Logika Radosna 3

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

KRZ: tablice analityczne

Wprowadzenie

Omówimy jeszcze jedną operację konsekwencji w KRZ, a mianowicie konsekwencję wyznaczoną przez **tablice analityczne**.

Systematyczne badania nad tego typu konsekwencjami prowadzone są od prawie pół wieku. Sama metoda znana jest pod różnymi nazwami, mówi się np. o:

- tablicach analitycznych
- tablicach semantycznych
- tablicach Smullyana
- *dual tableaux*
- drzewach semantycznych.

Coraz większe zainteresowanie omawianą metodą wiąże się m.in. z jej zastosowaniami w automatycznym dowodzeniu twierdzeń.

Wprowadzenie

Dokładne omówienie metody tablic analitycznych w KRZ, wraz z dowodami twierdzeń o trafności i pełności tej metody, podajemy w pliku **tabkrz.pdf**.

W niniejszej prezentacji ograniczamy się do pobieżnego omówienia **praktycznych** porad dotyczących stosowania tej metody w rozwiązywaniu standardowych problemów formułowanych w języku klasycznego rachunku zdań:

- ustalania, czy dana formuła jest tautologią bądź kontrtautologią tego rachunku,
- ustalania, czy dany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny,
- badania, czy zachodzi wynikanie logiczne.

Wprowadzenie

Uwaga. W Dodatku do tej prezentacji podajemy definicje wszystkich potrzebnych pojęć matematycznych dotyczących drzew.

Pamiętamy jednak, że jesteś Niewinną Filolożką i możesz mieć oziębły stosunek do Matematyki. Mamy więc dla ciebie **Dobrą Wiadomość**:

Dla zrozumienia działania metody tablic analitycznych oraz pozyskania umiejętności praktycznego ich stosowania wystarczą podstawowe intuicje dotyczące drzew, które podajemy na wykładzie.

Tak więc, wystarczy przyjść na wykłady. Tam, za pomocą waving hands technique, bez straszenia Matematyką, przystępnie opowiemy o drzewach.

Intuicje dotyczące metody TA

Jak pamiętamy z poprzednich wykładów, dla dowolnej formuły α języka KRZ i dowolnego wartościowania *w* zmiennych zdaniowych, wartość formuły α przy tym wartościowaniu jest jednoznacznie określona.

Jeśli pamiętasz tabelki prawdziwościowe spójników logicznych, to obliczenie wartości dowolnej formuły przy danym wartościowaniu wykonać możesz całkiem mechanicznie, bezmyślnie.

Jest to przy tym procedura typu ***bottom up*** — ustalasz kolejno wartości coraz bardziej złożonych formuł.

W metodzie tablic analitycznych mamy do czynienia z procedurą odwrotną: ***top to bottom***, w tym sensie, że znając wartość pewnej formuły ustalamy jakie są wartości jej podformuł.

Intuicje dotyczące metody TA

Dla przykładu, jeśli implikacja $\alpha \rightarrow \beta$ ma wartość 0 przy danym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, to przy tymże wartościowaniu formuła α ma wartość 1, a formuła β ma wartość 0.

A jeśli implikacja $\alpha \rightarrow \beta$ ma wartość 1 przy danym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, to przy tymże wartościowaniu ***nie może*** być tak, aby α miała wartość 1, a β miała wartość 0.

To z kolei oznacza, że zachodzi ***co najmniej*** jedno z dwojga: bądź α ma wartość 0, bądź β ma wartość 1.

Nie jest jednak konieczne uwzględnianie ***trzech*** odpowiadających tej sytuacji przypadków — wystarczą wspomniane ***dwa***.

Intuicje dotyczące metody TA

Podobnie, jeśli alternatywa $\alpha \vee \beta$ ma wartość 1 przy danym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, to przy tymże wartościowaniu bądź α ma wartość 1, bądź β ma wartość 1.

Również w tym przypadku wystarczy rozważyć jedynie te **dwie** możliwości.

Jeśli natomiast alternatywa $\alpha \vee \beta$ ma wartość 0 przy danym wartościowaniu zmiennych, to przy tymże wartościowaniu zarówno α ma wartość 0 jak i β ma wartość 0.

Podobnie rzecz się ma z pozostałymi formułami złożonymi: koniunkcją i równoważnością.

Intuicje dotyczące metody TA

Przypuszczenie, że formuła α jest prawdziwa przy jakimś wartościowaniu sprowadza się do analizy drzewa, w którego wierzchołku umieszczamy formułę α i którego pozostałe wierzchołki są podformułami lub negacjami podformuł formuły α. Ile jest takich wierzchołków i jak są one połączone krawędziami określają precyzyjne reguły, które omówimy za chwilę.

Rozważmy **zaprzeczenie (!)** prawa ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz***, czyli rozważmy formułę:

$$\neg(((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q).$$

Jeśli przypuścimy, że ma ona wartość 1 (przy jakimś wartościowaniu zmiennych), to musimy kolejno uznać, że (przy tymże wartościowaniu):

Intuicje dotyczące metody TA

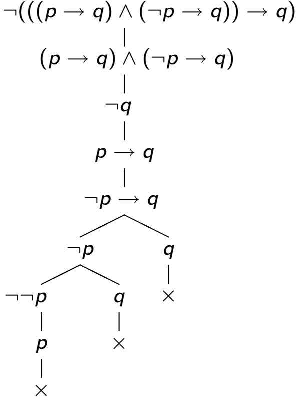
- (1) formuła $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$ ma wartość 0;
- (2.1) formuła $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$ ma wartość 1, a jednocześnie (2.2) formuła q ma wartość 0;
- (3.1) formuła $p \rightarrow q$ ma wartość 1 oraz (3.2) formuła $\neg p \rightarrow q$ ma wartość 1;
- (4) skoro $p \rightarrow q$ ma wartość 1, to bądź: (4.1) p ma wartość 0, bądź (4.2) q ma wartość 1;
- (5) warunki (2.2) oraz (4.2) są wzajem sprzeczne;
- (6) skoro $\neg p \rightarrow q$ ma wartość 1, to bądź: (6.1) $\neg p$ ma wartość 0, bądź (6.2) q ma wartość 1;
- (7) warunki (2.2) oraz (6.2) są wzajem sprzeczne;
- (8) skoro $\neg p$ ma wartość 0 (z (6.1)), to (8.1) p ma wartość 1;

Intuicje dotyczące metody TA

- (9) warunki (4.1) oraz (8.1) są wzajem sprzeczne;
- (10) przypuszczenie (1) musimy odrzucić;
- (11) nie ma wartościowania, przy którym formuła: $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ miałaby wartość 1;
- (12) formuła $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ ma zatem wartość 0 przy każdym wartościowaniu;
  (13) zatem formuła $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$ ma wartość 1 przy każdym wartościowaniu.

Intuicje dotyczące metody TA

Powyższe rozumowanie reprezentowane może być poprzez drzewo następującej postaci:



Intuicje dotyczące metody TA

Gałęzie tego drzewa odpowiadają ciągom kroków przeprowadzanego wyżej rozumowania. W miejscach, gdzie dany wierzchołek ma dwóch potomków, odpowiadający tej sytuacji krok rozumowania polegał na rozpatrzeniu alternatywy przypadków. Każda gałąź tego drzewa kończy się liściem $\times$, umownie oznaczającym, iż na gałęzi jest para formuł wzajem sprzecznych. Proszę zauważyć, że krok (8) w powyższym rozumowaniu jest zbędny: skoro ustaliliśmy w (4.1), że p jest ma wartość 0 oraz w (6.1), że $\neg p$ ma wartość 0, to już w tym momencie otrzymaliśmy sprzeczność: nie ma wartościowania, przy którym p oraz $\neg p$ mają wartość 1.

Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład: sprawdźmy, czy formuła

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$$

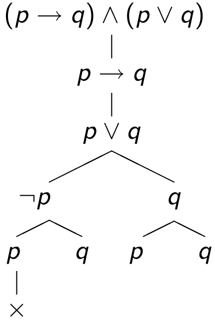
jest ma wartość 1 przy jakimś wartościowaniu. Rozumujemy wtedy tak:

Intuicje dotyczące metody TA

- (1) jeśli $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ ma wartość 1, to (1.1) $p \rightarrow q$ ma wartość 1 oraz (1.2) $p \vee q$ ma wartość 1;
- (2) skoro $p \rightarrow q$ ma wartość 1, to bądź: (2.1) p ma wartość 0, bądź (2.2) q ma wartość 1;
- (3) w przypadku (2.1) mamy, skoro $p \vee q$ ma wartość 1, to bądź: (3.1.) p ma wartość 1, bądź (3.2) q ma wartość 1;
- (4) w przypadku (2.2) mamy, skoro $p \vee q$ ma wartość 1, to bądź: (4.1) p ma wartość 1, bądź (4.2) q ma wartość 1;
- (5) przypadki (2.1) oraz (3.1) są wzajem sprzeczne;
- (6) wszystkie (trzy) pozostałe powyższe przypadki są możliwe;
- (7) formuła $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ ma wartość 1 przy pewnych wartościowaniach zmiennych zdaniowych.

Intuicje dotyczące metody TA

Rozumowanie to reprezentowane jest przez drzewo:



Intuicje dotyczące metody TA

Dodajmy jeszcze parę ogólnych uwag o metodzie tablic analitycznych. Dwie najważniejsze cechy tej metody to:

- apagogiczność;
- analityczność.

Apagogiczność polega na tym, że omawiana metoda jest ***metodą nie wprost***: sprowadza się do ***wykluczania*** zajścia pewnych sytuacji. W pierwszym z rozważanych wyżej przykładów ***wykluczyliśmy***, że prawo ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz*** ma przy jakimkolwiek wartościowaniu zmiennych zdaniowych wartość 0. W drugim z powyższych przykładów ***wykluczyliśmy***, że formuła $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ ma wartość 0 przy wszystkich wartościowaniach.

Intuicje dotyczące metody TA

Analityczność metody polega na tym, że przy ustalaniu własności semantycznych formuł (tu: wykluczaniu, że mają wartość 1 lub wykluczaniu, że mają wartość 0) odwołujemy się jedynie do własności semantycznych ***podformuł*** (oraz negacji podformuł) badanej formuły. W przypadku KRZ dochodzi jeszcze ***algorytmiczność***, w przypadku KRP (Klasycznego Rachunku Predykatów) jedynie ***półalgorytmiczność***. Dowiemy się o tym więcej później.

Uwaga. Odwołania do ***semantycznych*** własności formuł (ich spełnialności przez wartościowania) w powyższych sformułowaniach są jedynie chwytem reklamowym. Omawiana metoda jest metodą ***syntaktyczną***. Określimy pewną relację konsekwencji wyznaczoną przez tablice analityczne oraz pojęcie tezy systemu tablicowego, a dopiero potem pokażemy, że pojęcia te są dobrane rozumnie i adekwatnie, tj. iż zachodzą twierdzenia o trafności oraz pełności metody tablicowej.

Tablice atomowe

Niech α oraz β będą dowolnymi formułami, a p dowolną zmienną zdaniową języka KRZ. ***Tablicami atomowymi*** są wszystkie drzewa (znakowane) jednej z dziewięciu następujących postaci:

$$p \qquad\qquad \neg p \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\neg\alpha \\ | \\ \alpha \end{array}$$

Tablice atomowe

$$\begin{array}{ccc}
\alpha \wedge \beta & \neg(\alpha \rightarrow \beta) & \neg(\alpha \vee \beta) \\
| & | & | \\
\alpha & \alpha & \neg\alpha \\
| & | & | \\
\beta & \neg\beta & \neg\beta
\end{array}$$

Tablice atomowe

$$\begin{array}{c} \alpha \lor \beta \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha \qquad \beta \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \swarrow \quad \searrow \\ \neg\alpha \qquad \beta \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(\alpha \land \beta) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \neg\alpha \qquad \neg\beta \end{array}$$

Tablice atomowe

Z pewnych powodów (na potrzeby twierdzeń o trafności i pełności) wygodnie jest uważać $\equiv$ za termin ***zdefiniowany*** (np. przez $\rightarrow$ i $\wedge$) i nie rozważać drzew atomowych dla $\equiv$. W praktyce, możemy (i będziemy) stosować reguły dotyczące formuł w postaci równoważności oraz zanegowanej równoważności:

$$\begin{array}{ccc} & \alpha \equiv \beta & \\ \alpha & & \neg\alpha \\ | & & | \\ \beta & & \neg\beta \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \neg(\alpha \equiv \beta) & \\ \alpha & & \neg\alpha \\ | & & | \\ \neg\beta & & \beta \end{array}$$

Tablice atomowe

Drzewo atomowe o wierzchołku (znakowanym przez) α będziemy oznaczać przez D_α.

Uwaga. Można budować rachunek tablic analitycznych dla dowolnego zupełnego układu spójników prawdziwościowych. Posługiwanie się symbolami zdefiniowanymi wymaga wtedy dodania ***reguł zastępowania***.
Uwaga. Można przyjąć umowę, że dla atomowych tabel rozgałęziających dany jest ***kanoniczny*** porządek (poprzeczny lub wzdłużny) , tj. że w rozgałęzieniach zawsze piszemy w lewej gałęzi np. pierwszy argument (lub negację pierwszego argumentu) formuły z korzenia tabeli atomowej. Umowa taka pozwoliłaby mówić w sposób jednoznaczny np. o „najbardziej lewej" gałęzi drzew złożonych.

Tablice analityczne

Tablicą analityczną jest każde (znakowane) nw-drzewo powstające przez zastosowanie poniższych konstrukcji:

- (1) Każda tablica atomowa jest tablicą analityczną.
- (2) Jeśli D jest tablicą analityczną, P jest gałęzią w D zawierającą wierzchołek (znakowany przez) α, to $D \sqcup_{P_{\mho}} D_{\alpha}$ jest tablicą analityczną.
- (3) Jeśli $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ jest ciągiem tablic analitycznych takim, że D_{n+1} powstaje z D_n (dla $n \geqslant 0$) przez zastosowanie kroku (2), to $\bigsqcup D_n$ jest tablicą analityczną.

Tablice analityczne

Uwaga. Często, dla uproszczenia wysławiania się, będziemy opuszczać zwrot „znakowana przez". Nie powinno to prowadzić do nieporozumień. Zauważmy jednak, że znakowanie wierzchołków drzewa formułami ***jest*** istotne: jeśli np. na gałęzi P w tablicy D występują formuły $\alpha \wedge \beta$ oraz $\alpha \wedge \gamma$ i $P' = P \sqcup_{P_\mho} D_{\alpha\wedge\beta}$, to na gałęzi i $P' \sqcup_{P'_\mho} D_{\alpha\wedge\gamma}$ formuła α wystąpi ***dwukrotnie***.

Uwaga. W myśl powyższej definicji, wykonanie kroku (2) każe ***powtarzać*** wystąpienie formuły na branej pod uwagę (przedłużanej) gałęzi. W praktyce, będziemy dopisywać do gałęzi nie całe drzewo atomowe D_α, ale jedynie graf powstający z D_α poprzez usunięcie korzenia r_{D_α}. Sytuacja będzie nieco inna dla tablic analitycznych w Klasycznym Rachunku Predykatów, ale tym będziemy się martwić, za przyzwoleniem Losu, później.

Tablice sprzeczne

Niech D będzie tablicą analityczną, a P gałęzią w D. Mówimy, że:

- Gałąź P jest ***sprzeczna***, gdy istnieje formuła α taka, że zarówno α, jak i $\neg\alpha$ są elementami P.
- Tablica D jest ***sprzeczna***, jeśli każda gałąź w D jest sprzeczna.

Uwaga. Zamiast „gałąź sprzeczna" mówimy też „gałąź ***zamknięta***", a gdy P nie jest sprzeczna, to mówimy, że P jest gałęzią ***otwartą***.

Dowody tablicowe

- ***Dowodem tablicowym*** formuły α nazywamy każdą tablicę sprzeczną o korzeniu $\neg\alpha$.
- Mówimy, że α jest ***tablicowo dowodliwa***, jeśli istnieje tablicowy dowód α. Jeśli α jest tablicowo dowodliwa, to piszemy $\vdash_{tab} \alpha$.
- ***Tablicowym odrzuceniem*** formuły α nazywamy każdą tablicę sprzeczną o korzeniu α.
- Mówimy, że α jest ***tablicowo odrzucalna***, jeśli istnieje tablicowe odrzucenie α. Jeśli α jest tablicowo odrzucalna, to piszemy $\dashv_{tab} \alpha$.

Trochę heurystyki

To co najważniejsze, jeśli chodzi o metodę tablic analitycznych da się streścić tak oto. Masz jakąś formułę języka KRZ. Budujesz jej tablicę analityczną. Każda z konstruowanych gałęzi odpowiada próbie konstrukcji wartościowania, dla którego rozważana formuła ma wartość 1.

Jeśli gałąź jest zamknięta (zawiera parę formuł wzajem sprzecznych), to gałąź taka ***nie może*** odpowiadać żadnemu wartościowaniu, dla którego badana formuła ma wartość 1.

Zamykanie gałęzi to zatem wykluczanie zachodzenia pewnych sytuacji. Natomiast istnienie gałęzi otwartych w tabeli analitycznej danej formuły ukazuje, że istnieją wartościowania, przy których formuła ta ma wartość 1.

Trochę heurystyki

Jeśli podczas tworzenia łańcucha formuł w konstruowanej tablicy analitycznej uzyskamy w tym łańcuchu parę formuł wzajem sprzecznych, to dalsza praca z tym łańcuchem jest niepotrzebna: możemy ją zakończyć, doklejając do takiego łańcucha liść z informacją o uzyskaniu sprzeczności i otrzymując w ten sposób gałąź zamkniętą drzewa, traktowaną jako twór kompletny. Pamiętasz: *Sprzeczność to śmierć logiczna.* Nadto, z kultury masowej pamiętasz: *A kto umarł, ten nie żyje.*

Podstawowym celem budowania tablic analitycznych jest uzyskiwanie łańcuchów zamkniętych, tj. zbiorów formuł wśród których jest para formuł wzajem sprzecznych. Jeśli jakiś zbiór formuł zawiera parę formuł wzajem sprzecznych, to ***każdy*** jego nadzbiór także tę parę zawiera. Można zakończyć pracę.

Trochę heurystyki

Zasada 1.
Sprawdzaj po każdym kroku, czy możesz zamknąć którąś z gałęzi. Jeśli tak, to oznacz ją $\times$ i nie przedłużaj.

Ponieważ kolejne kroki dotyczą wszystkich otwartych gałęzi drzewa, warto (dla uniknięcia, jeśli to możliwe, podwójnej pracy) przestrzegać też zasady:

Zasada 2.
Najpierw stosuj reguły nie powodujące rozgałęzienia drzewa, a dopiero potem reguły powodujące rozgałęzienie.

Notacja

Omówimy teraz jedną z możliwych notacji, stosowanych w praktycznych zastosowaniach metody tablic analitycznych. Notacja uwzględniać będzie:

- numerację wykonywanych kroków
- informację dotyczącą reguł wykorzystywanych w poszczególnych krokach
- wyniki wykonania poszczególnych kroków.

Uwaga. Wymienione wyżej informacje ***nie*** są elementami składowymi tablic analitycznych. Stanowią (metajęzykowe) komentarze, ułatwiające odczytywanie dowodów tablicowych.

Stosujemy następujące konwencje:

- Formuła umieszczana w korzeniu tablicy otrzymuje numer (0), z ***lewej*** strony. W dalszym ciągu, gdy będziemy rozpoczynać budowę tablicy z założeń, poszczególne założenia $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ otrzymają numery: $(0.1), (0.2), \ldots, (0.n)$, odpowiednio.
- Numer każdego kroku (w tworzeniu tablicy) piszemy ***z prawej*** strony formuły, do której stosujemy ów krok. Jest to liczba z kropką, umieszczana w górnej frakcji. Za tym numerem dodajemy informację, jaka reguła jest wykorzystywana w danym kroku. Jest to oczywiście informacja nadmiarowa, ponieważ dla dowolnej formuły można zastosować ***tylko jedną*** regułę rozkładu, ale — jak sądzimy — przydatna dydaktycznie, co najmniej na początkowym etapie uczenia się rozważanej metody.
- Wynik wykonania kroku o numerze $n.$ (a więc pewna formuła lub formuły) jest numerowany z ***lewej*** strony, liczbą w nawiasach okrągłych: (n) (z indeksami, o których niżej).

Przyjmujemy następujące konwencje dotyczące numeracji wyników wykonania poszczególnych kroków:

- Jeśli w kroku *n*. zastosowano regułę nierozgałęziającą tworzenia tablicy atomowej dla **podwójnej negacji**, to wynik wykonania kroku *n*. otrzymuje numer (n).
- Jeśli w kroku *n*. zastosowano (inną niż powyższa) regułę **nierozgałęziającą** (a więc regułę tworzenia tablicy atomowej dla: koniunkcji, zaprzeczonej implikacji lub zaprzeczonej alternatywy), to wynikiem jest para formuł, które zapisujemy jedna pod drugą na danej gałęzi i które numerujemy: (n_g) i (n_d).
- Jeśli w kroku *n*. zastosowano regułę **rozgałęziającą** (a więc regułę tworzenia tablicy atomowej dla: implikacji, alternatywy lub zaprzeczonej koniunkcji), to wynikiem jest para formuł, tworząca rozgałęzienie; formuły te uzyskują numery: (n_l) i (n_p).

Zgodnie z zastrzeżeniem dotyczącym równoważności $\equiv$, podanym po definicji tablic atomowych, nie powinniśmy budować tablic analitycznych dla formuł postaci $\alpha \equiv \beta$, używając w takich przypadkach tablicy np. dla formuły $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$. Niejedno już w życiu popełniliśmy świństewko, i w tym przypadku również na świństewko sobie pozwolimy. ***Będziemy*** budować tablice dla formuł postaci $\alpha \equiv \beta$ oraz $\neg(\alpha \equiv \beta)$. Przy tym:

- Wynikiem wykonania kroku *n*. dla formuły postaci $\alpha \equiv \beta$ jest para par formuł, tworząca rozgałęzienie. Formuły pierwszej pary, w gałęzi lewej otrzymują numery: (n_{lg}) i (n_{ld}) i podpisywane są jedna pod drugą na gałęzi lewej. Formuły drugiej pary, w gałęzi prawej otrzymują numery: (n_{pg}) i (n_{pd}) i podpisywane są jedna pod drugą na gałęzi prawej.
- Wynikiem wykonania kroku *n*. dla formuły postaci $\neg(\alpha \equiv \beta)$ jest para par formuł, tworząca rozgałęzienie. Formuły pierwszej pary, w gałęzi lewej otrzymują numery: (n_{lg}) i (n_{ld}) i podpisywane są jedna pod drugą na gałęzi lewej. Formuły drugiej pary, w gałęzi prawej otrzymują numery: (n_{pg}) i (n_{pd}) i podpisywane są jedna pod drugą na gałęzi prawej.

Notacja

Gałąź zamkniętą tablicy opatrujemy liściem $\times_{m,n}$, gdzie m oraz n są numerami wzajem sprzecznych formuł, występujących na tej gałęzi. Gałęzie otwarte tablicy opatrujemy liśćmi $\circ$, numerowanymi kolejno, jeśli jest ich więcej niż jedna. Czasem stosujemy też inne znaczki dla gałęzi otwartych, np.: $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ i $\spadesuit$.

Uwaga. Wymienione wyżej symbole dla oznaczania gałęzi zamkniętych i otwartych tablicy ***nie są*** elementami tablicy, są (metajęzykowymi) komentarzami, mającymi ułatwiać czytanie dowodów.

Uwaga. Wynik wykonania kroku n. powinien zostać umieszczony na ***każdej*** gałęzi, która zawiera formułę (dokładniej: wystąpienie formuły), do której ów krok jest stosowany. W praktyce, nie będziemy stosować się do tej powinności w odniesieniu do gałęzi zamkniętych: wynik wykonania kroku n. będzie umieszczany na ***każdej otwartej*** gałęzi, która zawiera formułę (dokładniej: wystąpienie formuły), do której ów krok jest stosowany.

Notacja

Uwaga. Tablice analityczne są ***całościami***, tworami, by tak rzec, ***statycznymi***. Gdy mówimy o ***budowaniu*** tablicy analitycznej, to traktujemy ją ***dynamicznie***, jako twór, który jest krok po kroku ***konstruowany***. Rzecz ma się tu dokładnie tak samo, jak w przypadku dowodów dotychczas omawianych (aksjomatycznych lub założeniowych).

Powtórka. Procedura budowy tabeli analitycznej ***nie jest*** deterministyczna: możemy w różnej kolejności wybierać z danego łańcucha formuły i stosować odpowiednie reguły. Zarówno ze względów estetycznych, jak i biorąc pod uwagę ekonomię konstrukcji tablic, zaleca się stosowanie: najpierw reguł nierozgałęziających, a w dalszej kolejności reguł rozgałęziających. Innym zaleceniem w budowie tablic analitycznych jest: sprawdzaj w każdym kroku, czy na którejś z budowanych gałęzi nie wystąpiła już para formuł wzajem sprzecznych. Jeśli tak jest, to oznacz tę gałąź liściem $\times$ jako zamkniętą (sprzeczną) i nie uwzględniaj jej w dalszej konstrukcji.

Kodowanie wierzchołków tablicy analitycznej

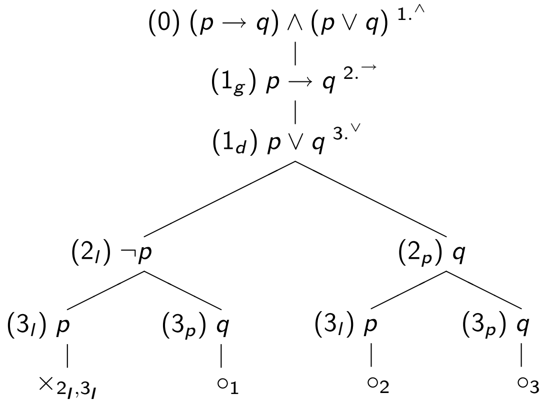
Niech wystąpienie α w tablicy analitycznej D ma kod $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$. Wtedy:

- jeśli α ma postać $\neg\neg\beta$, to β otrzymuje kod $\langle n_1, \ldots, n_m, 0 \rangle$
- jeśli D_α jest drzewem nierozgałęziającym, to jego wierzchołki (różne od r_{D_α}) otrzymują kody: $\langle n_1, \ldots, n_m, 1 \rangle$ (pierwszy wierzchołek gałęzi różny od r_{D_α}) oraz $\langle n_1, \ldots, n_m, 2 \rangle$ (drugi wierzchołek gałęzi różny od r_{D_α})
- jeśli D_α jest drzewem rozgałęziającym, to jego wierzchołki (różne od r_{D_α}) otrzymują kody: $\langle n_1, \ldots, n_m, 1 \rangle$ (w gałęzi lewej) oraz $\langle n_1, \ldots, n_m, 2 \rangle$ (w gałęzi prawej).

Uwaga. Terminy: „pierwszy", „drugi", „lewy" oraz „prawy" odnoszą się do rysunków w definicji tablic atomowych. Nie będziemy niżej korzystać z tego kodowania, pokazujemy jedynie, że jest możliwe.

Przykład 1

Tablica analityczna formuły $(p \to q) \wedge (p \vee q)$:



Przykład 1

Sposób budowania tego drzewa jest widoczny z umieszczonych w nim komentarzy:

- W korzeniu umieszczamy formułę $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ i opatrujemy ją z lewej strony numerem (0).
- Głównym spójnikiem formuły (0) jest koniunkcja. Wykonujemy zatem krok 1. wedle zaleceń tablicy atomowej dla koniunkcji.
- Otrzymujemy formuły będące członami tej koniunkcji: $p \rightarrow q$ oraz $p \vee q$. Przypisujemy im numery: (1_g) oraz (1_d) i podpisujemy obie formuły pod korzeniem drzewa. Utworzyliśmy w ten sposób łańcuch składający się z formuł o numerach: (0), (1_g) i (1_d).
- Głównym spójnikiem formuły o numerze (1_g) jest implikacja. Wykonujemy zatem krok 2. wedle zaleceń tablicy atomowej dla implikacji, tworząc rozgałęzienie w drzewie.

Przykład 1

- W lewej gałęzi umieszczamy zaprzeczony poprzednik implikacji (1_g), czyli formułę $\neg p$ i opatrujemy tę formułę numerem (2_l).
- W prawej gałęzi umieszczamy następnik implikacji (1_g), czyli formułę q i opatrujemy tę formułę numerem (2_p).
- Zbudowaliśmy w ten sposób dwa łańcuchy, złożone, odpowiednio, z formuł o numerach:
    - (0), (1_g), (1_d) i (2_l)
    - (0), (1_g), (1_d) i (2_p).
- Jedyną formułą, do której można jeszcze stosować jakieś reguły wyznaczone przez tablice atomowe jest formuła o numerze (1_d), czyli $p \vee q$. Jej spójnikiem głównym jest alternatywa. Wykonujemy zatem krok 3. wedle zaleceń tablicy atomowej dla alternatywy, tworząc ***dwa*** dalsze rozgałęzienia w drzewie: zarówno pod formułą o numerze (2_l), jak i pod formułą o numerze (2_p).

Przykład 1

- W lewej gałęzi wyniku wykonania kroku 3. piszemy formułę p (pierwszy człon alternatywy $p \vee q$) i opatrujemy ją numerem (3_l). W prawej gałęzi wyniku wykonania kroku 3. piszemy formułę q (drugi człon alternatywy $p \vee q$) i opatrujemy ją numerem (3_p).
- Do żadnej z formuł nie można już zastosować żadnej reguły rozkładu podanej w definicji tablic atomowych. Ponieważ na gałęzi złożonej z formuł o numerach: (0), (1_g), (1_d), (2_l) oraz (3_l) występuje para formuł wzajem sprzecznych (a mianowicie formuły o numerach: (2_l) i (3_l)), więc gałąź tę oznaczamy jako zamkniętą (sprzeczną), podpisując pod nią liść $\times_{2_l,3_l}$. Pozostałe (trzy) gałęzie są otwarte. Jeśli jest to potrzebne (np. dla podania wartościowań, przy których formuła z korzenia drzewa przyjmuje wartość 1, jak będziemy to później stosować), to gałęzie te jakoś numerujemy, np. tak, jak zrobiono to na rysunku.

Przykład 2

Przywołajmy po raz kolejny świetnie nam już znane prawo ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz***, odgrywające jakże fundamentalną rolę w wielu wyborach:

$$((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q.$$

Zbudujemy tablicę analityczną dla zaprzeczenia tego prawa, tj. dla formuły:

$$(\bigstar) \quad \neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q).$$

Budowę tablicy rozpoczynamy od korzenia, w którym umieszczamy formułę ($\bigstar$), a następnie stosujemy reguły rozkładu formuł (wyliczone w zestawie tablic atomowych):

Przykład 2

$(0)\ \neg(((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q)\ ^{1.\neg\to}$

$(1_g)\ (p \to q) \wedge (\neg p \to q)\ ^{2.\wedge}$

$(1_d)\ \neg q$

$(2_g)\ p \to q\ ^{3.\to}$

$(2_d)\ \neg p \to q\ ^{4.\to}$

$(3_l)\ \neg p$ | $(3_p)\ q$

$(4_l)\ \neg\neg p\ ^{5.\neg\neg}$ | $(4_p)\ q$ | $\times_{1_d, 3_p}$

$(5)\ p$ | $\times_{1_d, 4_p}$

$\times_{4_l, 5}$

Przykład 2

- W korzeniu tablicy umieszczamy formułę $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ i opatrujemy ją numerem (0). Jej spójnikiem głównym jest negacja (implikacji), a więc krok numer 1. wykorzystuje regułę podaną dla tablicy atomowej zanegowanej implikacji. Umieszczamy, jedna pod drugą, formuły: (1_g) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$ (poprzednik implikacji (0)) oraz (1_g) $\neg q$ (następnik implikacji (0)).
- Formuła o numerze (1_g) jest koniunkcją, a więc w kroku 2. stosujemy regułę podaną dla tablicy atomowej koniunkcji: umieszczamy, jedna pod drugą, formuły: (2_g) $p \rightarrow q$ (pierwszy człon koniunkcji (1_g)) oraz (2_d) $\neg p \rightarrow q$ (drugi człon koniunkcji (1_g)).

Przykład 2

- Mamy teraz wybór: następny krok może dotyczyć bądź formuły o numerze (2_g), bądź formuły o numerze (2_d). Każda z tych możliwości owocuje rozgałęzieniem. Wybierzmy pierwszą z nich. W kroku 3. stosujemy zatem regułę podaną w tablicy atomowej dla implikacji do formuły: (2_g) $p \rightarrow q$. Wyniki wykonania tego kroku zapisujemy w rozgałęzieniach: w lewej gałęzi piszemy (3_l) $\neg p$, a w prawej piszemy (3_p) q.
- Zauważamy (!) w tym momencie, że gałąź prawa zawiera parę formuł wzajem sprzecznych: są to formuły o numerach (1_d) oraz (3_p). Zgodnie z podanym wyżej zaleceniem, gałąź tę ***zamykamy***, dopisując do niej liść informujący o wystąpieniu pary formuł wzajem sprzecznych: $\times_{1_d,3_p}$. W dalszej konstrukcji tabeli, gałęzi tej nie bierzemy już pod uwagę.

Przykład 2

- Pozostaje zatem gałąź kończąca się formułą o numerze (3_l) oraz jedna tylko formuła *niezredukowana*, czyli taka, do której dotąd nie zastosowano żadnej reguły rozkładu podanej w spisie tablic atomowych. Jest to formuła o numerze (2_d), będąca implikacją. W kroku 4. stosujemy do niej regułę dla implikacji, podaną w spisie tablic atomowych: tworzymy rozgałęzienie, umieszczając w lewej jego gałęzi formułę (4_l) $\neg\neg p$ (czyli zaprzeczony poprzednik implikacji (2_d)), a w jego prawej gałęzi formułę (4_p) q (czyli następnik implikacji (2_d)).
- Zauważamy (!) w tym momencie, że gałąź prawa zawiera parę formuł wzajem sprzecznych: są to formuły o numerach (1_d) oraz (3_p). Zgodnie z podanym wyżej zaleceniem, gałąź tę ***zamykamy***, dopisując do niej liść informujący o wystąpieniu pary formuł wzajem sprzecznych: $\times_{1_d,4_p}$. W dalszej konstrukcji tabeli, gałęzi tej nie bierzemy już pod uwagę.

Przykład 2

- Jedyna pozostała gałąź otwarta to ciąg formuł zaczynający się od formuły (0), a kończący się formułą (4_l). Do formuły o numerze (4_l), a więc do formuły $\neg\neg p$ stosujemy, w kroku 5., regułę dla podwójnej negacji, wymienioną w zestawie tablic atomowych. W rezultacie wykonania kroku 5. otrzymujemy formułę o numerze (5), czyli p, którą podpisujemy pod formułą o numerze (4_l).
- Zauważamy (!!) teraz dwie rzeczy:
  - Na gałęzi zaczynającej się od formuły (0), a kończącej się formułą (5) występuje para formuł wzajem sprzecznych: są to formuły o numerach (3_l) oraz (4_l), a także formuły o numerach: (3_l) oraz (5). Zgodnie z podanym wyżej zaleceniem, gałąź tę ***zamykamy***, dopisując do niej liść informujący o wystąpieniu pary formuł wzajem sprzecznych: $\times_{3_l,5}$ (albo: $\times_{3_l,4_l}$).
  - ***Wszystkie*** gałęzie tablicy są zamknięte (sprzeczne). Zbudowaliśmy zatem ***sprzeczną*** tablicę analityczną o korzeniu $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$.

Przykład 2

Koniec pracy. Pozostaje tylko ogłoszenie wyniku: skoro tablica o korzeniu $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ jest sprzeczna, to pokazaliśmy tym samym, że formuła:

$$((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q,$$

nasze ulubione prawo ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz***, ma dowód tablicowy (jest nim właśnie zbudowana przed chwilą tablica). W innym jeszcze, równoznacznym, sformułowaniu: formuła ta jest tablicowo dowodliwa (jest tezą systemu tablic analitycznych):

$$\vdash_{tab} ((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q.$$

Przykład 2

Uwaga. Zauważmy, że dla zamknięcia „najbardziej lewej" gałęzi powyższej tablicy nie było konieczne wykonanie kroku 5.; już wcześniej (przed wykonaniem tego kroku) na gałęzi tej znajdowała się para formuł wzajem sprzecznych: były to formuły o numerach (3_l) oraz (4_l).
Uwaga. Zaleca się porównanie konstrukcji powyższej tabeli analitycznej (w tym przypadku: dowodu tablicowego) z komentarzem dotyczącym prawa ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz*** zamieszczonym wyżej.
Uwaga. Staramy się, aby rysowane drzewa były, w miarę możności, estetyczne, a więc np.: gałąź pod daną formułą rozpoczynała się pod spójnikiem głównym tej formuły, formuły pod łańcuchami „biegnącymi" w lewo lub prawo znajdowały się mniej więcej w takim miejscu, aby dochodząca do nich krawędź wypadała w ich „środku", itp. Nie zawsze się to udaje i porażka estetyczna nie jest powodem, aby chlipać i rozdzierać szatę. W przypadku tabeli wyżej pokazanej, np. korzeń drzewa należałoby usytuować na rysunku nieco inaczej niż to uczyniono.

W dalszym ciągu będziemy czasem korzystać z możliwości liniowego uporządkowania wierzchołków tablicy analitycznej.

Przykład 3

Zbudujemy tablice analityczne:

- (1) dla formuły $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$ oraz
- (2) dla zaprzeczenia tej formuły, tj. dla formuły $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q))$.

Przykład 3

$(0)\quad (p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q) \qquad 1.^{\rightarrow}$

$(1_l)\quad \neg(p \rightarrow q) \qquad 2.^{\neg\rightarrow}$

$(2_g)\quad p$

$(2_d)\quad \neg q$

$\circ_1$

$(1_p)\quad \neg(p \rightarrow \neg q) \qquad 3.^{\neg\rightarrow}$

$(3_g)\quad p$

$(3_d)\quad \neg\neg q \qquad 4.^{\neg\neg}$

$(4)\quad q$

$\circ_2$

Przykład 3

$(0)\quad \neg[(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)] \quad ^{1.\neg\rightarrow}$

$(1_g)\quad p \rightarrow q \quad ^{3.\rightarrow}$

$(1_d)\quad \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \quad ^{2.\neg\neg}$

$(2)\quad p \rightarrow \neg q \quad ^{4.\rightarrow}$

$(3_l)\quad \neg p$ | $(3_p)\quad q$

$(4_l)\quad \neg p$ | $(4_p)\quad \neg q$ | $(4_l)\quad \neg p$ | $(4_p)\quad \neg q$

$\circ_1$ | $\circ_2$ | $\circ_3$ | $\times_{\mathbf{3_p},\mathbf{4_p}}$

Trafność metody TA

Twierdzenie 1. ***Trafność Metody Tablic Analitycznych.***

Jeśli α ma dowód tablicowy, to α jest tautologią KRZ.

Tak więc, wszystko, co możemy udowodnić metodą tablicową okazuje się prawem (tautologią) KRZ.
Jest (w połowie) dobrze.

Dowód twierdzenia 1.: w pliku tabkrz.pdf.

Pełność metody TA

Twierdzenie 2. ***Pełność Metody Tablic Analitycznych.***

Jeśli α jest tautologią KRZ, to α ma dowód tablicowy.

Tak więc, każde prawo (tautologia) KRZ ma dowód tablicowy.
Jest całkiem dobrze.

Dowód twierdzenia 2.: w pliku **tabkrz.pdf**.

Tabele analityczne ze zbioru założeń

Niech X będzie (być może nieskończonym) zbiorem formuł języka KRZ. Definiujemy ***tablice analityczne ze zbioru założeń*** X przez indukcję:

- Każda tablica atomowa jest tablicą analityczną ze zbioru założeń X.
- Jeśli D jest tablicą analityczną ze zbioru założeń X oraz $\alpha \in X$, to $\bigsqcup(D \sqcup_P \alpha)$ jest tablicą analityczną ze zbioru założeń X, gdzie suma $\bigsqcup$ brana jest po wszystkich gałęziach otwartych w D.
- Jeśli D jest tablicą analityczną ze zbioru założeń X, P gałęzią w D, a $\alpha \in X$, to $D \sqcup_P D_\alpha$ jest tablicą analityczną ze zbioru założeń X.

Konsekwencja tablicowa

Dowodem tablicowym formuły α ***ze zbioru założeń*** X nazywamy każdą sprzeczną tablicę analityczną ze zbioru założeń X o korzeniu $\neg\alpha$.

Jeśli istnieje dowód tablicowy formuły α ze zbioru założeń X, to mówimy że α jest ***konsekwencją tablicową*** X (lub: α jest ***tablicowo dowodliwa*** (***wyprowadzalna***) z X) i piszemy wtedy: $X \vdash_{tab} \alpha$.

- Operacja ***konsekwencji tablicowej*** C_{tab} zdefiniowana jest następująco:

$$C_{tab}(X) = \{\alpha \in F_{KRZ} : X \vdash_{tab} \alpha\}.$$

Trafność, pełność, zwartość

Twierdzenie 3. ***Trafność dowodów tablicowych z założeń.***
Jeśli α ma dowód tablicowy z założeń X, to $X \models_{KRZ} \alpha$, czyli α wynika logicznie z X.

Twierdzenie 4. ***Pełność dowodów tablicowych z założeń.***
Jeśli α wynika logicznie z X (czyli $X \models_{KRZ} \alpha$), to α ma dowód tablicowy z założeń X.

Twierdzenie 5. ***Zwartość.***
Niech X będzie (być może nieskończonym) zbiorem formuł języka KRZ. X jest spełnialny (semantycznie niesprzeczny) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy skończony podzbiór Y zbioru X jest spełnialny.

Dowody twierdzeń 3.–5.: w pliku tabkrz.pdf.

I co dalej?

Wiedząc, że metoda TA jest trafna i pełna, możemy ją wykorzystać dla ustalania czy:

- dana formuła jest spełnialna,
- dana formuła jest odrzucalna,
- dana formuła jest tautologią KRZ,
- dana formuła jest kontrtautologią KRZ,
- dany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny,
- dana formuła wynika logicznie z podanego zbioru formuł.

Wykorzystamy poniżej niektóre już wcześniej rozważane przykłady, dla ilustracji, jak ten sam problem można rozwiązywać różnymi metodami.

Tautologie i kontrtautologie KRZ

Przypominamy:

- Formuła α jest **tautologią** KRZ (prawem KRZ) wtedy i tylko wtedy, gdy ma wartość 1 przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych.
- Formuła α jest **kontrtautologią** KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy gdy ma wartość 0 przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych.

Aby móc stwierdzić, że formuła ma przy **każdym** wartościowaniu wartość:

- **1** — należy **wykluczyć** możliwość, że ma ona wartość **0** przy **jakimś** wartościowaniu,
- **0** — należy **wykluczyć** możliwość, że ma ona wartość **1** przy **jakimś** wartościowaniu.

Przykład 4

Przykład 4. Czy formuła $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$ jest tautologią czy kontrtautologią rachunku zdań?

Rozpoczynamy od sprawdzenia czy formuła ta jest tautologią KRZ. Budujemy tablicę analityczną dla **negacji** tej formuły (co odpowiada przypuszczeniu, że formuła w korzeniu przyjmuje wartość 1 dla jakiegoś wartościowania):

Przykład 4

- $(0)\ \neg((p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q))\ ^{1.\neg\rightarrow}$
  - $(1_g)\ p \rightarrow q\ ^{2.\rightarrow}$
    - $(1_d)\ \neg(p \wedge \neg q)\ ^{3.\neg\wedge}$
      - $(2_l)\ \neg p$
        - $(3_l)\ \neg p$
        - $(3_p)\ \neg\neg q\ ^{4.\neg\neg}$
          - $(4)\ q$
      - $(2_p)\ q$
        - $(3_l)\ \neg p$
        - $(3_p)\ \neg\neg q\ ^{5.\neg\neg}$
          - $(5)\ q$

Z istnienia gałęzi otwartej (akurat wszystkie są otwarte) w powyższym drzewie wynika, że formuła $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$ nie jest tautologią KRZ.

Przykład 4

Sprawdzimy, czy jest ona kontrtautologią:

$$(0)\ (p \to q) \to (p \wedge \neg q)^{\ 1.\to}$$

$$(1_l)\ \neg(p \to q)^{\ 2.\neg\to} \qquad (1_p)\ p \wedge \neg q^{\ 3.\wedge}$$

$$(2_g)\ p \qquad\qquad (2_g)\ p$$

$$(2_d)\ \neg q \qquad\qquad (2_d)\ \neg q$$

Z istnienia gałęzi otwartej (akurat wszystkie są otwarte) w powyższym drzewie wynika, że formuła $(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$ nie jest kontrtautologią KRZ.

Przykład 5. **Modus ponendo ponens**: $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \beta$

$$\neg[(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha \rightarrow \beta] \quad {}^{1.\neg\rightarrow}$$

$$(1_g) \quad (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha \quad {}^{2.\wedge}$$

$$(1_d) \quad \neg\beta$$

$$(2_g) \quad \alpha \rightarrow \beta \quad {}^{3.\rightarrow}$$

$$(2_d) \quad \alpha$$

$$(3_l) \quad \neg\alpha \qquad\qquad (3_p) \quad \beta$$

$$\times_{2_d, 3_l} \qquad\qquad \times_{1_d, 3_p}$$

Tablica analityczna formuły $\neg(((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \beta)$ ma wszystkie gałęzie zamknięte, a zatem formuła $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \beta$ jest tautologią KRZ.

Przykład 6. **Modus tollendo tollens**: $((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$

$\neg[(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta \to \neg\alpha]$ $^{1.\neg\to}$

(1_g) $(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta$ $^{3.\wedge}$

(1_d) $\neg\neg\alpha$ $^{2.\neg\neg}$

(2) α

(3_g) $\alpha \to \beta$ $^{4.\to}$

(3_d) $\neg\beta$

(4_l) $\neg\alpha$ — $\times_{2,4_l}$

(4_p) β — $\times_{3_d,4_p}$

Tablica analityczna formuły $\neg(((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha)$ ma wszystkie gałęzie zamknięte, a zatem formuła $((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$ jest tautologią KRZ.

Semantyczna niesprzeczność

Przypominamy:

Zbiór formuł X jest **semantycznie niesprzeczny**, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie formuły z tego zbioru mają wartość 1. W przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór ten jest **semantycznie sprzeczny**.

Zatem, zbiór formuł jest semantycznie **sprzeczny** wtedy i tylko wtedy, gdy **nie istnieje** wartościowanie przy którym wszystkie formuły z tego zbioru mają wartość 1.

Do badania czy dany zbiór formuł języka rachunku zdań jest semantycznie niesprzeczny można zastosować tabele analityczne w następujący sposób:

1. Przypuszczamy, że istnieje takie wartościowanie, przy którym wszystkie formuły z rozważanego zbioru przyjmują wartość 1.
2. Budujemy tablicę analityczną, w której umieszczamy formuły z badanego zbioru (numerując je przez $0.1, 0.2, \ldots$).
3. Z kształtu otrzymanego drzewa odczytujemy odpowiedź:
   - i) **zbiór jest semantycznie niesprzeczny**, gdy drzewo ma co najmniej jedną gałąź otwartą,
   - ii) **zbiór jest semantycznie sprzeczny** jeżeli wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte.

Przypadek ii) przeczy założeniu poczynionemu na początku (w punkcie 1) przypuszczeniu, co oznacza, że nie istnieje takie wartościowanie przy którym wszystkie formuły z rozważanego zbioru mają wartość 1. A co za tym idzie, badany zbiór zdań jest semantycznie sprzeczny. W przeciwnym przypadku jest on semantycznie niesprzeczny, a wartościowanie przy którym wszystkie formuły z rozważanego zbioru przyjmują wartość 1 można odczytać z gałęzi otwartej drzewa.

Przykład 7: Ekonomista Telewizyjny

Przypomnijmy naszego Ekonomistę Telewizyjnego:

Jest kapitalizm lub nie ma bezrobocia. Jeśli jest recesja, to jest także bezrobocie. Nie ma jednak jednocześnie: biedy oraz braku recesji. Jest bieda, a nie ma kapitalizmu.

Zdania proste w powyższym tekście to:

- p — Jest kapitalizm.
- q — Jest bezrobocie.
- r — Jest recesja.
- s — Jest bieda.

Przykład 7: Ekonomista Telewizyjny

Schematy składniowe zdań badanego tekstu to:

- $p \vee \neg q$
- $r \rightarrow q$
- $\neg(s \wedge \neg r)$
- $s \wedge \neg p$.

Pokazaliśmy już, że:

- rozważany tekst jest semantycznie sprzeczny (używaliśmy przy tym funkcji prawdziwościowych)
- rozważany tekst jest syntaktycznie sprzeczny (używaliśmy przy tym dowodów założeniowych).

Teraz pokażemy, że tablica analityczna, w której pniu są powyższe zdania złożone ma wszystkie gałęzie zamknięte.

$(0.1)\ p \vee \neg q\ ^{2.\vee}$

$(0.2)\ r \rightarrow q\ ^{4.\rightarrow}$

$(0.3)\ \neg(s \wedge \neg r)\ ^{3.\neg\wedge}$

$(0.4)\ s \wedge \neg p\ ^{1.\wedge}$

$(1_g)\ s$

$(1_d)\ \neg p$

- $(2_l)\ p$
  - $\times_{1_d, 2_l}$
- $(2_p)\ \neg q$
  - $(3_l)\ \neg s$
    - $\times_{1_g, 3_l}$
  - $(3_p)\ \neg\neg r$
    - $(4_l)\ \neg r$
      - $\times_{3_p, 4_l}$
    - $(4_p)\ q$
      - $\times_{2_p, 4_p}$

Przykład 8

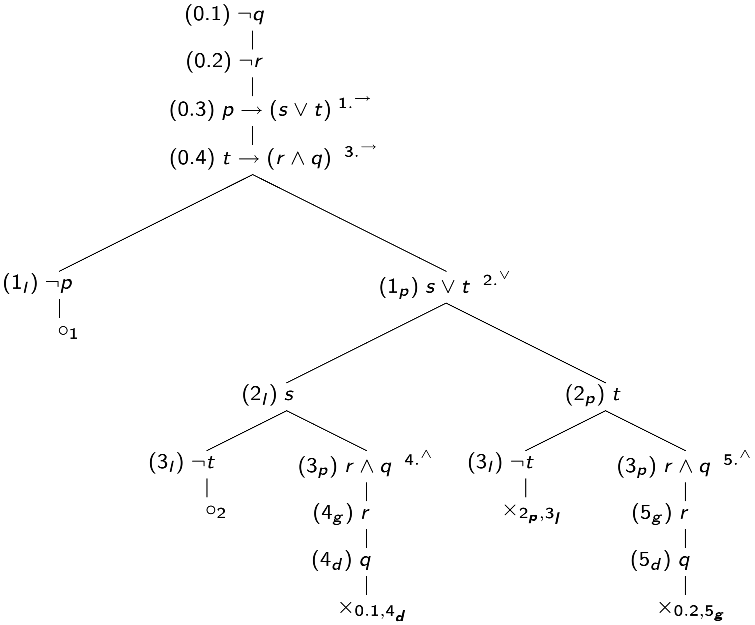
Przykład 8.

Sprawdzimy, czy zbiór formuł:

$$\{\neg q, \neg r, p \rightarrow (s \vee t), t \rightarrow (r \wedge q)\}$$

jest semantycznie niesprzeczny.

Umieszczamy zatem powyższe formuły w pniu tablicy i sprawdzamy, czy tablica ma co najmniej jedną gałąź otwartą:


(0.1) $\neg q$
(0.2) $\neg r$
(0.3) $p \rightarrow (s \vee t)$ $1.^{\rightarrow}$
(0.4) $t \rightarrow (r \wedge q)$ $3.^{\rightarrow}$
(1_l) $\neg p$
$\circ_1$
(1_p) $s \vee t$ $2.^{\vee}$
(2_l) s
(2_p) t
(3_l) $\neg t$
$\circ_2$
(3_p) $r \wedge q$ $4.^{\wedge}$
(4_g) r
(4_d) q
$\times_{0.1,4_d}$
(3_l) $\neg t$
$\times_{2_p,3_l}$
(3_p) $r \wedge q$ $5.^{\wedge}$
(5_g) r
(5_d) q
$\times_{0.2,5_g}$

Przykład 8

Tablica ma (dwie) gałęzie otwarte:

- formuły o numerach: (0.1), (0.2), (0.3), (0.4), (1_l);
- formuły o numerach: (0.1), (0.2), (0.3), (0.4), (1_p), (2_l), (3_l),

a więc rozważany zbiór jest semantycznie niesprzeczny.

Przykład 9: Roztargniony Lekarz

Przypomnijmy Roztargnionego Lekarza:
Pacjentka ma krew w moczu, chociaż nie ma wysokiej gorączki. Zaraz, jak to było na wykładach. . . Nie jest tak, aby jednocześnie była krew w moczu, a nie było przerzutów nowotworowych. Jeśli pacjentka ma przerzuty nowotworowe, to zaatakowana jest wątroba. Pacjentka ma wysoką gorączkę, o ile zaatakowana jest wątroba. Taak, no chyba wszystko się zgadza. . .
Na to asystująca Pielęgniarka o Frenetycznej Urodzie (której doktor nie dostrzega), z przekąsem:
Wynika z tego, że pacjentka wyzdrowieje, o ile usuniemy jej oba płuca, prawda, doktorze?

Użyjemy teraz tablic analitycznych dla pokazania, że tekst wygłoszony przez lekarza jest semantycznie sprzeczny.

Przykład 9: Roztargniony Lekarz

Zdania proste w rozważanym tekście:

- p — Pacjentka ma przerzuty nowotworowe.
- q — Zaatakowana jest wątroba.
- r — Pacjentka ma krew w moczu.
- s — Pacjentka ma wysoką gorączkę.

Zdania złożone w tekście doktora mają następujące struktury składniowe:

- 1. $r \wedge \neg s$
- 2. $\neg(r \wedge \neg p)$
- 3. $p \rightarrow q$
- 4. $q \rightarrow s$.

$p \rightarrow q \quad ^{3.\rightarrow}$

$r \wedge \neg s \quad ^{1.\wedge}$

$\neg(r \wedge \neg p) \quad ^{4.\neg\wedge}$

$q \rightarrow s \quad ^{2.\rightarrow}$

$(1_g) \quad r$

$(1_d) \quad \neg s$

- $(2_l) \quad \neg q$
  - $(3_l) \quad \neg p$
    - $(4_l) \quad \neg r$
      - $\times_{1_g, 4_l}$
    - $(4_p) \quad \neg\neg p$
      - $\times_{3_l, 4_p}$
  - $(3_p) \quad q$
    - $\times_{2_l, 3_p}$
- $(2_p) \quad s$
  - $\times_{1_d, 2_p}$

Wszystkie gałęzie są zamknięte, a więc tekst lekarza jest semantycznie sprzeczny. Wynika więc z niego wszystko, także to, że wyzdrowiejesz, gdy usuną ci oba płuca.

Wynikanie logiczne

Przypominamy:

- Formuła α **wynika logicznie ze zbioru formuł zdaniowych** X wtedy i tylko wtedy, gdy formuła α ma wartość 1 przy każdym wartościowaniu, przy którym wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1.

Szczególnym przypadkiem jest wynikanie logiczne formuły z formuły:

- Formuła β **wynika logicznie z formuły** α wtedy i tylko wtedy, gdy β ma wartość 1 przy każdym wartościowaniu, przy którym formuła α ma wartość 1.

Do sprawdzenia, czy dana formuła α wynika ze zbioru formuł zdaniowych X można wykorzystać tabele analityczne w następujący sposób:

- zakładamy, że wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1 przy dowolnym wartościowaniu w zmiennych zdaniowych,
- przypuszczamy, że formuła α ma wartość 0 przy wartościowaniu w (tzn. formuła $\neg\alpha$ ma wartość 1 przy wartościowaniu w),
- budujemy tablicę analityczną, w której umieszczamy wszystkie formuły ze zbioru X oraz formułę $\neg\alpha$.

Gałęzie otwarte w otrzymanym drzewie odpowiadają wartościowaniom, przy których wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1, a formuła α ma wartość 0. Zatem, jeśli drzewo:

- ma choć jedną gałąź otwartą, to formuła α **nie wynika logicznie** ze zbioru formuł zdaniowych X,
- ma wszystkie gałęzie zamknięte, to formuła α **wynika logicznie** ze zbioru formuł X.

Wynikanie logiczne

Jeżeli otrzymane drzewo ma wszystkie gałęzie zamknięte, to oznacza to, że **nie istnieje** wartościowanie, przy którym wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1, a formuła α ma wartość 0. Wtedy, zgodnie z definicją, formuła α wynika logicznie ze zbioru formuł X.

Innymi słowy:

- Formuła α wynika logicznie ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór formuł $X \cup \{\neg\alpha\}$ jest semantycznie sprzeczny.
- Formuła α nie wynika logicznie ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór formuł $X \cup \{\neg\alpha\}$ jest semantycznie niesprzeczny.

Przykład 10

Przykład 10.
Sprawdzimy, czy formuła $\neg q \rightarrow \neg p$ wynika logicznie z formuły $p \rightarrow q$.

Przypuśćmy, że istnieje takie wartościowanie, przy którym formuła $p \rightarrow q$ ma wartość 1, a formuła $\neg q \rightarrow \neg p$ ma wartość 0 (odpowiada to przypuszczeniu, że przy takim wartościowaniu implikacja $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ ma wartość 0). Sprawdzamy, czy takie wartościowanie istnieje budując tablicę analityczną, w której umieszczamy formuły: $p \rightarrow q$ oraz $\neg(\neg q \rightarrow \neg p)$:

$$(0.1)\ p \rightarrow q \quad ^{3.\rightarrow}$$

$$(0.2)\ \neg(\neg q \rightarrow \neg p) \quad ^{1.\neg\rightarrow}$$

$$(1_g)\ \neg q$$

$$(1_d)\ \neg\neg p \quad ^{2.\neg\neg}$$

$$(2)\ p$$

$$\begin{array}{cc} (3_l)\ \neg p & (3_p)\ q \\ \times_{2,3_l} & \times_{1_g,3_p} \end{array}$$

Otrzymane drzewo ma wszystkie gałęzie zamknięte. Nie istnieje zatem wartościowanie, przy którym formuła $p \rightarrow q$ ma wartość 1, a formuła $\neg q \rightarrow \neg p$ ma wartość 0. Zatem formuła $\neg q \rightarrow \neg p$ **wynika logicznie** z formuły $p \rightarrow q$.

Przykład 11: Istnienie Boga a Sens Życia

Przykład 10. Sprawdzimy, które ze zdań:
a) *Bóg istnieje.*
b) *Bóg nie istnieje*.
c) *Życie ma sens*.
d) *Życie nie ma sensu*.
wynika logicznie ze zdania
e) *Nieprawda, że: życie nie ma sensu, o ile Bóg nie istnieje.*

Mamy zdania proste: p — *Bóg istnieje* oraz q — *Życie ma sens*. Schematy rozważanych zdań wyglądają następująco:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & p \\ \text{b)} & \neg p \\ \text{c)} & q \\ \text{d)} & \neg q \\ \text{e)} & \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \end{array}$$

Przykład 11: Istnienie Boga a Sens Życia

1

$(0.1)\ \neg(\neg p \rightarrow \neg q)\ ^{1.\neg\rightarrow}$

$(0.2)\ \neg p$

$(1_g)\ \neg p$

$(1_d)\ \neg\neg q\ ^{2.\neg\neg}$

$(2)\ q$

$\circ$

2

$(0.1)\ \neg(\neg p \rightarrow \neg q)\ ^{2.\neg\rightarrow}$

$(0.2)\ \neg\neg p\ ^{1.\neg\neg}$

$(1)\ p$

$(2_g)\ \neg p$

$(2_d)\ \neg\neg q$

$\times_{1,2_g}$

Przykład 11: Istnienie Boga a Sens Życia

3

$$
\begin{array}{rl}
(0.1) & \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \quad ^{1.\neg\rightarrow} \\
 & | \\
(0.2) & \neg q \\
 & | \\
(1_g) & \neg p \\
 & | \\
(1_d) & \neg\neg q \quad ^{2.\neg\neg} \\
 & | \\
(2) & q \\
 & | \\
 & \times_{0.2,2}
\end{array}
$$

4

$$
\begin{array}{rl}
(0.1) & \neg(\neg p \rightarrow \neg q) \quad ^{2.\neg\rightarrow} \\
 & | \\
(0.2) & \neg\neg q \quad ^{1.\neg\neg} \\
 & | \\
(1) & q \\
 & | \\
(2_g) & \neg p \\
 & | \\
(2_d) & \neg\neg q \quad ^{3.\neg\neg} \\
 & | \\
(3) & q \\
 & | \\
 & \circ
\end{array}
$$

Ponieważ tablice 2 oraz 3 mają wszystkie gałęzie (tu: jedną) zamknięte, ze zdania ***Nieprawda, że: życie nie ma sensu, o ile Bóg nie istnieje*** **wynikają logicznie** zdania: ***Bóg nie istnieje*** oraz ***Życie ma sens***. **Przemyśl to.**

Przykład 12: Nasza Pani od Biologii

Na żadnym wykładzie nie może zabraknąć Naszej Pani od Biologii. Dziś przeprowadza ona następujące wnioskowanie:

Jeśli Łabędzie jedzą Myszy, to: w Przyrodzie jest równowaga, o ile Lisy zjadają Łabędzie. W Przyrodzie nie ma równowagi, jeśli człowiek zjada wszystko.
No cóż, wynika stąd, że Lisy nie zjadają Łabędzi, jeśli Łabędzie jedzą Myszy.

Czy jest to wnioskowanie dedukcyjne, tj. czy wniosek wynika logicznie z przesłanek?

Przykład 12: Nasza Pani od Biologii

Zdania proste:

- p — *Łabędzie jedzą Myszy*.
- q — *Lisy zjadają Łabędzie*.
- r — *W Przyrodzie jest równowaga*.
- s — *Człowiek zjada wszystko*.

Struktury składniowe zdań złożonych:

- Pierwsza przesłanka: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- Druga przesłanka: $s \rightarrow \neg r$
- Wniosek: $p \rightarrow \neg q$.

Aby wykazać, że wnioskowanie jest dedukcyjne, staramy się **wykluczyć**, że wniosek jest fałszywy przy prawdziwych przesłankach:

$(0.1)\ p \to (q \to r)\ ^{3.\to}$

$(0.2)\ s \to \neg r\ ^{5.\to}$

$(0.3)\ \neg(p \to \neg q)\ ^{1.\neg\to}$

$(1_g)\ p$

$(1_d)\ \neg\neg q\ ^{2.\neg\neg}$

$(2)\ q$

$(3_l)\ \neg p$ — $\times_{1_g, 3_l}$

$(3_p)\ q \to r\ ^{4.\to}$

$(4_l)\ \neg q$ — $\times_{2, 4_l}$

$(4_p)\ r$

$(5_l)\ \neg s$ — $\circ$

$(5_p)\ \neg r$ — $\times_{4_p, 5_p}$

Przykład 12: Nasza Pani od Biologii

Nie została wykluczona możliwość, że wniosek jest fałszywy przy prawdziwych przesłankach. Jest tak mianowicie wtedy, gdy:

- *Łabędzie jedzą Myszy*.
- *Lisy zjadają Łabędzie*.
- *W Przyrodzie jest równowaga*.
- *Nieprawda, że człowiek zjada wszystko*.

Pokazaliśmy, że reguła wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ s \rightarrow \neg r \end{array}}{p \rightarrow \neg q}$$

jest zawodna.

Przykład 12: Nasza Pani od Biologii

O drzewach

Grafem nazywamy dowolną parę $\langle X, R\rangle$, gdzie X jest zbiorem, a R jest podzbiorem $X \times X$. Elementy zbioru X nazywamy ***wierzchołkami***, a elementy zbioru R ***krawędziami*** grafu $\langle X, R\rangle$.

Mówimy, że relacja R na zbiorze X jest (ostrym) ***częściowym porządkiem*** w X, jeśli jest ona asymetryczna i przechodnia w X (lub, co na to samo wychodzi: przeciwzwrotna i przechodnia w X).

Każdy spójny porządek częściowy nazywamy ***porządkiem liniowym***. Liniowy porządek R w X nazywamy ***dobrym porządkiem*** w X, jeśli każdy niepusty podzbiór X ma element R-najmniejszy.

O drzewach

Przypomnienie. Mówimy, że relacja R w zbiorze X jest:

- asymetryczna, jeśli dla dowolnych x oraz y: jeżeli zachodzi xRy, to nie zachodzi yRx
- przechodnia, jeśli dla dowolnych x, y oraz z: jeżeli zachodzi xRy i yRz, to zachodzi xRz
- spójna, jeśli dla dowolnych x oraz y: jeżeli x jest różny od y, to zachodzi albo xRy, albo yRx.

Element x zbioru X jest elementem R-najmniejszym, jeśli dla wszystkich y ze zbioru X zachodzi: xRy.

Więcej o relacjach i ich własnościach powiemy później, przy omawianiu KRP.

O drzewach

Drzewem (o korzeniu x_0***)*** nazwiemy każdy układ $\langle X, R, x_0 \rangle$ taki, że:

- $\langle X, R \rangle$ jest grafem;
- x_0 jest elementem R-najmniejszym w X;
- R jest przechodnia w X;
- R jest asymetryczna w X;
- dla każdego elementu zbioru $X - \{x_0\}$, zbiór jego wszystkich R-poprzedników jest dobrze uporządkowany przez relację R.

Zauważmy, że jeśli $\langle X, R, x_0 \rangle$ jest drzewem, to:

- zbiór wszystkich R-poprzedników każdego elementu zbioru $X - \{x_0\}$ jest liniowo uporządkowany;
- relacja R jest przeciwzwrotna w X (xRx nie zachodzi dla żadnego x z X).

O drzewach

Niech $D = \langle X, R, x_0 \rangle$ będzie drzewem o korzeniu x_0.
Liśćmi drzewa D nazywamy wszystkie te jego wierzchołki, które nie mają R-następników.
Jeśli D jest drzewem, to przez r_D oznaczmy wierzchołek D, a przez L_D zbiór wszystkich liści drzewa D.
Jeśli $(x, y) \in R$ jest krawędzią w D, to x nazywamy ***przodkiem*** y, a y nazywamy ***potomkiem*** x. Jeśli $(x, y) \in R - R^2$ jest krawędzią w D, to x nazywamy ***bezpośrednim przodkiem*** y, a y nazywamy ***bezpośrednim potomkiem*** x.

Każdy podzbiór zbioru wierzchołków drzewa D, który jest uporządkowany liniowo przez R nazywamy ***łańcuchem*** w D. Każdy łańcuch maksymalny (względem inkluzji) w D nazywamy ***gałęzią*** w D. Zamiast terminu *łańcuch* używa się również terminu ***ścieżka***. Przez ***długość*** łańcucha P rozumiemy liczbę elementów zbioru P. ***Pniem*** drzewa D nazywamy część wspólną wszystkich gałęzi D.

O drzewach

Rzędem wierzchołka x nazywamy moc zbioru wszystkich potomków x. ***Rzędem*** drzewa D jest kres górny rzędów wszystkich wierzchołków drzewa D. Drzewo D jest ***skończone***, jeśli zbiór jego wierzchołków jest skończony. Drzewo D jest ***nieskończone***, jeśli zbiór jego wierzchołków jest nieskończony. Drzewo D jest ***rzędu skończonego***, jeśli jego rząd jest liczbą skończoną.

Przez indukcję definiujemy ***poziomy*** drzewa:

- poziom ***zerowy*** to zbiór jednoelementowy, złożony z korzenia drzewa;
- poziom $\boldsymbol{k+1}$ to zbiór wszystkich bezpośrednich następników wierzchołków poziomu $\boldsymbol{k}$.

Wysokością drzewa jest największa liczba n taka, że istnieje poziom n w drzewie. Jeśli drzewo ma wierzchołki poziomu n dla każdej liczby naturalnej n, to mówimy, że wysokość drzewa jest ***nieskończona*** (równa ω).

O drzewach

Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma najwyżej n bezpośrednich potomków, nazywamy ***drzewem n-arnym***. W szczególności:

- Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma najwyżej dwóch bezpośrednich potomków nazwiemy ***drzewem nierozwojowym w sensie watykańskim***, w skrócie ***nw-drzewem***.
- Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków nazywamy ***drzewem dwójkowym*** (używa się też terminu ***drzewo binarne***).

Ważnym twierdzeniem, z którego wielokrotnie będziemy korzystać, jest następujący:

O drzewach

Lemat Königa. Jeśli drzewo D rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.

Dowód. Przypuśćmy, że D jest nieskończone. Zdefiniujemy gałąź nieskończoną $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w D przez indukcję.
Za element x_0 bierzemy korzeń drzewa D. Ponieważ D jest nieskończone, więc x_0 ma nieskończenie wiele R-następników.
Przypuśćmy, że $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zostały zdefiniowane tak, że x_i należy do i-tego poziomu drzewa D oraz x_i ma nieskończenie wiele R-następników.
Z założenia, x_{n-1} ma tylko skończenie wiele ***bezpośrednich*** R-następników.
Ponieważ x_{n-1} ma nieskończenie wiele R-następników, więc co najmniej jeden z jego bezpośrednich R-następników także ma nieskończenie wiele R-następników.
Wybieramy więc element x_n z n-tego poziomu drzewa D o tej właśnie własności.
Wtedy x_n ma nieskończenie wiele R-następników. Ponieważ jest tak dla każdego n, pokazaliśmy istnienie nieskończonej gałęzi $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w drzewie D.

O drzewach

Lemat Königa można też wysłowić następująco:

- Jeśli D jest drzewem rzędu skończonego i dla każdej liczby naturalnej n w D istnieją łańcuchy o co najmniej n elementach, to D ma łańcuch nieskończony.

Mówimy, że $\langle Y, Q, y_0 \rangle$ jest ***poddrzewem*** drzewa $\langle X, R, x_0 \rangle$, gdy:

- 1) $Y \subseteq X$, $Q = R \cap Y^2$
- 2) $\langle Y, Q, y_0 \rangle$ jest drzewem o wierzchołku y_0.

Jeśli D_1 jest poddrzewem D_2, to piszemy $D_1 \ll D_2$.

Jeśli P jest gałęzią (skończoną) w drzewie D, to niech $P_{\mho}$ oznacza liść drzewa D należący do P.

O drzewach

Niech $D_1 = \langle X, R, x_0 \rangle$ i $D_2 = \langle Y, Q, y_0 \rangle$ będą drzewami, $X \cap Y = \emptyset$, niech P będzie gałęzią w D_1 i niech drzewo $D_3 = \langle Z, S, z_0 \rangle$ będzie zdefiniowane w sposób następujący:

- $Z = X \cup Y$
- $z_0 = x_0$
- $S \cap X^2 = R$
- $S \cap Y^2 = Q$
- $(P_{\mho}, y_0) \in S$.

Mówimy wtedy, że drzewo D_3 jest ***przedłużeniem*** drzewa D_1 na gałęzi P o drzewo D_2 i piszemy $D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2 \sqsubset D_3$.

Przedłużanie polega zatem, intuicyjnie mówiąc, na „doczepianiu" drzewa do liści innego drzewa. Zauważmy, że jest to relacja czteroargumentowa.

O drzewach

Dla dowolnych drzew D_1 oraz D_3 oraz gałęzi P drzewa D_1, jeśli istnieje D_2 takie, że $D_1 \sqcup_{P_\mho} D_2 \sqsubset D_3$, to piszemy $D_1 \sqsubset_{P_\mho} D_3$. Dla dowolnych drzew D_1 oraz D_3, piszemy $D_1 \sqsubset D_3$, jeśli istnieje gałąź P w D_1 taka, że $D_1 \sqsubset_{P_\mho} D_3$. Piszemy $D = D_1 \sqcup_{P_\mho} D_2$, jeśli istnieje D_3 takie, że $D_1 \sqcup_{P_\mho} D_2 \sqsubset D_3$. Piszemy $D = D_1 \sqcup D_2$, jeśli istnieje gałąź P w D_1 taka, że $D_1 \sqcup_{P_\mho} D_2 \sqsubset D$.

Relacje $\ll$ oraz $\sqsubset$ są częściowymi porządkami (w ustalonej rodzinie drzew). Nie będą nam potrzebne żadne specjalne operacje na drzewach (m.in. wyznaczone przez te porządki), oprócz pewnego specjalnego sumowania drzew. Niech mianowicie $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots\}$ będzie rodziną (być może nieskończoną) drzew, dobrze uporządkowaną przez relację $\sqsubset$. Przez ***sumę*** rodziny $\mathcal{D}$ rozumiemy najmniejsze drzewo, które jest przedłużeniem wszystkich drzew z $\mathcal{D}$. Tak zdefiniowaną sumę rodziny $\mathcal{D}$ oznaczamy przez $\bigsqcup \mathcal{D}$.

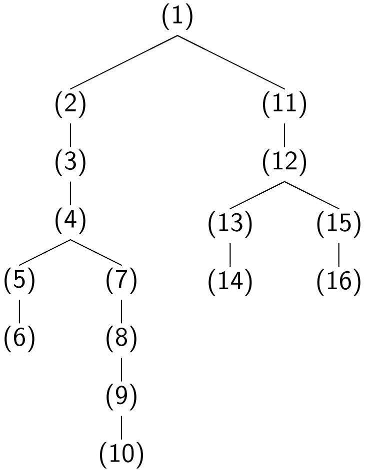
O drzewach

Wszystkie wierzchołki dowolnego drzewa można liniowo uporządkować (odpowiednio je kodując). Szczególnie ważne są dwa tego typu porządki:

- „Porządek poprzeczny". Niech dana będzie ściśle rosnąca funkcja f ze zbioru wierzchołków drzewa D w zbiór liczb naturalnych $\mathcal{N}$. Wierzchołek x f-poprzedza wierzchołek y wtedy i tylko wtedy, gdy: poziom x jest mniejszy od poziomu y lub, gdy x i y są na tym samym poziomie drzewa, $f(x) < f(y)$.

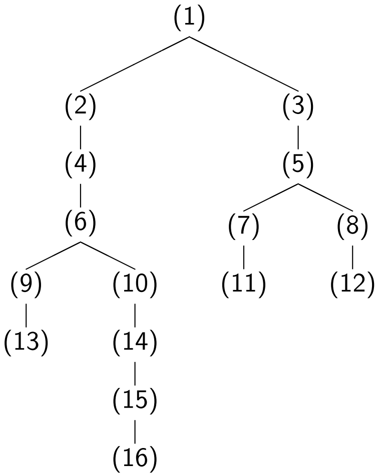
„Porządek wzdłużny”. Niech dana będzie ściśle rosnąca funkcja f ze zbioru wierzchołków drzewa $D = \langle X, R, x_0 \rangle$ w zbiór liczb naturalnych $\mathcal{N}$. Tym razem f-porządek wierzchołków drzewa D określimy przez indukcję. Za bezpośredni f-następnik korzenia x_0 drzewa D (czyli za x_1) bierzemy ten z elementów pierwszego poziomu drzewa, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza. Jeśli x_1 nie jest liściem, to rozpatrujemy z kolei zbiór wszystkich jego bezpośrednich R-następników, dla znalezienia kolejnego elementu f-porządku, tj. elementu x_2: będzie to ten z bezpośrednich R-następników wierzchołka x_1, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza. Jeśli x_1 jest liściem, to za następny w f-porządku (czyli za x_2) bierzemy ten z bezpośrednich R-następników x_0 różnych od x_1, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza. Przypuśćmy, że wierzchołki $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ zostały już ustawione w ciąg liniowy. Spośród bezpośrednich R-następników wierzchołka x_{n-1} wybieramy ten, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza i niech będzie to kolejny wierzchołek w budowanym f-porządku, tj. wierzchołek x_n. Jeśli wierzchołek ten nie jest liściem, to rozpatrujemy z kolei zbiór wszystkich jego bezpośrednich R-następników, dla znalezienia kolejnego elementu f-porządku, tj. elementu x_{n+1}. Jeśli x_n jest liściem, to za następny w f-porządku (czyli za x_{n+1}) bierzemy ten z bezpośrednich R-następników x_{n-1} różnych od x_n, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza.

Porządek wzdłużny wierzchołków:



Wierzchołki drzewa numerowane wedle porządku wzdłużnego.

Porządek poprzeczny wierzchołków:



To samo drzewo, wierzchołki numerowane wedle porządku poprzecznego.

O drzewach

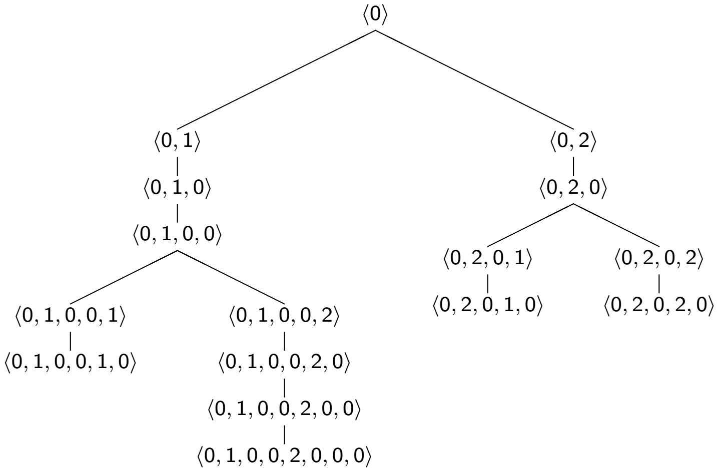
Wierzchołki nw-drzewa mogą być także kodowane ciągami liczb (tu: 0, 1 oraz 2) np. wedle następującej zasady:

- korzeń drzewa otrzymuje kod $\langle 0 \rangle$
- jeśli wierzchołek o kodzie $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ ma dokładnie jednego bezpośredniego potomka, to ów potomek otrzymuje kod $\langle n_1, \ldots, n_m, 0 \rangle$
- jeśli wierzchołek o kodzie $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków, to otrzymują oni kody: $\langle n_1, \ldots, n_m, 1 \rangle$ oraz $\langle n_1, \ldots, n_m, 2 \rangle$.

Można też użyć w kodowaniach jedynie dwóch liczb, np. 0 i 1.

Wierzchołki drzewa z powyższego przykładu zakodowane zostaną tak:

Kodowanie wierzchołków:



O drzewach

Rozważać będziemy tzw. ***drzewa znakowane***. Przez ***drzewo znakowane*** (elementami ze zbioru L) rozumiemy parę uporządkowaną (D, f), gdzie D jest drzewem, a f jest funkcją ze zbioru wierzchołków drzewa D w zbiór L. Zwykle L będzie pewnym zbiorem formuł. Znakowanie drzew formułami pozwala w precyzyjny sposób mówić o ***wystąpieniach*** danej formuły w drzewie.

Graficzne reprezentacje drzew są rysunkami, na których wierzchołki (jakoś znakowane — punktami, liczbami, formułami, itd.) połączone są liniami, odpowiadającymi krawędziom. Przy tym, jeśli $\langle X, R, x_0 \rangle$ jest drzewem, to na rysunku zaznaczamy tylko krawędzie należące do $R - R^2$ (przy tym, poprzedniki R umieszczane są nad następnikami).

Koniec

Pamiętaj:

- metoda tablic analitycznych jest metodą apagogiczną (stosuje rozumowania nie wprost)
- metoda tablic analitycznych jest trafna i pełna
- metoda tablic analitycznych pozwala rozstrzygać (w języku przedmiotowym) czy dana formuła jest tautologią KRZ, czy dany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny, czy zachodzi wynikanie logiczne między przesłankami a wnioskiem.

Pozostałe wykłady w tym semestrze będą poświęcone **Klasycznemu Rachunkowi Predykatów** (KRP).