall z \, (z \in x \equiv z \in y) \rightarrow x \doteq y)$

Ten aksjomat stwierdza, że każdy zbiór jest jednoznacznie wyznaczony poprzez swoje elementy.

Aksjomat pary:

$\forall x \forall y \exists z \forall u \, (u \in z \equiv (u \doteq x \vee u \doteq y))$

To aksjomat gwarantujący istnienie pary nieuporządkowanej.

Aksjomaty teorii mnogości

Aksjomat sumy:

$\forall x \exists y \forall z\, (z \in y \equiv \exists u\, (z \in u \wedge u \in x))$

Aksjomat ten gwarantuje istnienie sumy dowolnej rodziny zbiorów.

Aksjomat zbioru potęgowego:

$\forall x \exists y \forall z\, (z \in y \equiv \forall u (u \in z \rightarrow u \in x))$

Na mocy tego aksjomatu, dla dowolnego zbioru istnieje zbiór złożony dokładnie ze wszystkich jego podzbiorów.

Aksjomaty teorii mnogości

Schemat wyróżniania:

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y \exists z \forall u \, (u \in z \equiv (u \in y \wedge \varphi(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)))$

gdzie φ jest formułą języka teorii mnogości ZF taką, że z nie jest zmienną wolną w φ, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zmiennymi wolnymi formuły φ innymi niż u.

Schemat wyróżniania pozwala z elementów danego wprzódy zbioru utworzyć jego podzbiór, złożony z tych elementów, które mają jakąś własność, wyrażalną w języku (pierwszego rzędu) teorii mnogości. Mamy tu do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale właśnie ze ***schematem*** (przeliczalnie) nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomaty teorii mnogości

Aksjomat nieskończoności:

$\exists x\, (\exists y\, (y \in x \wedge \neg \exists z\, (z \in y)) \wedge \forall y\, (y \in x \rightarrow \forall z (\forall u\, (u \in z \equiv u \doteq y) \rightarrow z \in x)))$

Ten aksjomat stwierdza istnienie (co najmniej jednego) zbioru nieskończonego.

Schemat zastępowania:

$\forall u (\forall x \forall y \forall z\, (x \in u \wedge \varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y \doteq z) \rightarrow \exists w \forall v\, (v \in w \equiv \exists x\, (x \in u \wedge \varphi(x, v))))$

Schemat ten gwarantuje, intuicyjnie mówiąc, że obraz dowolnego zbioru względem jakiejkolwiek funkcji (opisywalnej formułą języka teorii mnogości) także jest zbiorem.

Tu również mamy do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale ze schematem (przeliczalnie) nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomaty teorii mnogości

Aksjomat ufundowania:

$\forall x(\exists u\,(u \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \forall z\,(z \in y \rightarrow \neg z \in x)))$

Aksjomat ufundowania wyklucza istnienie nieskończonych $\in$-zstępujących ciągów zbiorów, tj. takich ciągów $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \rangle$, że:

$$x_2 \in x_1,\ x_3 \in x_2,\ x_4 \in x_3, \ldots$$

Gdy do tego systemu (oznaczanego **ZF**) dołączyć **Aksjomat wyboru**:

$\forall x((\forall y\,(y \in x \rightarrow \exists z\,(z \in y)) \wedge \forall y \forall u\,((y \in x \wedge u \in x) \rightarrow y \doteq u \vee \neg \exists v\,(v \in y \wedge v \in u))) \rightarrow \exists w(\forall y\,(y \in x \rightarrow \exists z\,((z \in y \wedge z \in w) \wedge \forall v\,((v \in y \wedge v \in w) \rightarrow v \doteq z)))))$

to otrzymamy system teorii mnogości nazywany **ZFC**.

Aksjomaty teorii mnogości

Uwaga. Do aksjomatyki teorii ZF należą także ***aksjomaty dla identyczności***:

- $\forall x\, (x \doteq x)$
- $\forall x \forall y\, (x \doteq y \rightarrow y \doteq x)$
- $\forall x \forall y \forall z\, ((x \doteq y \wedge y \doteq z) \rightarrow x \doteq z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\, ((x \doteq y \wedge x \in z) \rightarrow y \in z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\, ((x \doteq y \wedge z \in x) \rightarrow z \in y)$.

Uwaga. Używane tu (np. w komentarzach do schematów wyróżniania i zastępowania) terminy: ***nieskończony*** i ***przeliczalny*** należą do ***metajęzyka***.

Uwaga!

Modele dla teorii ZF powinny być układami o postaci (U, E), gdzie U jest uniwersum (wszystkich) zbiorów, a E interpretacją predykatu $\in$ w U, czyli relacją między elementami uniwersum. Czujny słuchacz zawoła w tym miejscu:

- Po pierwsze, samo U nie może być zbiorem — pamiętam ze szkoły, że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów!
- Po drugie, czy nie mieszamy języka przedmiotowego z metajęzykiem? Przecież o modelach teorii ZF mówimy używając terminów: zbiór, relacja, funkcja, itd.

Ta czujność jest jak najbardziej na miejscu i powinna zostać nagrodzona:

Uwaga!

- Istotnie, w metajęzyku zakładana jest teoria mnogości. Pomieszania języków możemy uniknąć, używając odpowiedniej notacji (a więc m.in. stosując inne symbole dla: ***predykatu*** $\in$ w języku przedmiotowym oraz ***relacji należenia*** w metajęzyku).
- Istotnie, ogół ***wszystkich*** zbiorów nie może sam być zbiorem. Jest tzw. ***klasą*** (właściwą).
- Traktujmy ***klasy*** jako ekstensje formuł języka teorii ZF z jedną zmienną wolną (oraz, ewentualnie, z parametrami).
- To, że klasa wyznaczona przez formułę $\psi(x)$ jest ***zbiorem***, określa warunek: $\exists y \forall z\, (z \in y \equiv \psi(x))$, gdzie y nie jest wolna w ψ.
- Dla przykładu, ***klasa uniwersalna*** V jest wyznaczona przez warunek $x \doteq x$, a ***klasa pusta*** $\emptyset$ przez: $\neg x \doteq x$. Przy tym, $\emptyset$ jest zbiorem, a V jest klasą właściwą (nie jest zbiorem).

Uwaga na $\in$!

- Jeśli $\mathfrak{A} = (A, E)$ jest strukturą taką, że $E =\in^{\mathfrak{A}}$ (tu $\in$ jest predykatem z języka ZF) oraz K jest klasą wyznaczoną przez formułę ψ, to niech: $K^{\mathfrak{A}} = \{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \psi[a]\}$ (tu $\in$ jest relacją należenia w metajęzyku).
- *W $\mathfrak{A} = (A, E)$ prawdziwe jest zdanie „K jest zbiorem" dokładnie wtedy, gdy istnieje $a \in dom(\mathfrak{A})$ taki, że $K^{\mathfrak{A}} = \{b \in dom(\mathfrak{A}) : (b, a) \in E\}$.*

- Zbiór x jest ***przechodni***, gdy dla wszystkich $y \in x$ oraz $z \in y$, $z \in x$.
- Zbiór x jest zatem przechodni, gdy $y \subseteq x$ dla każdego $y \in x$.
- $\mathfrak{A} = (A, E)$ jest ***przechodnią $\in$-strukturą***, gdy A jest przechodni oraz $E = \{(a, b) : a, b \in dom(\mathfrak{A}) \text{ oraz } a \in b\}$.

Uwaga na $\in$!

- *Dla dowolnej przechodniej $\in$-struktury $\mathfrak{A} = (A, E)$ oraz dowolnej klasy K następujące warunki są równoważne:*
  - *W $\mathfrak{A} = (A, E)$ prawdziwe jest zdanie „K jest zbiorem."*
  - *$K^{\mathfrak{A}} \in dom(\mathfrak{A})$.*
- Istotnie, w $\mathfrak{A} = (A, E)$ prawdziwe jest zdanie „K jest zbiorem" dokładnie wtedy, gdy istnieje $a \in dom(\mathfrak{A})$ taki, że: $K^{\mathfrak{A}} = \{b \in dom(\mathfrak{A}) : (b, a) \in E\} = \{b \in dom(\mathfrak{A}) : b \in a\} = \{b : b \in a\} = a$.

- W następnym punkcie przypomnimy niektóre definicje dotyczące liczb porządkowych i kardynalnych stosując zwykłą metajęzykową konwencję pisania o zbiorach.
- Do modeli teorii mnogości i precyzyjnego odróżnienia między językiem przedmiotowym a metajęzykiem wrócimy później.

Równoliczność

- Jeśli zbiory X i Y są ***równoliczne*** (czyli gdy istnieje bijekcja z X na Y), to piszemy: $|X| = |Y|$.
- Jeśli istnieje iniekcja z X w Y, to piszemy $|X| \leqslant |Y|$.
- Jeśli $|X| \leqslant |Y|$ oraz nie zachodzi $|X| = |Y|$, to piszemy $|X| < |Y|$.

- Zbiory X i Y są ***tej samej mocy***, gdy są równoliczne, czyli gdy $|X| = |Y|$.
- Zbiór X jest ***mocy niewiększej niż*** zbiór Y, gdy $|X| \leqslant |Y|$.
- Zbiór X jest ***mocy mniejszej niż*** zbiór Y, gdy $|X| < |Y|$.

Uwaga. To tylko ***sposób mówienia*** (o relacjach między zbiorami). Nie zdefiniowaliśmy jeszcze, czym są ***moce*** zbiorów.

Równoliczność

Dla dowolnych zbiorów A, B, C, D:

- Jeśli $|A| = |B|$, $|C| = |D|$ oraz $A \cap B = \emptyset = C \cap D$, to $|A \cup B| = |C \cup D|$.
- Jeśli $|A| = |B|$, to $|\wp(A)| = |\wp(B)|$.
- $|\wp(A)| = |\{0,1\}^A|$ (przypominamy, że Y^X to zbiór wszystkich funkcji z X w Y).
- Jeśli $|A| = |C|$ i $|B| = |D|$, to $|A^B| = |C^D|$.
- Jeśli $B \cap C = \emptyset$, to dla dowolnego A: $|A^{B \cup C}| = |A^B \times A^C|$.
- $(|A^B)^C| = |A^{B \times C}|$.
- $|A| < |\wp(A)|$.

Uwaga! Aksjomaty teorii mnogości ZF nie rozstrzygają, czy z tego, że $|A| < |B|$ wynika, iż $|\wp(A)| < |\wp(B)|$.

Równoliczność

- **Twierdzenie Cantora.** *Dla każdego* X: $|X| < |\wp(X)|$.
- **Twierdzenie Cantora-Bernsteina-Schrödera.** *Jeśli* $|A| \leqslant |B|$ *oraz* $|B| \leqslant |A|$, *to* $|A| = |B|$.

- Dla dowolnego zbioru X niech $\varsigma(X) = X \cup \{X\}$.
- Niech $\omega = \bigcap\{X : \emptyset \in X \text{ oraz } \forall x\, (x \in X \to \varsigma(x) \in X)\}$.
- Jeśli $|X| = |\omega|$, to mówimy, że X jest ***przeliczalny***.
- Jeśli $|X| = |\wp(\omega)|$, to mówimy, że X jest ***mocy kontinuum***.
- Jeśli $|\omega| < |X|$, to mówimy, że X jest ***nieprzeliczalny***.

- Skończony produkt zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny.
- Suma przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.

Definicje nieskończoności

Definicja Dedekinda. Zbiór jest ***nieskończony***, gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. W przeciwnym przypadku jest ***skończony***.

Definicja Tarskiego. Zbiór jest ***skończony***, gdy każdy $\subseteq$-łańcuch (czyli rodzina zbiorów liniowo uporządkowana przez inkluzję) w rodzinie jego podzbiorów jest domknięty na kres górny. W przeciwnym przypadku jest ***nieskończony***. Np. ciąg zbiorów: $\{\{k : k \leqslant n\} : n \geqslant 0\}$ nie jest domknięty na kres górny; kresem górnym (względem porządku $\subseteq$) tego ciągu jest jego teoriomnogościowa suma, a nie jest ona jednym z elementów tego ciągu.

Definicje nieskończoności

X jest ***skończony***, gdy istnieje $Y \in \omega$ taki, że $|X| = |Y|$. W przeciwnym przypadku jest ***nieskończony***.

- Inne jeszcze definicje podali np.: Frege (z użyciem logiki drugiego rzędu), Zermelo oraz von Neumann (z użyciem operacji ς).
- Dowodzi się równoważności tych definicji (korzystając z aksjomatu wyboru).

- Dla każdego zbioru X, przekrój rodziny wszystkich zbiorów przechodnich zawierających X nazywamy ***przechodnim domknięciem*** X i oznaczamy $TC(X)$.
- Zbiór X jest ***dziedzicznie skończony***, gdy $TC(X)$ jest skończony.

Definicje nieskończoności

Iteracje operacji ς określamy indukcyjnie:

- $\varsigma^0(X) = X$
- $\varsigma^1(X) = \varsigma(X)$
- $\varsigma^{n+1}(X) = \varsigma(\varsigma^n(X))$.

- $\varsigma^0(\emptyset) = \emptyset$
- $\varsigma^1(\emptyset) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$,
- $\varsigma^2(\emptyset) = \varsigma(\varsigma^1(\emptyset)) = \varsigma(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- $\varsigma^3(\emptyset) = \varsigma(\varsigma^2(\emptyset)) = \varsigma(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
- ...

Definicje nieskończoności

- Wprowadźmy ***oznaczenia***:
  $0 = \varsigma^0(\emptyset) = \emptyset$,
  $1 = \varsigma^1(0) = \varsigma^1(\emptyset) = \{\emptyset\}$,
  $2 = \varsigma(1) = \varsigma^2(0) = \varsigma^2(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
  $3 = \varsigma(2) = \varsigma^3(0) = \varsigma^3(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$
- Wtedy: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, $\ldots$ (każdy element tego ciągu jest zbiorem, którego elementami są wszystkie poprzednie wyrazy tego ciągu).

- Otrzymujemy rodzinę zbiorów $0, 1, 2, 3, \ldots$, które możemy identyfikować z ***liczbami naturalnymi***.
- Zachodzi równość: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \omega$.
- Nadto, rodzina ta jest ***dobrze uporządkowana*** przez relację $\in$. ***Definiujemy***: $m < n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in n$, dla $m, n \in \omega$.

Liczby porządkowe

- ***Liczbą porządkową*** nazywamy każdy zbiór przechodni, którego każdy element też jest zbiorem przechodnim. Tradycyjnie, liczby porządkowe oznaczamy małymi literami greckimi. *Ord* to klasa wszystkich liczb porządkowych. Dla liczb porządkowych τ, σ piszemy:
  - $\tau < \sigma$, gdy $\tau \in \sigma$
  - $\tau \leqslant \sigma$, gdy $\tau \in \varsigma(\sigma)$.
- Klasa *Ord* jest dobrze uporządkowana przez $<$.
- ω i każdy jego element jest liczbą porządkową.

- σ jest ***liczbą porządkową następnikową***, gdy istnieje τ taki, że $\sigma = \varsigma(\tau)$.
- σ jest ***liczbą porządkową graniczną***, gdy $\sigma \neq 0$ oraz dla wszystkich τ: jeśli $\tau < \sigma$, to $\varsigma(\tau) < \sigma$.

Liczby porządkowe

- Liczba porządkowa ω jest graniczna. Każdy jej element jest liczbą porządkową następnikową.
- $\varsigma^1(\omega) = \varsigma(\omega) = \omega \cup \{\omega\}$ jest liczbą następnikową. Podobnie $\varsigma^2(\omega)$, $\varsigma^3(\omega)$, ...
- Liczba porządkowa α jest graniczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = \bigcup \alpha$.

- Niech ω_1 będzie $<$-najmniejszą nieprzeliczalną liczbą porządkową. Wtedy zbiór: $\{\beta : \omega < \beta < \omega_1\}$ wszystkich przeliczalnych liczb porządkowych jest nieprzeliczalny. Każdy element tego zbioru jest zbiorem przeliczalnym.
- ω_1 jest liczbą porządkową graniczną.

Liczby porządkowe

- **Zasada indukcji pozaskończonej**. *Niech φ będzie dowolną formułą języka teorii mnogości ZF. Jeśli dla każdej liczby porządkowej α oraz wszystkich $\beta \in \alpha$, formuła $\varphi(\beta)$ implikuje formułę $\varphi(\alpha)$, to dla wszystkich liczb porządkowych α zachodzi $\varphi(\alpha)$.*

- **Twierdzenie o rekursji pozaskończonej**. *Niech ψ będzie formułą taką, że dla każdego x istnieje dokładnie jeden y taki, że $\psi(x, y)$. Wtedy: dla każdej liczby porządkowej α istnieje dokładnie jedna funkcja f o dziedzinie α taka, że dla wszystkich $\beta \in \alpha$ zachodzi $\psi(f \upharpoonright \beta, f(\beta))$.*

Powyższe dwa twierdzenia umożliwiają poprawne zdefiniowanie działań dodawania $+$ i mnożenia $\cdot$ liczb porządkowych (tu 0 oznacza $\emptyset$):

Liczby porządkowe

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
- $\alpha + \lambda = \bigcup \{\alpha + \beta : \beta < \lambda\}$ dla λ granicznych;

- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
- $\alpha \cdot \lambda = \bigcup \{\alpha \cdot \beta : \beta < \lambda\}$ dla λ granicznych.

Mamy np.: $1 + \omega = \omega < \omega + 1$ oraz $2 \cdot \omega = \omega < \omega \cdot 2 = \omega + \omega < \omega \cdot \omega$. Dodawanie i mnożenie liczb porządkowych są operacjami łącznymi, ale żadna z nich nie jest przemienna.

Liczby kardynalne

- α jest ***liczbą kardynalną***, gdy jest liczbą porządkową i $|\beta| < |\alpha|$ dla wszystkich $\beta \in \alpha$. Liczby porządkowe α o tej własności nazywane są także ***początkowymi liczbami porządkowymi***.
- Jeśli α jest nieskończoną liczbą kardynalną, to α jest graniczną liczbą porządkową.
- Nie każda liczba porządkowa jest liczbą kardynalną. Dla przykładu, liczby porządkowe $\omega + \omega$ oraz $\omega \cdot \omega$ nie są liczbami kardynalnymi.

- Liczby porządkowe ω oraz ω_1 są liczbami kardynalnymi. Żadna liczba porządkowa α taka, że $\omega < \alpha < \omega_1$ nie jest liczbą kardynalną.
- Każdy element zbioru ω jest liczbą kardynalną.

Liczby kardynalne

Przez indukcję pozaskończoną definiujemy ***hierarchię kumulatywną zbiorów V***:

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$
- $V_\lambda = \bigcup\{V_\beta : \beta < \lambda\}$ dla λ granicznych.

- Każdy zbiór V_α jest przechodni. Częścią wspólną klasy *Ord* oraz V_α jest α. V_ω to rodzina zbiorów dziedzicznie skończonych.
- Jeśli $\alpha \leqslant \beta$, to $V_\alpha \subseteq V_\beta$. Dla każdej α: $V_\alpha \in V_{\alpha+1}$.
- Dla każdego zbioru X istnieje liczba porządkowa α taka, że $X \in V_\alpha$. Najmniejszą liczbę porządkową α taką, że $X \in V_{\alpha+1}$ nazywamy ***rangą*** zbioru X i oznaczamy przez $\mathrm{rank}(X)$.
- $V_\alpha = \{X : \mathrm{rank}(X) < \alpha\}$.

Liczby kardynalne

- Dla każdego zbioru X istnieje liczba porządkowa α taka, że: nie istnieje iniekcja $f : \alpha \to X$.
- Dla dowolnego zbioru X niech: $H(X)$ = ***liczba Hartogsa zbioru*** X = $<$-najmniejsza liczba porządkowa α taka, że nie istnieje iniekcja $f : \alpha \to X$.

Przez indukcję pozaskończoną definiujemy ***skalę alefów***:

- $\aleph_0 = \omega$
- $\aleph_{\alpha+1} = H(\aleph_\alpha)$
- $\aleph_\lambda = \bigcup\{\aleph_\beta : \beta < \lambda\}$ dla λ granicznych.

Alefy tworzą ciąg ***pozaskończony***:
$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2} < \ldots \aleph_{\omega+\omega} < \ldots$

Liczby kardynalne

- Dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej κ istnieje liczba porządkowa α taka, że $\kappa = \aleph_\alpha$.
- Dla każdego zbioru X istnieje dokładnie jedna liczba kardynalna κ taka, że $|X| = |\kappa|$. Nazywamy ją ***mocą zbioru** X*. Gdy $|X| = |\kappa|$, to ***piszemy** $|X| = \kappa$* (lub $\kappa = |X|$).

Dodawanie, mnożenie i potęgowanie liczb kardynalnych definiujemy następująco:

- $\kappa + \lambda = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$
- $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$
- $\kappa^\lambda = |\kappa^\lambda|$.

Jeśli κ i λ są nieskończonymi liczbami kardynalnymi, to $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

Liczby kardynalne

Niektóre własności działań na liczbach kardynalnych:

- Jeśli $\kappa \leqslant \lambda$, to:
  - $\kappa + \mu \leqslant \lambda + \mu$
  - $\kappa \cdot \mu \leqslant \lambda \cdot \mu$
  - $\kappa^{\mu} \leqslant \lambda^{\mu}$
  - $\mu^{\kappa} \leqslant \mu^{\lambda}$.
- $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$
- $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$
- $\kappa^{\lambda + \mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$.

- Liczbę $2^{\aleph_0}$ nazywamy ***kontinuum*** i oznaczamy przez $\mathfrak{c}$. Liczba kardynalna $\mathfrak{c}$ jest nieprzeliczalna.

Liczby kardynalne

- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^n = \aleph_0$, dla wszystkich $n \in \omega$.
- $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, dla wszystkich $n \in \omega$.

- Liczby $\aleph_0$ oraz $\mathfrak{c}$ to nieskończone liczby kardynalne najczęściej używane w praktyce matematycznej.
- Moc $\aleph_0$ mają zbiory:
  - wszystkich liczb naturalnych,
  - wszystkich liczb całkowitych,
  - wszystkich liczb wymiernych.
- Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych ma moc kontinuum, podobnie jak zbiór wszystkich liczb zespolonych.
- Żaden zbiór mocy kontinuum nie jest sumą przeliczalnie wielu swoich podzbiorów mocy mniejszej niż kontinuum.

Liczby kardynalne

Definiujemy dowolne sumy oraz iloczyny liczb kardynalnych:

- $\sum\limits_{i \in I} \kappa_i = |\bigcup\limits_{i \in I} (\kappa_i \times \{i\})|$
- $\prod\limits_{i \in I} \kappa_i = |\prod\limits_{i \in I} \kappa_i|$.

- **Twierdzenie Königa**. *Jeśli $\lambda_i < \kappa_i$ dla wszystkich $i \in I$, to:*

$$\sum_{i \in I} \lambda_i < \prod_{i \in I} \kappa_i.$$

Liczby kardynalne

- ***Współkończowością*** liczby kardynalnej κ nazywamy najmniejszą liczbę porządkową α taką, że: istnieje funkcja $f : \alpha \to \kappa$ taka, że dla każdej $\beta < \kappa$ istnieje $\gamma < \alpha$ taka, że $\beta < f(\gamma)$. Współkończowość κ oznaczamy przez $cf(\kappa)$.
- Niech $\kappa^+ = H(\kappa)$. Wtedy κ^+ jest $<$-najmniejszą liczbą kardynalną $<$-większą od κ. Liczby kardynalne o postaci κ^+ nazywamy ***następnikowymi***.
- Mówimy, że nieskończona liczba kardynalna κ jest ***regularna***, gdy $\kappa = cf(\kappa)$. Liczby kardynalne, które nie są regularne, nazywamy ***singularnymi***.

- Na mocy definicji, $cf(\kappa)$ jest najmniejszą liczbą kardynalną λ taką, że zbiór mocy κ jest sumą λ swoich podzbiorów.
- Mamy np.: $cf(\aleph_0) = cf(\aleph_\omega) = cf(\aleph_{\omega+\omega}) = cf(\aleph_{\omega^\omega}) = \aleph_0$.

Liczby kardynalne

- Jeśli $2 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$ i $\omega \leqslant \kappa$, to $\lambda^\kappa = 2^\kappa$.
- **König**. Jeśli κ jest nieskończona, to:
  - $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)})$
  - $\kappa < cf(2^\kappa)$.
- W szczególności: $\aleph_0 < cf(2^{\aleph_0})$.
- **Hausdorff**. Jeśli $\omega \leqslant \kappa$ i $2 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$, to $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda$.

- Liczba κ jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna suma mniej niż κ zbiorów mocy mniejszej niż κ ma moc mniejszą niż κ.
- Liczba $\aleph_0$ jest regularna. Każda liczba postaci $\aleph_{\alpha+1}$ jest regularna. Każda liczba postaci κ^+ jest regularna (dla nieskończonych κ).

Liczby kardynalne

- Jeśli κ jest nieskończona, to $cf(\kappa)$ jest regularna: $cf(cf(\kappa)) = \kappa$.
- Liczby $\aleph_\omega$ oraz $\aleph_{\omega_1}$ nie są regularne: $cf(\aleph_\omega) = \aleph_0 < \aleph_\omega$, $cf(\aleph_{\omega_1}) = \aleph_1 < \aleph_{\omega_1}$.
- $cf(\aleph_{\aleph_{\alpha+1}}) = \aleph_{\alpha+1}$.
- $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ dla każdej liczby porządkowej α.

- Mówimy, że liczba kardynalna κ jest ***graniczna***, gdy κ jest nieprzeliczalna oraz $\lambda^+ < \kappa$ dla wszystkich $\lambda < \kappa$.
- **Uwaga**. „Graniczna liczba kardynalna" i „graniczna liczba porządkowa" to dwa różne pojęcia.
- $\aleph_\alpha$ jest graniczną liczbą kardynalną wtedy i tylko wtedy, gdy α jest graniczną liczbą porządkową.

Liczby kardynalne

- κ jest ***słabo nieosiągalna***, gdy κ jest regularną graniczną liczbą kardynalną.
- κ jest ***mocno nieosiągalna*** (krótko: ***nieosiągalna***), gdy κ jest słabo nieosiągalna i $2^\lambda < \kappa$ dla wszystkich $\lambda < \kappa$.

- κ jest słabo nieosiągalna wtedy i tylko wtedy, gdy: $\aleph_0 < \kappa$, $cf(\kappa) = \kappa$ oraz $\lambda^+ < \kappa$ dla wszystkich $\lambda < \kappa$.
- Jeśli κ jest mocno nieosiągalna, to $\kappa = \aleph_\kappa$.
- Jeśli κ jest mocno nieosiągalna, to w strukturze $(V_\kappa, \in)$ prawdziwe są wszystkie aksjomaty teorii mnogości ZF.
- Jeśli ZF jest niesprzeczna, to w ZF nie można udowodnić zdania: „Istnieją liczby mocno nieosiągalne."

Potęgowanie liczb kardynalnych

- **Hipoteza Kontinuum (CH):**

$$\aleph_1 = \mathfrak{c}.$$

- **Uogólniona Hipoteza Kontinuum (GCH):**

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha},$$

dla każdej liczby porządkowej α.

- **Gödel.** *Jeśli ZF jest niesprzeczna, to* $ZF \cup \{GCH\}$ *jest niesprzeczna.*
- **Cohen.** *Jeśli ZF jest niesprzeczna, to* $ZF \cup \{\neg GCH\}$ *jest niesprzeczna.*

Potęgowanie liczb kardynalnych

Tarski. *Niech κ będzie graniczną liczbą kardynalną oraz niech $1 \leqslant \lambda < cf(\kappa)$. Wtedy:*

$$\kappa^{\lambda} = \sum_{\mu<\kappa} \mu^{\lambda}.$$

Załóżmy, że prawdziwa jest GCH. Dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ oraz dowolnej liczby kardynalnej $0 < \lambda$:

- $\kappa^{\lambda} = \kappa$, jeśli $\lambda < cf(\kappa)$
- $\kappa^{\lambda} = \kappa^{+}$, jeśli $cf(\kappa) \leqslant \lambda < \kappa$
- $\kappa^{\lambda} = \lambda^{+}$, jeśli $\kappa \leqslant \lambda$.

Niezupełność teorii mnogości

- Dla formuły ψ oraz predykatu 1-argumentowego M przez $\psi^{(M)}$ rozumiemy formułę ψ, w której wszystkie kwantyfikatory zostały zrelatywizowane do M.
- Jeśli T jest teorią w języku L, to $T^{(M)}$ jest teorią w języku $L \cup \{M\}$, wyznaczoną przez $\{\psi^{(M)} : \psi \in T\}$.
- Teoria T_1 jest interpretowalna w teorii L_2, gdy istnieje skończone rozszerzenie T_2' przez definicje teorii T_2 takie, że $T_1^{(M)} \subseteq T_2'$ dla pewnego predykatu 1-argumentowego M spoza języków teorii T_1 i T_2.

- Dla każdej teorii T w języku L oraz dowolnej struktury $(\mathfrak{A}, M^{\mathfrak{A}})$ dla języka $L \cup \{M\}$, jeśli $(\mathfrak{A}, M^{\mathfrak{A}}) \models T^{(M)}$, to $M^{\mathfrak{A}}$ jest uniwersum jednoznacznie wyznaczonej struktury $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$ takiej, że $\mathfrak{M} \models T$.

Niezupełność teorii mnogości

- Jeśli T_1 jest interpretowalna w T_2 oraz T_2 jest niesprzeczna, to T_1 jest niesprzeczna.
- Arytmetyka PA jest interpretowalna w ZF.
- ZF oraz ZFC są rekurencyjnie aksjomatyzowalne.
- W konsekwencji, otrzymujemy:

  I Twierdzenie o Niezupełności ZF.
  Dla każdej teorii w języku $L_{\in}$ takiej, że $T \cup ZF$ jest niesprzeczna:

  - *T jest nierozstrzygalna.*
  - *Jeśli T jest rekurencyjnie aksjomatyzowalna, to T jest niezupełna.*

- Teoria modelu standardowego arytmetyki PA nie jest interpretowalna w ZF.
- $ZF \vdash Con_{PA}^{(\omega)}$.

Modele ZF

Na razie znamy tylko modele teorii mnogości o postaci $(V_\alpha, \in)$, gdzie α jest liczbą mocno nieosiągalną (której istnienia w ZF dowieść nie można). Czy istnieją inne jeszcze modele ZF? I co właściwie znaczy „istnieją" w tym kontekście? Czy można ich istnienie udowodnić w ZF?

- Wszystkie pojęcia (syntaktyczne i semantyczne) związane z językami pierwszego rzędu możemy reprezentować w ZF, czyli traktować języki pierwszego rzędu i wspomniane pojęcia jako konstrukcje mnogościowe. Proszę przypomnieć sobie, jak kodowaliśmy w arytmetyce PA jej język. Tu sytuacja jest podobna, choć są też różnice: jeśli $\mathfrak{A}$ jest modelem ZF, to zbiór tak reprezentowanych formuł ZF w modelu $\mathfrak{A}$ będzie zawierał też pewne „formuły" niestandardowe. Pomijamy precyzyjny opis.

Modele ZF

- Mówimy, że klasa M jest ***modelem-klasą*** ZF, gdy $ZF \vdash \psi^{(M)}$ dla wszystkich aksjomatów ψ teorii ZF.
- Jeśli M jest modelem-klasą oraz $ZF \vdash$ „M jest zbiorem", to M jest ***modelem-zbiorem*** teorii ZF.

- Jeśli M jest klasą, a F operacją, która każdemu x przyporządkowuje klasę tych wszystkich z dla których $\psi(x, z)$, to niech $F^M(x)$ będzie klasą tych wszystkich $z \in M$, dla których $\psi^{(M)}(x, z)$.
- Dla przykładu:
  - $\bigcup^M(x) = \bigcup x$
  - $\wp^M(x) = \wp(x) \cap M$
  - $Ord^M = Ord \cap M$.
- $\exists^M x\psi$ to skrót dla $\exists x(x \in M \wedge \psi)$, a $\forall^M x\psi$ dla $\forall x(x \in M \rightarrow \psi)$.

Modele ZF

- Operacja F jest ***absolutna ze względu na elementy*** M dokładnie wtedy, gdy $\forall^M x\, (F^M(x) \doteq F(x) \cap M)$.
- Operacja F jest M***-absolutna***, dokładnie wtedy, gdy $\forall^M x\, (F^M(x) \doteq F(x))$.
- Dla przykładu, dla dowolnej klasy przechodniej M: $\emptyset$, $\{\}$, ς, $\bigcup$ są M-absolutne, natomiast $\wp$ oraz Ord są M-absolutne ze względu na elementy M.

- Jeśli F jest operacją, która każdemu x przyporządkowuje klasę tych wszystkich z dla których $\psi(x, z)$, to niech $F^u = \{z \in u : \psi^{(u)}(x, z)\}$, gdzie u jest zbiorem.
- Mówimy, że J jest ***słabą operacją zbioru potęgowego***, gdy dla wszystkich u: $J(u) \subseteq \wp(u)$ oraz
  - $F^u(x_1, \ldots, x_k) \in J(u)$ dla wszystkich operacji F (na klasach).

Modele ZF

- Mówimy, że klasa M jest ***uniwersum***, gdy istnieje słaba operacja zbioru potęgowego J taka, że:
  - $M_0 = \emptyset$
  - $M_{\sigma+1} = J(M_\sigma)$
  - $M_\sigma = \bigcup\{M_\tau : \tau < \sigma\}$ dla σ granicznych
  - M jest sumą wszystkich M_σ, dla $\sigma \in Ord$.
- Dla przykładu: V jest uniwersum, $\wp$ jest słabą operacją zbioru potęgowego.

- Jeśli M, N są klasami, $M \subseteq N$, ψ jest formułą o zmiennych wolnych $x_1, \ldots, x_n$, to ψ jest (M, N)-***absolutna***, gdy: $\forall^M x_1 \ldots \forall^M x_n\ (\psi^{(M)}(x_1, \ldots, x_n) \equiv \psi^{(N)}(x_1, \ldots, x_n))$.
- ψ jest M-***absolutna***, gdy jest (M, V)-absolutna.

Modele ZF

- **Zasada Odbicia.** *Dla każdego uniwersum M oraz formuły ψ: dla każdej σ istnieje $\tau \geqslant \sigma$ taka, że ψ jest (M_τ, M)-absolutna.*
- **Twierdzenie o Uniwersum.** *Każde uniwersum M jest przechodnim modelem-klasą dla ZF takim, że $Ord \subseteq M$.*

- **II Twierdzenie o Niezupełności.** *Dla każdej niesprzecznej, rekurencyjnie aksjomatyzowalnej teorii T takiej, że $ZF \subseteq T$: T non $\vdash Con_T$. W szczególności, ZF non $\vdash Con_{ZF}$.*
- Mówimy, że zbiór b jest ***ekstensjonalny***, gdy $\forall x, y \in b\, (x \cap b \doteq y \cap b \rightarrow x \doteq y)$.
- **Twierdzenie Mostowskiego o Kontrakcji.** *Dla każdego zbioru ekstensjonalnego b oraz każdego przechodniego $c \subseteq b$: $\exists a \exists f\, (c \subseteq a \wedge a$ przechodni $\wedge (b, \in_b) \cong_f (a, \in_a) \wedge \forall x \in c\, (f(x) = x))$.*

Modele ZF

Bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia Mostowskiego o Kontrakcji oraz Twierdzenia Löwenheima-Skolema jest:

Twierdzenie o Modelu Przechodnim. *Na gruncie ZFC, dla każdej* $L_{\in}$*-formuły* $\psi(x)$*:*

$\forall w$ *(w jest nieskończony i przechodni* $\rightarrow$
$\exists a\, (w \subseteq a \wedge |a| \doteq |w| \wedge a$ *jest przechodni* $\wedge \forall x \in w\, (\psi(x) \equiv \psi^{(a)}(x)))).$

W szczególności, dla dowolnego zdania ψ*, jeśli* $ZFC \vdash \psi$*, to*
$ZFC \vdash \forall \tau \geqslant \omega \exists a\, (\tau \subseteq a \wedge |a| \doteq |\tau| \wedge a$ *jest przechodni* $\wedge\, \psi^{(a)})$*.*

Uniwersum zbiorów konstruowalnych

- Kurt Gödel podał przykład klasy L (zbiorów ***konstruowalnych***) takiej, że:
  1. L jest uniwersum, a więc modelem-klasą dla ZF.
  2. $ZF \vdash AC^{(L)} \wedge GCH^{(L)}$.
- W konsekwencji: jeśli ZF niesprzeczna, to $ZF \cup \{AC, GCH\}$ jest niesprzeczna.

Dla dowodu 2 powyżej pokazuje się, że:

- L jest absolutna dla każdego uniwersum, więc także dla L.
- $ZF \vdash (V \doteq L)^{(L)}$.
- $ZF \cup \{V \doteq L\} \vdash AC \wedge GCH$.

Uwaga. Nie myl klasy L z językiem $L_{\in}$.

Uniwersum zbiorów konstruowalnych

- W konstrukcji klasy L wykorzystuje się (najmniejszą z możliwych) słabą operację zbioru potęgowego $\wp_{def}$.
- Jeśli F jest operacją przyporządkowującą elementowi x klasę wszystkich z takich, że $\psi(x, z)$, gdzie ψ jest dowolną formułą języka ZF (o dwóch zmiennych wolnych), to dla każdego $x \in u$ zbiór $\wp_{def}(u)$ zawiera jako element $F^u(x) = \{z \in u : \psi^{(u)}(z, x)\} = \{z \in u : (u, \in_u) \models \psi[z, x]\}$.
- Intuicyjnie: $\wp_{def}(u)$ to rodzina wszystkich podzbiorów u definiowalnych (z parametrami) formułami języka teorii mnogości.

- Na mocy Twierdzenia Cantora, moc rodziny ***wszystkich*** podzbiorów zbioru przeliczalnego jest nieprzeliczalna.
- Formuł języka teorii mnogości jest przeliczalnie wiele, więc operacja $\wp_{def}$ jest różna od $\wp$.

Uniwersum zbiorów konstruowalnych

- Definiujemy operację $\wp_{def}$: $\wp_{def}(u) = \{def(u, y, \alpha)$: y jest formułą $L_{\in}$, α jest wartościowaniem w $u\}$, gdzie: $def(u, y, \alpha) = \{z \in u : (u, \in_u) \models y[\alpha^z_{x_1}]\}$, a $\alpha^z_{x_1}$ to wartościowanie przyporządkowujące zmiennej x_1 wartość z; tutaj y jest teoriomnogościową reprezentacją formuły języka teorii ZF.
- Wtedy: $\wp_{def}$ jest słabą operacją zbioru potęgowego.

W konsekwencji, klasa L jest uniwersum; L definiujemy następująco:

- $L_0 = \emptyset$
- $L_{\sigma+1} = \wp_{def}(L_\sigma)$
- $L_\sigma = \bigcup\{L_\tau : \tau < \sigma\}$ dla σ granicznych
- L jest sumą wszystkich L_σ, dla $\sigma \in Ord$.

Uniwersum zbiorów konstruowalnych

- Na mocy Twierdzenia o Uniwersum, L jest przechodnim modelem-klasą dla ZF takim, że $Ord \subseteq L$.
- Dowodzi się, że: L jest L-absolutna oraz $ZF \vdash (V \doteq L)^{(L)}$.

- Niech ZFL będzie teorią generowaną przez $ZF \cup \{V \doteq L\}$.
- Jeśli ZF jest niesprzeczna, to ZFL jest niesprzeczna.
- Dla dowolnego zdania ψ jezyka teorii mnogości: jeśli $ZFL \vdash \psi$, to $ZF \vdash \psi^{(L)}$, czyli L jest modelem-klasą dla ZFL w ZF. Mówimy, że L jest ***modelem wewnętrznym*** teorii mnogości ZF.

Uniwersum zbiorów konstruowalnych

- Dla dowodu, że $ZFL \vdash AC$ definiuje się pewną globalną funkcję wyboru, korzystając z faktu, iż w L można wprowadzić dobry porządek (który z kolei jest wyznaczony przez dobre uporządkowanie wyrażeń rozważanego języka).
- Skoro $ZFL \vdash AC$, to $ZF \vdash AC^{(L)}$.

- Na gruncie ZFL dowodzi się, że dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ zachodzi: $\forall \sigma < \kappa^+ \ \wp(L_\sigma) \subseteq L_{\kappa^+}$.
- Fakt powyższy, łącznie z Twierdzeniem Mostowskiego o Kontrakcji pozwala z kolei na pokazanie, że $ZFL \vdash GCH$, a więc że $ZF \vdash GCH^{(L)}$.
- Tak więc, jeśli ZF jest niesprzeczna, to $ZF \cup \{AC, GCH\}$ jest niesprzeczna.

Wymuszanie

- Paul Cohen zastosował metodę ***wymuszania*** (ang.: ***forcing***, co czasem oddaje się w polskiej literaturze terminem ***forsing***) dla pokazania, że:

  (1) Jeśli ZF jest niesprzeczna, to $ZF \cup \{\neg CH\}$ jest niesprzeczna.
- **Uwaga.** Nie istnieje model-klasa (właściwa) M taki, że $ZFC \vdash (\neg CH)^{(M)}$.

- W tej wersji niniejszej prezentacji nie opiszemy (klasycznej) metody wymuszania nawet w grubym przybliżeniu. Podamy jedynie kilka faktów jej dotyczących, za monografią Hinman 2005, 577–605.
- Zainteresowany czytelnik zechce skorzystać ze stosownej literatury przedmiotu. Obecnie wykorzystuje się wiele wersji metody wymuszania, m.in. tzw. ***Boolean forcing***.

Wymuszanie

Dla dowodu (1) buduje się teorię ZFL_M taką, że:

- (2) Jeśli ZF jest niesprzeczna, to ZFL_M jest niesprzeczna.
- (3) $ZF \cup \{\neg CH\}$ jest interpretowalna w ZFL_M.

Niech mianowicie $L_{\in}^{M}$ będzie rozszerzeniem języka $L_{\in}$ o stałą M. Teoria ZFL_M to teoria zawierająca:

- wszystkie aksjomaty teorii ZFL
- zdanie mówiące, że M jest przeliczalny i przechodni
- wszystkie zdania $\psi^{(M)}$, gdzie ψ jest aksjomatem ZFL.

Wymuszanie

Pokażemy najpierw szkic dowodu, że jeśli ZF jest niesprzeczna, to ZFL_M jest niesprzeczna, czyli (2).

Dla dowodu nie wprost, przypuśćmy że ZFL_M jest sprzeczna. Istnieje wtedy skończenie wiele aksjomatów $\psi_1, \ldots, \psi_k$ teorii ZFL takich, że:
$ZFL \vdash \neg(M \text{ jest przeliczalny i przechodni } \wedge (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k)^{(M)})$.

Ponieważ $L_\in$-aksjomaty ψ teorii ZFL nie zawierają symbolu M, więc:
$ZFL \vdash \neg\exists a(a \text{ jest przeliczalny i przechodni } \wedge (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k)^{(a)})$.

Stąd, wykorzystując Twierdzenie o Modelu Przechodnim, otrzymujemy, że ZFL jest sprzeczna, a zatem (na mocy ustaleń z poprzedniego punktu) również ZF jest sprzeczna. To jednak przeczy założeniu twierdzenia. Przypuszczenie dowodu nie wprost musimy więc odrzucić i twierdzenie (2) zostało udowodnione.

Wymuszanie

Dla dowodu (3) definiuje się klasę N taką, że twierdzeniami ZFL_M są:

- (4) N jest przeliczalny i przechodni oraz $M \subseteq N$.
- (5) $\psi^{(N)}$, dla każdego $L_{\in}$-aksjomatu ψ teorii ZFC.
- (6) $(\neg CH)^{(N)}$.

Dla dowodu (6) zauważmy, że skoro $ZFL \vdash CH$, to $ZFL_M \vdash CH^{(M)}$, a więc w ZFL_M mamy $(2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1)^{(M)}$, czyli (na mocy twierdzeń o absolutności) istnieje iniekcja $f \in M$ taka, że $f : \wp(\omega) \cap M \rightarrow \aleph_1^M$.
Skoro chcemy pokazać, że nie istnieje iniekcja $f \in N$ taka, że $f : \wp(\omega) \cap N \rightarrow \aleph_1^N$, to trzeba udowodnić, iż:

- (7) Istnieje iniekcja $g \in N$ taka, że $g : \aleph_2^M \rightarrow \wp(\omega) \cap N$.
- (8) $\aleph_2^N \doteq \aleph_2^M$.

Wymuszanie

Wtedy bowiem otrzymamy: $(\aleph_2 \leqslant |\wp(\omega)|)^{(N)}$, czyli $(\aleph_2 \leqslant 2^{\aleph_0})^{(N)}$, co oznacza, iż $(\neg CH)^{(N)}$.
Konstruowany zbiór N będzie zawierał „dużo więcej" podzbiorów zbioru ω niż zawiera ich M, ale „mało" dobrych porządków.
Pojęciem wymuszania jest zwrotny częściowy porządek $\mathbb{P} \doteq (P, \leqslant, \mathbb{I})$ z elementem największym $\mathbb{I}$. Elementy P nazywamy ***warunkami wymuszania***.

Dla dowolnego pojęcia wymuszania $\mathbb{P}$ mówimy, że:

- $G \subseteq P$ jest ***$\mathbb{P}$-filtrem***, gdy:
  - $\forall p, q \in G \exists r \in G \ (r \leqslant p \wedge r \leqslant q)$
  - $\forall p \in G \forall q \ (p \leqslant q \rightarrow q \in G)$.
- $D \subseteq P$ jest ***$\mathbb{P}$-gęsty***, gdy $\forall p \in P \exists q \in D \ (q \leqslant p)$.

Wymuszanie

- Jeśli G jest $\mathbb{P}$-filtrem, a $\mathbb{D}$ rodziną zbiorów $\mathbb{P}$-gęstych, to mówimy, że G jest ***$\mathbb{D}$-generic***, gdy $\forall D \in \mathbb{D}\; D \cap G \neq \emptyset$.
- Nie przyjęło się dobre polskie tłumaczenie tego terminu (np. zgodne ze słownikowym znaczeniem słowa *generic*). Czasami używa się terminu: *generyczny*, który brzmi raczej źle.

Wykorzystamy następującą konstrukcję. Niech $\mathbb{F}(u,v) \doteq (Fin(u,v), \leqslant_{\mathbb{F}}, \emptyset)$, gdzie:

- $Fin(u,v) =$ zbiór funkcji skończonych p o dziedzinie $dom(p)$ zawartej w u oraz zbiorze wartości $rng(p)$ zawartym w v
- $p \leqslant_{\mathbb{F}} q$ dokładnie wtedy, gdy $q \subseteq p$.

Mamy zatem: $p \leqslant_{\mathbb{F}} q$ dokładnie wtedy, gdy $\{f : p \subseteq f\} \subseteq \{f : q \subseteq f\}$. Będziemy zakładać, że zbiór v ma co najmniej dwa elementy.

Wymuszanie

Dla $x \in u$, $y \in v$ oraz $h : u \to v$ następujące zbiory są $\mathbb{F}(u, v)$-gęste:

- $\triangle_x \doteq \{p \in \mathbb{F}(u, v) : x \in dom(p)\}$
- $\nabla^y \doteq \{p \in \mathbb{F}(u, v) : y \in rng(p)\}$
- $\Gamma_h \doteq \{p \in \mathbb{F}(u, v) : \exists z \in dom(p)\ p(z) \neq h(z)\}$.

Dla dowolnej funkcji $f : u \to v$ zbiór $\{p \in \mathbb{F}(u, v) : p \subseteq f\}$ jest $\mathbb{F}$-filtrem. Na odwrót, jeśli G jest $\mathbb{F}$-filtrem, to $f_G = \bigcup G$ jest funkcją (niekoniecznie skończoną) o dziedzinie zawartej w u oraz zbiorze wartości zawartym w v. Zauważmy nadto, że jeśli $\mathbb{D}$ jest rodziną zbiorów $\mathbb{P}$-gęstych oraz G jest $\mathbb{F}$-filtrem $\mathbb{D}$-generic, to:

- Jeśli $\triangle_x \in \mathbb{D}$ dla wszystkich $x \in u$, to $dom(f_g) \doteq u$.
- Jeśli $\nabla^y \in \mathbb{D}$ dla wszystkich $y \in v$, to $rng(f_G) \doteq v$.
- Jeśli $\Gamma_h \in \mathbb{D}$, to $f_G \neq h$.

Wymuszanie

Dla dowolnych $u, v \in M$ niech $\mathbb{D}^{\mathbb{F}}_{M}(u, v)$ będzie zbiorem wszystkich $D \subseteq Fin(u, v)$ takich, że:

- D jest $\mathbb{F}(u, v)$-gęsty
- $D \in M$.

Wtedy dla wszystkich $x \in u$, $y \in v$ oraz $h \in M$: $\triangle_x, \nabla^y, \Gamma_h \in \mathbb{D}^{\mathbb{F}}_{M}(u, v)$.

Jeśli więc G jest $\mathbb{D}^{\mathbb{F}}_{M}(u, v)$-generic, to $f_G : u \to v$ jest surjekcją, która ***nie*** należy do M. Ponieważ M jest modelem-zbiorem dla ZF, więc wtedy $G \notin M$.
Jeśli więc G jest $\mathbb{D}^{\mathbb{F}}_{M}(\omega, 2)$-generic, to f_G jest funkcją charakterystyczną jakiegoś zbioru $z \subseteq \omega$. Ponieważ f_G jest definiowalna w terminach z, a M jest modelem-zbiorem dla ZFC, więc $z \notin M$.

Wymuszanie

Jeśli zatem N jest klasą taką, że:

- (9) $M \subseteq N$, N jest przechodnim modelem ZFC oraz $G \in N$,

to $\wp(\omega) \cap M$ jest właściwym podzbiorem $\wp(\omega) \cap N$.

Jeśli G jest $\mathbb{D}^{\mathbb{F}}_{M}(\omega, \aleph_1^M)$-generic, to f_G jest surjekcją z ω na $\aleph_1^M$. Tak więc, dla dowolnej klasy N spełniającej (9) przy takim G: $\aleph_1^M$ jest przeliczalna w N, czyli $\aleph_1^M < \aleph_1^N$.

Trzeba teraz pokazać, że istnieją filtry generic.

Wymuszanie

Twierdzenie o Istnieniu Rozszerzeń Generic. *Na gruncie ZFC, dla dowolnego pojęcia wymuszania $\mathbb{P}$, dowolnego $p \in P$ oraz dowolnego przeliczalnego zbioru $\mathbb{D}$ zbiorów $\mathbb{P}$-gęstych istnieje $\mathbb{D}$-generic $\mathbb{P}$-filtr G taki, że $p \in G$.*

Szkic dowodu. Ustalmy wyliczenie $\mathbb{D} = \{D_z : z \in \omega\}$. Na mocy aksjomatu wyboru istnieje funkcja c taka, że dla wszystkich $z \in \omega$ oraz $q \in P$:

- $c(q, z) \in D_z$
- $c(q, z) \leqslant q$.

Definiujemy: $p_0 = p$, $p_{z+1} = c(p_z, z)$.
Wtedy $G = \{q \in P : \exists z \in \omega \; p_z \leqslant q\}$ jest poszukiwanym $\mathbb{P}$-filtrem, który jest $\mathbb{D}$-generic.

Wymuszanie

Ponieważ na gruncie ZF operacja $(u, v) \mapsto \mathbb{D}^{\mathbb{F}}_M(u, v)$ jest M-absolutna, więc jeśli $u, v \in M$, to $\mathbb{D}^{\mathbb{F}}_M(u, v) \in M$. A ponieważ M jest przeliczalny (i przechodni), więc $\mathbb{D}^{\mathbb{F}}_M(u, v)$ jest przeliczalny. Zawsze istnieją więc filtry $\mathbb{D}^{\mathbb{F}}_M(u, v)$-generic.

- ($\dagger$) *Dla dowolnej klasy N, jeśli $M \subseteq N$, N jest przechodnim modelem-zbiorem dla ZFC oraz istnieje $\mathbb{D}^{\mathbb{F}}_M(\aleph_2^M \times \omega, 2)$-generic filtr $G \in N$, to istnieje iniekcja $g \in N$ taka, że $g : \aleph_2^M \to \wp^N(\omega)$.*

Szkic dowodu. Dla wszystkich $\sigma \in \aleph_2^M$ oraz $y \in \omega$, zbiór $\triangle_{\sigma,y} = \{p \in \mathbb{F}(\aleph_2^M \times \omega, 2) : (\sigma, y) \in dom(p)\}$ jest $\mathbb{F}(\aleph_2^M \times \omega, 2)$-gęsty i należy do M.

Wymuszanie

Na mocy własności filtru G mamy więc $G \cap \triangle_{\sigma,y} \neq \emptyset$. Oznacza to, że dziedziną $f_G = \bigcup G$ jest $\aleph_2^M \times \omega$. Dla każdej $\sigma < \aleph_2^M$ niech $g(\sigma) = \{y \in \omega : f_G(\sigma, y) = 1\}$. Dla każdych $\sigma < \tau < \aleph_2^M$ zbiór $D_{\sigma,\tau}$ zdefiniowany jako:

$$\{p \in Fin(\aleph_2^M \times \omega, 2) : \exists y \in \omega \; ((\sigma, y), (\tau, y) \in dom(p) \wedge p(\sigma, y) \neq p(\tau, y))\}$$

jest $\mathbb{F}(\aleph_2^M \times \omega, 2)$-gęsty i należy do M, a więc $G \cap D_{\sigma,\tau} \neq \emptyset$.

Tak więc, dla pewnego $y \in \omega$ mamy: $f_G(\sigma, y) \neq f_G(\tau, y)$, czyli $g(\sigma) \neq g(\tau)$, co oznacza, że g jest iniekcją. Dalej, $g \in N$, ponieważ g jest zdefiniowana w terminach G, a $G \in N$. Z tego mamy: $rng(g) \subseteq \wp^N(\omega)$, co kończy dowód (†).

Wymuszanie

Niech teraz $\mathbb{P} \doteq (P, \leqslant, \mathbb{I})$ będzie ustalonym pojęciem wymuszania w M oraz niech $\mathbb{D}_M = \{D \subseteq P : D \text{ jest } \mathbb{P}\text{-gęsty oraz } D \in M\}$.
Ponieważ M jest przeliczalny, więc $\mathbb{D}_M$ jest przeliczalny. Na mocy Twierdzenia o Istnieniu Rozszerzeń Generic istnieją zatem $\mathbb{P}$-filtry $\mathbb{D}_M$-generic.
Pokażemy, że dla dowolnego $\mathbb{D}_M$-generic $\mathbb{P}$-filtru G istnieje zbiór $M[G]$ taki, iż twierdzeniami ZFL_M są:

- (10) $M \subseteq M[G]$, $M[G]$ jest przeliczalny i przechodni, $G \in M[G]$.
- (11) $\psi^{(M[G])}$ dla każdego $L_\in$-aksjomatu teorii ZFC.

Zauważmy, że wtedy (4) oraz (5) zachodzą dla $N = M[G]$. Ponadto, $M[G]$ jest minimalny, w tym sensie, że jeśli N jest dowolnym modelem-zbiorem dla ZFC, to:

- (12) Jeśli $M \subseteq N$ oraz $G \in N$, to $M[G] \subseteq N$.

Wymuszanie

Każdy element $M[G]$ będzie G-interpretacją a_G pewnej ***nazwy*** $a \in M$. Przy tym, nazwa a jest zbiorem elementów o postaci (b, p), gdzie b jest nazwą oraz $p \in P$. Intuicyjnie rzecz ujmując, $(b, p) \in a$ ma oznaczać, że zbiór o nazwie b należy do zbioru o nazwie a przy dowolnej G-interpretacji, dla której $p \in G$. Nadto, ponieważ $\mathbb{I} \in G$ dla każdego $\mathbb{P}$-filtru G, więc jeśli $(b, \mathbb{I}) \in a$, to $b_G \in a_G$ dla każdego G.

Zbiór $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ wszystkich $\mathbb{P}$-***nazw*** definiujemy jako sumę wszystkich $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}_{\sigma}$, dla $\sigma \in Ord$, gdzie:

- $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}_0 \doteq \emptyset$
- $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}_{\sigma+1} = \wp(\mathbb{N}^{\mathbb{P}}_{\sigma} \times P)$
- $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}_{\sigma} = \bigcup\{\mathbb{N}^{\mathbb{P}}_{\tau} : \tau < \sigma\}$, gdy σ jest graniczna.

Wymuszanie

Operacja $\sigma \mapsto \mathbb{N}^{\mathbb{P}}_{\sigma}$ oraz klasa $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ są absolutne ze względu na elementy M, a więc dla wszystkich $\sigma \in M$:

- $(\mathbb{N}^{\mathbb{P}}_{\sigma})^M \doteq \mathbb{N}^{\mathbb{P}}_{\sigma} \cap M$
- $(\mathbb{N}^{\mathbb{P}})^M \doteq \mathbb{N}^{\mathbb{P}} \cap M \doteq \bigcup\{\mathbb{N}^{\mathbb{P}}_{\sigma} \cap M : \sigma \in M\}$.

Dla dowolnego $\mathbb{D}_M$-generic $\mathbb{P}$-filtru G definiujemy teraz (przez rekursję):

- $a_G = \{b_G : \exists p \in G\ (b, p) \in a\}$
- $M[G] = \{a_G : a \in \mathbb{N}^{\mathbb{P}} \cap M\}$.

Dla dowodu (10) oraz (12) budujemy najpierw tzw. ***nazwy kanoniczne***:

- Dla $x \in M$ niech $\check{x} = \{(\check{y}, \mathbb{I}) : y \in x\}$.
- $\check{G} = \{(\check{p}, p) : p \in P\}$.

Wymuszanie

Zachodzą wtedy następujące fakty, dla dowolnego $\mathbb{D}_M$-generic $\mathbb{P}$-filtru G:

- Dla wszystkich $x \in M$: $(\check{x})_G \doteq x$.
- $(\check{G})_G \doteq G$.
- $M \subseteq M[G]$.
- $G \in M[G]$.
- $M[G]$ jest przeliczalny i przechodni.

Ponadto, dowodzi się również, że:

- Dla dowolnego przechodniego modelu-zbioru N dla ZFC: jeśli $M \subseteq N$ oraz $G \in N$, to $M[G] \subseteq N$.

Wymuszanie

Z kolei, trzeba pokazać (11), czyli że $M[G]$ jest modelem dla ZFC. Dowód w przypadku Aksjomatu Ekstensjonalności oraz Aksjomatu Ufundowania jest oczywisty.

W przypadku pozostałych aksjomatów, trzeba pokazać, że dla każdej operacji F (gdzie F to $\bigcup$, ω, $\wp$ lub obraz H^* dla dowolnej operacji H) w ZFL_M można udowodnić, że $F^{M[G]}$ jest operacją tworzącą zbiory w $M[G]$. Jest to stosunkowo łatwe w przypadku $\bigcup$ oraz ω (czyli dla Aksjomatów: Sumy oraz Nieskończoności).

Natomiast dla Aksjomatów: Zbioru Potęgowego, Zastępowania oraz Wyboru potrzebne jest wykorzystanie faktu, iż G jest $\mathbb{P}$-filtrem $\mathbb{D}_M$-generic oraz posłużenie się pewnym nowym pojęciem.

Wymuszanie

Dla dowolnej $L_\in$-formuły $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ oraz dowolnego $p \in P$ niech $a_1, \ldots, a_k, p \Vdash \psi(a_1, \ldots, a_k)$ będzie koniunkcją następujących warunków:

- $p \in P$
- $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{P}} \cap M$
- $\forall G\ (G$ jest $\mathbb{D}_M$-generic $\wedge\ p \in G\ \rightarrow\ \psi^{(M[G])}((a_1)_G, \ldots, (a_k)_G))$.

Jeśli $a_1, \ldots, a_k, p \Vdash \psi(a_1, \ldots, a_k)$, to mówimy, że p ***wymusza*** $\psi(a_1, \ldots, a_k)$. Ma to odpowiadać następującej intuicji: p zawiera wystarczającą informację dla dowolnego $\mathbb{D}_M$-generic $\mathbb{P}$-filtru G, aby $\psi(a_1, \ldots, a_k)$ była prawdziwa w $M[G]$.

Niech dla dowolnych $a, c \in \mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ oraz $p \in \mathbb{P}$ formuła $c \in_p a$ będzie skrótem dla $\exists r\ (p \leqslant r \wedge (c, r) \in a)$.

Wymuszanie

Oto niektóre własności relacji wymuszania (zwykle po lewej stronie znaku $\Vdash$ piszemy jedynie warunek ze zbioru P):

- Jeśli $q \Vdash \psi(a_1, \ldots, a_k)$ oraz $p \leqslant q$, to $p \Vdash \psi(a_1, \ldots, a_k)$.
- $\mathbb{I} \Vdash \psi(a_1, \ldots, a_k)$ dokładnie wtedy, gdy $p \Vdash \psi(a_1, \ldots, a_k)$ dla wszystkich $p \in P$.
- $p \Vdash a \doteq b$ dokładnie wtedy, gdy $\forall c \forall q \leqslant p\ (c \in_q a \rightarrow q \Vdash c \in B) \wedge \forall d \forall q \leqslant p\ (d \in_q b \rightarrow q \Vdash d \in a)$.
- $p \Vdash a \in b$ dokładnie wtedy, gdy $\forall q \leqslant p \exists r \leqslant q \exists d\ (d \in_r b \wedge r \Vdash c \doteq d)$.
- $p \Vdash \varphi(a) \wedge \psi(a)$ dokładnie wtedy, gdy $p \Vdash \varphi(a)$ oraz $p \Vdash \psi(a)$.
- $p \Vdash \neg\psi(a)$ dokładnie wtedy, gdy $\neg \exists q \leqslant p\ q \Vdash \psi(a)$.
- $p \Vdash \varphi(a) \vee \psi(a)$ dokładnie wtedy, gdy $\forall q \leqslant p \exists r \leqslant q\ (r \Vdash \varphi(a) \vee r \Vdash \psi(a))$.
- $p \Vdash \exists y\ \psi(a, y)$ dokładnie wtedy, gdy $\exists b \in \mathbb{N}^{\mathbb{P}} \cap M\ p \Vdash \psi(a, b)$.
- $p \Vdash \forall y\ \psi(a, y)$ dokładnie wtedy, gdy $\forall b \in \mathbb{N}^{\mathbb{P}} \cap M\ p \Vdash \psi(a, b)$.

Wymuszanie

Dowodzi się następujących fundamentalnych twierdzeń dotyczących wymuszania:

- **Twierdzenie o Definiowalności Wymuszania.** *Dla każdej* $L_\in$*-formuły* $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ *istnieje* $L_\in$*-formuła* $p \,\overline{\Vdash}\psi$ *taka, że dla wszystkich* $p \in P$ *oraz* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^\mathbb{P} \cap M$*:*

  $ZFL_M \vdash (p \Vdash \psi(a_1, \ldots, a_k) \; \equiv \; (p \,\overline{\Vdash}\psi)^{(M)}(a_1, \ldots, a_k))$.

- **Twierdzenie o Pełności Wymuszania.** *Dla każdej* $L_\in$*-formuły* $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ *oraz dowolnych* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^\mathbb{P} \cap M$ *i dowolnego* $\mathbb{D}_M$*-generic* $\mathbb{P}$*-filtru* G*:*

  $ZFL_M \vdash (\psi^{(M[G])}((a_1)_G, \ldots, (a_k)_G) \; \equiv \; \exists p \in G \; p \Vdash \psi(a_1, \ldots, a_k))$.

Wymuszanie

Wykorzystując te twierdzenia (oraz pewne pojęcia pomocnicze) dowodzi się, że:

- *Dla dowolnego pojęcia wymuszania $\mathbb{P} \in M$ oraz dowolnego $\mathbb{D}_M$-generic $\mathbb{P}$-filtru G:*

  $ZFL_M \vdash \psi^{(M[G])}$, gdzie ψ jest dowolnym aksjomatem ZFC.

W szczególności, dla $\mathbb{P} \doteq \mathbb{F}(\aleph_2^M \times \omega, 2)$ oraz $\mathbb{D}_M^{\mathbb{F}}(\aleph_2^M \times \omega, 2) = \{D \subseteq Fin(\aleph_2^M \times \omega, 2) : D$ jest $\mathbb{P}$-gęsty $\wedge D \in M\}$, dla dowolnego $\mathbb{D}_M^{\mathbb{F}}(\aleph_2^M \times \omega, 2)$-generic $\mathbb{P}$-filtru G w tak skonstruowanym $M[G]$ prawdziwe jest także (na mocy twierdzenia (†) powyżej) zdanie (7) (dla N równego $M[G]$), czyli:

- (7) Istnieje iniekcja $g \in M[G]$ taka, że $g : \aleph_2^M \to \wp(\omega) \cap M[G]$.

Wymuszanie

Jeśli teraz udowodnimy (8) (dla N równego $M[G]$), czyli:

- (8) $\aleph_2^{M[G]} \doteq \aleph_2^M$,

to — ponieważ wtedy $(\aleph_2 \leqslant |\wp(\omega)|)^{(M[G])}$ — zakończymy tym samym dowód, iż $(\neg CH)^{(M[G])}$, czyli iż Hipoteza Kontinuum nie zachodzi w modelu $M[G]$.

Na mocy twierdzeń udowodnionych powyżej mamy także następujący wniosek:

- *Jeśli ZF jest niesprzeczna, to* $ZFC \cup \{\neg V \doteq L\}$ *jest niesprzeczna.*

Dla dowodu (8) wprowadza się jeszcze jedno ważne pojęcie:

Wymuszanie

Dla dowolnego pojęcia wymuszania $\mathbb{P} \doteq (P, \leqslant, \mathbb{I})$ mówimy, że:

- $p, q \in P$ są ***porównywalne***, gdy istnieje $r \in P$ taki, że $r \leqslant p$ oraz $r \leqslant q$.
- $Q \subseteq P$ jest ***antyłańcuchem***, gdy dla wszystkich $p, q \in Q$ jeśli $p \neq q$, to p oraz q nie są porównywalne.
- $\mathbb{P}$ ma własność ***ccc*** (od: *countable chain condition*), gdy nie istnieje nieprzeliczalny antyłańcuch $Q \subseteq P$.

Na gruncie ZFC dowodzi się, że:

- *Dla dowolnych u, v: jeśli v jest przeliczalny, to $\mathbb{F}(u, v)$ ma ccc.*
- *W konsekwencji, dla dowolnych $u, v \in M$: jeśli $(v$ jest przeliczalny$)^{(M)}$, to $(\mathbb{F}(u, v)$ ma ccc$)^{(M)}$, czyli dla dowolnego antyłańcucha $Q \subseteq Fin(u, v)$ zachodzi $(Q$ jest przeliczalny$)^{(M)}$.*

Wymuszanie

Niech $card(\sigma)$ będzie formułą języka $L_{\in}$ stwierdzającą, że σ jest liczbą kardynalną. Niech jej wyraźne zapisanie będzie ćwiczeniem dla słuchaczy (zobacz punkt *Liczby kardynalne* powyżej). Dowodzi się również, że:

- *Dla dowolnego pojęcia wymuszania $\mathbb{P} \in M$ oraz dowolnego $\mathbb{D}_M$-generic $\mathbb{P}$-filtru G: jeśli $(\mathbb{P}$ ma ccc$)^{(M)}$, to M oraz $M[G]$* ***zgadzają się na liczbach kardynalnych****, czyli:*
  $ZFL_M \vdash \forall^M \sigma\ ((card(\sigma))^{(M)} \equiv (card(\sigma)^{(M[G])}))$.

Na mocy powyższego mamy więc: $ZFL_M \vdash \forall^M \tau\ (\aleph_\tau^{(M)} \doteq \aleph_\tau^{(M[G])})$.

Dowodzi się również, że:

- *Dla dowolnych $u, v \in M$: jeśli $(v$ jest przeliczalny$)^M$, to dla dowolnego $\mathbb{D}_M^{\mathbb{F}}(u, v)$-generic $\mathbb{P}$-filtru G: M oraz $M[G]$ zgadzają się na liczbach kardynalnych.*

Wymuszanie

Mamy wreszcie następujący wniosek, który daje w szczególności dowód (8):

- *Dla dowolnego* $\mathbb{D}^{\mathbb{F}}_{M}(\aleph_2^M \times \omega, 2)$*-generic* $\mathbb{P}$*-filtru* G*:* M *oraz* $M[G]$ *zgadzają się na liczbach kardynalnych.*
- *Tak więc,* $(\neg CH)^{(M[G])}$*.*

Powyższy wywód można modyfikować tak, aby otrzymać model $M[G]$ w którym kontinuum będzie równe np. $\aleph_3$ lub $\aleph_{2010}$. Aksjomaty teorii mnogości ZF nie wystarczają zatem do ustalenia, którą konkretnie wartość na skali alefów przyjmuje kontinuum.

Wymuszanie

Uwaga. Powyższy bardzo skrótowy wywód nie oddaje wagi i pożyteczności relacji wymuszania $\Vdash$. W rzeczy samej, interweniuje ona w sposób niezwykle istotny w dowodach niektórych z wymienionych wyżej twierdzeń, których to dowodów tutaj nie przytoczyliśmy.

Słuchacze poważnie zainteresowani tą problematyką zechcą skorzystać z literatury. W języku polskim (już niestety trudno) dostępna jest monografia Guzicki, Zbierski 1978. W języku angielskim dostępnych jest wiele pozycji prezentujących różne wersje metody wymuszania. Zwykle zachęca się początkującego czytelnika do sięgnięcia po monografie: Jech 2003 lub Kunen 1983.

Stosując różne, często wielce wyrafinowane wersje metody wymuszania pokazano, że jeśli ZF jest niesprzeczna, to $ZF \cup \{\psi\}$ jest niesprzeczna, dla szeregu dalszych zdań ψ języka teorii mnogości.

Możliwe wartości kontinuum (w skali alefów)

Easton. *Niech f będzie funkcją określoną dla liczb kardynalnych i spełniającą następujące warunki:*

- *jeśli $\kappa \leqslant \lambda$, to $f(\kappa) \leqslant f(\lambda)$*
- *$\kappa < cf(f(\kappa))$ dla κ regularnych.*

Wtedy: jeśli ZF jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest ZF łącznie ze zdaniem:

- *$f(\kappa) = 2^{\kappa}$ dla wszystkich regularnych liczb kardynalnych κ.*

Z twierdzenia Eastona wynika zatem, że jeśli ZF jest niesprzeczna, to dla dowolnej n, teoria ZF wraz ze zdaniem $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$ jest niesprzeczna.

Możliwe wartości kontinuum (w skali alefów)

Silver. *Niech:*

- $\aleph_1 \leqslant cf(\kappa) < \kappa$
- *jeśli* $\lambda < \kappa$, *to* $2^\lambda = \lambda^+$.

Wtedy: $2^\kappa = \kappa^+$.

Shelah. *Dla wszystkich* $n < \omega$: *jeśli* $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$, *to* $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\aleph_4}$.

Wymienione wyżej twierdzenia pokazują m.in., że (w przypadku CH) jedynym ograniczeniem na wartość $2^{\aleph_0}$ jest:

- $\aleph_0 < cf(2^{\aleph_0})$.

Poszukiwania dalszych aksjomatów dla ZF

Niezupełność ZF skłania do poszukiwania dalszych aksjomatów charakteryzujących zbiory. Aksjomaty te powinny spełniać dwa warunki:

- być w zgodzie z naszymi intuicjami dotyczącymi zbiorów;
- mieć interesujące konsekwencje matematyczne.

Wśród takich nowych aksjomatów dość znane są:

- aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych (np.: mocno nieosiagalnych, mierzalnych);
- aksjomat determinacji.

Aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych

$\aleph_\omega$ jest najmniejszą nieprzeliczalną graniczną liczbą kardynalną, ale $cf(\aleph_\omega) = \aleph_0$, więc $\aleph_\omega$ nie jest regularna.
Jeśli zdefiniujemy: $\kappa_0 = \aleph_0$, $\kappa_{\varsigma(x)} = \aleph_{\kappa_x}$ dla $x \in \omega$ oraz $\kappa = \bigcup\{\kappa_x : x \in \omega\}$, to $\kappa = \aleph_\kappa$, ale $cf(\kappa) = \omega$, więc κ też jest liczbą singularną.

W ZFC następujące warunki są równoważne, dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ:

- κ jest regularna.
- Dla dowolnego x i dowolnej $f : x \to \kappa$: jeśli $|x| < \kappa$, to istnieje $\lambda < \kappa$ taka, że $rng(f) \subseteq \lambda$.
- Dla dowolnego x: jeśli $|x| < \kappa$ oraz $|y| < \kappa$ dla wszystkich $y \in x$, to $\bigcup x < \kappa$.

Liczby słabo i mocno nieosiągalne

- Niech WI oznacza klasę wszystkich nieprzeliczalnych liczb kardynalnych słabo nieosiągalnych, a SI klasę wszystkich nieprzeliczalnych liczb kardynalnych mocno nieosiągalnych.
- Wtedy dla każdego aksjomatu ψ teorii ZFC: $ZFC \vdash \forall\kappa(\kappa \in SI \rightarrow \psi^{(V_\kappa)})$.

- Niech V_{SI} będzie przekrojem wszystkich klas V_κ, dla $\kappa \in SI$.
- Wtedy V_{SI} jest modelem-klasą dla $ZFC \cup \{SI \doteq \emptyset\}$. W konsekwencji:
  - Jeśli ZF jest niesprzeczna, to $ZFC \cup \{SI \doteq \emptyset\}$ jest niesprzeczna.
  - Jeśli ZF jest niesprzeczna, to ZFC $non \vdash SI \neq \emptyset$.

- $ZF \cup \{WI \neq \emptyset\} \vdash Con(ZFC)$.
- Jeśli ZF niesprzeczna, to w ZF nie można sformalizować dowodu, że: „Jeśli ZF niesprzeczna, to $ZF \cup \{WI \neq \emptyset\}$ niesprzeczna."

Liczby mierzalne

Mówimy, że U jest ***ultrafiltrem*** na liczbie kardynalnej κ, gdy U jest niepustą rodziną podzbiorów κ taką, że:

- $\emptyset \notin U$
- jeśli $x \in U$ oraz $x \subseteq y$, to $y \in U$
- jeśli $x, y \in U$, to $x \cap y \in U$
- $(\kappa - x) \in U$ dokładnie wtedy, gdy $x \notin U$.

Ultrafiltr U na κ jest:

- ***niegłówny***, gdy $\{\sigma\} \notin U$, dla wszystkich $\sigma < \kappa$;
- $<$ ***κ-zupełny***, gdy dla wszystkich $x \in U$: jeśli $|x| < \kappa$, to $\bigcap x \in U$.

Liczby mierzalne

- Liczba kardynalna κ jest ***mierzalna***, gdy istnieje niegłówny, $< \kappa$-zupełny ultrafiltr U na κ. W takim przypadku nazwiemy U ***ultrafiltrem miary*** (na κ).
- Niech MC oznacza klasę wszystkich nieprzeliczalnych liczb mierzalnych.
- Liczba ω jest mierzalna.
- Jeśli κ jest mierzalna, to istnieje σ-addytywna miara w rodzinie podzbiorów κ, przyjmująca wartości 0 lub 1.

Dla dowolnego ultrafiltru miary U na κ:

- $\kappa \in U$
- $\forall y \subseteq \wp(\kappa)\ (|y| < \kappa \rightarrow (\bigcup y \in U \equiv \exists z \in y\ (z \in U)))$
- $\forall y \subseteq \kappa\ (|y| < \kappa \rightarrow y \notin U)$.

Liczby mierzalne

- $MC \subseteq SI$.
- Jeśli $MC \neq \emptyset$, to $\neg V \doteq L$.
- Dla dowolnej κ: jeśli $\kappa \in MC$, to $|SI \cap \kappa| = \kappa$.

Istnieją operacje j oraz N takie, że dla dowolnego ultrafiltru miary U na κ:

- N jest klasą przechodnią oraz $Ord \subseteq N$ i $j(x) \in N$ dla wszystkich x.
- $j(\sigma) = \sigma$ dla wszystkich $\sigma < \kappa$, ale $\kappa < j(\kappa)$.
- Dla każdej formuły $\psi(x_1, \ldots, x_k)$:
  $\forall x_1 \ldots \forall x_k \left(\psi(x_1, \ldots, x_k) \;\equiv\; \psi^{(N)}(j(x_1), \ldots, j(x_k))\right)$.

Tak więc, istnieją elementarne włożenia $j : V \to N$, stałe na wszystkich liczbach porządkowych mniejszych od liczby mierzalnej κ, a „ruszające" dopiero liczbę κ. Pomijamy indeks U przy j oraz N.

Aksjomat determinacji

- Dla dowolnych funkcji f i g z ω w ω niech $f\#g$ będzie funkcją taką, że dla wszystkich $k \in \omega$: $f\#g(2k) = f(\overline{f\#g}(2k))$ oraz $f\#g(2k+1) = g(\overline{f\#g}(2k+1))$. Tutaj $\overline{h}(n) = \langle h(0), \ldots, h(n-1)\rangle$, a $\langle\rangle$ jest funkcją kodującą ciągi skończone liczb naturalnych (zobacz wykład 6).
- Dla dowolnego zbioru A funkcji z ω w ω niech:
  $SW_I(A) = \{f : \forall g \ (f\#g \in A)\}$
  $SW_{II}(A) = \{g : \forall f \ (f\#g \notin A)\}$.
- Mówimy, że A jest ***zdeterminowany***, gdy $SW_I(A) \cup SW_{II}(A) \neq \emptyset$.
- Dla dowolnej rodziny $\mathcal{C}$ zbiorów funkcji z ω w ω niech $AD[\mathcal{C}]$ będzie zdaniem: $\forall A \in \mathcal{C}$ A jest zdeterminowany. W szczególności, gdy $\mathcal{C}$ jest całym zbiorem potęgowym zbioru wszystkich funkcji z ω w ω, to zamiast $AD[\mathcal{C}]$ piszemy AD. Zdanie AD nazywamy ***aksjomatem determinacji***.

Aksjomat determinacji

Zauważmy, że następujące warunki są równoważne:

- A jest zdeterminowany.
- $SW_I(A) = \emptyset \rightarrow SW_{II}(A) \neq \emptyset$.
- $\forall f \exists g \, ((f \# g) \notin A) \rightarrow \exists g \forall f \, ((f \# g) \notin A)$.

- Aksjomat determinacji można interpretować w terminach teorii gier (dwuosobowych). Gracze wybierają kolejno liczby naturalne. Gra (o zbiór A) jest zatem nieskończonym ciągiem takich liczb. Jeśli ciąg ten należy do A, wygrywa gracz I, w przeciwnym przypadku wygrywa gracz II.
- Zbiory: $SW_I(A)$ oraz $SW_{II}(A)$ to strategie wygrywające dla, odpowiednio, gracza I i II. Gra jest zdeterminowana, gdy co najmniej jeden z graczy ma strategię wygrywającą.

Aksjomat determinacji

- Na gruncie ZF, aksjomat determinacji AD implikuje zaprzeczenie aksjomatu wyboru AC.
- W $ZF \cup \{AD\}$ można udowodnić Con_{ZFC}.
- Jeśli ZF jest niesprzeczna, to w ZF nie można sformalizować dowodu, że: „Jeśli ZF jest niesprzeczna, to $ZF \cup \{AD\}$ jest niesprzeczna."

- W ZFC można udowodnić, że wszystkie zbiory Borelowskie są zdeterminowane.
- Jeśli istnieje liczba mierzalna, to zdeterminowane są wszystkie zbiory klasy $\prod_1^1$ w hierarchii zbiorów rzutowych.

Koniec

- To już naprawdę koniec, zarówno tego wykładu, jak i całego cyklu ***Metalogika***.
- Staraliśmy się dokonać (skromnego, przyznajmy) wyboru zagadnień, którymi zajmowała się metalogika w XX wieku. Wykład był raczej odtwórczy niż oryginalny, ale przynajmniej korzystaliśmy z dobrych podręczników.

- Jeśli udało nam się choćby w mikroskopijnym stopniu zachęcić słuchaczy do podjęcia dalszych samodzielnych studiów w tej dziedzinie, to cel wykładów został osiągnięty. W przeciwnym przypadku, wykłady były dydaktyczną ***klęską***.
- Uprzejmie dziękuję wszystkim słuchaczom za współpracę.

Wskazówki bibliograficzne

- Adamowicz, Z., Zbierski, P. 1991. *Logika matematyczna.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Błaszczyk, A., Turek, S. 2007. *Teoria mnogości.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Chronowski, A. 1997. *Elementy teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.
- Cichoń, J. 2003. *Wykłady ze wstępu do matematyki.* Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław.
- Cori, R., Lascar, D. 2001. *Mathematical logic. A course with exercises.* Oxford University Press, Oxford.
- Devlin, K. 1984. *Constructibility.* Springer-Verlag, Berlin.
- Drake, F.R., 1974. *Set theory: An introduction to large cardinals.* North-Holland Publishing. Co., Amsterdam.

Wskazówki bibliograficzne

- Enderton, H.B. 1995. *Elements of set theory.* Academic Press, New York London.
- Guzicki, W., Zbierski, P. 1978. *Podstawy teorii mnogości.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Guzicki, W., Zakrzewski, P. 2005. *Wykłady ze wstępu do matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Guzicki, W., Zakrzewski, P. 2005. *Wstęp do matematyki. Zbiór zadań.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of mathematical logic.* A K Peters, Wellesley, Massachusetts.
- Jech, T. 2003. *Set theory.* Springer-Verlag, Berlin.
- Kanamori, A. 2003. *The higher infinite.* Springer-Verlag, Berlin.

Wskazówki bibliograficzne

- Kraszewski, J. 2007. *Wstęp do matematyki.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Kunen, K. 1983. *Set theory: An introduction to independence proofs.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
- Kuratowski, K. 1966. *Wstęp do teorii mnogości i topologii.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Kuratowski, K., Mostowski, A. 1978. *Teoria mnogości.* PWN, Warszawa.
- Ławrow, I.A., Maksimowa, Ł.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Marek, W., Onyszkiewicz, J. 1996^6. *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Wskazówki bibliograficzne

- Moschovakis, Y.N. 1994. *Notes on set theory.* Springer-Verlag, New York.
- Murawski, R., Świrydowicz, K. 2005. *Wstęp do teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
- Shoenfield, J. 1973. *Mathematical logic.* Reading, Massachusetts.

- Zobacz także dodatki do niniejszego wykładu, zamieszczone na naszych stronach internetowych.