Semiotyka logiczna (11)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

O logice epistemicznej

Plan na dziś

Plan na dziś:

- o logice epistemicznej;
- własności systemów przekonań;
- logika świadomych, racjonalnych przekonań;
- teorie zmiany przekonań.

Systemy przekonań

Jest spora mnogość różnorakich operatorów doksastycznych i epistemicznych, np.:

- wiem
- wierzę
- sądzę
- nie wykluczam
- dopuszczam możliwość
- mniemam
- podejrzewam
- wątpię
- mam nadzieję
- obawiam się

Buduje się zarówno systemy logiczne, charakteryzujące poszczególne z tych modalności, jak i systemy multimodalne, zawierające więcej niż jeden typ modalności.

Własności systemów przekonań

Można pytać, czy systemy przekonań mają znane własności metalogiczne, np. czy są:

- niesprzeczne;
- zupełne;
- rozstrzygalne, itp.

Jak wiemy z pierwszych dwóch wykładów, możemy również zadawać sensowne pytania dotyczące naszej wiedzy o samych przekoniach, tj. pytania o świadomość wiedzy (przekonań).

Nadto, można także rozważać systemy „bliższe życiu", np. nie wykluczające, iż dane przekonania zawierają poglądy sprzeczne (parakonsystencja).

Logika epistemiczna

Dwa nurty w badaniach logiki wiedzy i przekonań:

- Łoś, Hintikka, von Wright, Pap, Rescher, . . .
- Gärdenfors, Alchourron, Makinson, . . .

Pierwszy z tych nurtów wiąże systemy wiedzy i przekonań z logikami modalnymi, drugi dotyczy w pierwszym rzędzie problematyki zmian systemów przekonań.

System Łosia

To pierwszy system logiki epistemicznej. W języku mamy zmienne i funktory zdaniowe, kwantyfikator $\forall$ wiążący zmienne nazwowe (przebiegające zbiór osób). Operator $\boldsymbol{L}_x$ ma następującą interpretację: $\boldsymbol{L}_x p$ oznacza, że człowiek x uznaje, że p.

Aksjomaty:

1. $\boldsymbol{L}_x p \equiv \neg \boldsymbol{L}_x \neg p$
2. $\boldsymbol{L}_x((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)))$
3. $\boldsymbol{L}_x(p \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$
4. $\boldsymbol{L}_x((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$
5. $\boldsymbol{L}_x(p \rightarrow q) \rightarrow (\boldsymbol{L}_x p \rightarrow \boldsymbol{L}_x q)$
6. $\forall x \boldsymbol{L}_x p \rightarrow p$
7. $\boldsymbol{L}_x \boldsymbol{L}_x p \equiv \boldsymbol{L}_x p$

Reguły systemu to: odrywanie i podstawianie.

System Łosia

- Pierwszy aksjomat systemu wyraża pewną formę zasady niesprzeczności.
- Z pierwszego aksjomatu systemu wynika, że dla dowolnego zdania p: uznane jest bądź p, bądź jego zaprzeczenie $\neg p$.
- Aksjomaty: 2, 3 i 4 wyrażają uznawanie aksjomatyki Łukasiewicza dla (implikacyjno-negacyjnego) rachunku zdań.
- Aksjomat 5 wyraża rozdzielność operatora $\boldsymbol{L}_x$ względem implikacji.
- Aksjomat 6 stwierdza, że zdanie uznawane przez wszystkich jest tezą systemu
- Ostatni aksjomat mówi, że iteracja operacji uznawania jest równoważna tej operacji.
- Aksjomaty systemu są niezależne.
- System jest niesprzeczny i wielowartościowy.

System von Wrighta

Modalności epistemiczne rozważane przez von Wrighta to:

- Vp — p jest (pozytywnie) zweryfikowane;
- Fp — p jest sfalsyfikowane (mamy: $Fp \equiv V\neg p$);
- $\neg Vp \wedge \neg V\neg p$ — p jest nierozstrzygnięte.

Aksjomaty:

- $\neg F(p \vee q) \equiv (\neg Fp \vee \neg Fq)$
- $\neg Fp \vee \neg F\neg p$
- $V\Box(p \equiv q) \rightarrow \Box(Fp \equiv Fq)$

Reguła: Jeśli $\vdash p$, to $\vdash Vp$.

Symbol $\Box$ oznacza tu operator konieczności.

Dla kompletności, można zdefiniować operator $\neg V\neg p$ — p jest dopuszczone.

System Hintikki

W pierwotnej wersji system Hintikki operował modalnościami:

- $\boldsymbol{P}_x p$ — p jest możliwe ze względu na wiedzę (podmiotu) x;
- $\boldsymbol{K}_x p$ — (podmiot) x wie, że p;
- $\boldsymbol{B} p$ — (podmiot) x wierzy, że p.

Dla scharakteryzowania wiedzy danego podmiotu używa się pojęcia zbioru modelowego.

W poniższej definicji m (ew. z indeksem) jest zbiorem formuł (rozważanego języka), zaś M jest rodziną zbiorów formuł.

Zbiory formuł odpowiadają zespołom przekonań.

System Hintikki

Przez system modelowy rozumiemy każdą rodzinę M zbiorów formuł spełniającą, dla każdego $m \in M$, następujące warunki:

- Jeśli $p \in m$, to $\neg p \notin m$.
- Jeśli $p \wedge q \in m$, to $p \in m$ oraz $q \in m$.
- Jeśli $p \vee q \in m$, to $p \in m$ lub $q \in m$.
- Jeśli $\neg\neg p \in m$, to $p \in m$.
- Jeśli $\neg(p \wedge q) \in m$, to $\neg p \in m$ lub $\neg q \in m$.
- Jeśli $\neg(p \vee q) \in m$, to $\neg p \in m$ oraz $\neg q \in m$.
- Jeśli $\boldsymbol{P}_x p \in m$, to istnieje $m_* \in M$ taki, że $p \in m_*$.
- Jeśli $\boldsymbol{K}_x p \in m$, to dla każdego $m_* \in M$: $\boldsymbol{K}_x p \in m_*$.
- Jeśli $\boldsymbol{K}_x p \in m$, to $p \in m$.
- Jeśli $\neg \boldsymbol{K}_x p \in m$, to $\boldsymbol{P}_x \neg p \in m$.
- Jeśli $\neg \boldsymbol{P}_x p \in m$, to $\boldsymbol{K}_x \neg p \in m$.

System Hintikki

Między elementami zbioru modelowego zachodzić mogą zależności:

- doksastycznej alternatywności;
- epistemicznej alternatywności.

Logikę wiedzy i przekonań otrzymujemy przez dodanie nastepujących warunków:

- Jeśli $\boldsymbol{K}_x p \in m$ i m_* jest doksastycznie alternatywne względem m, to $\boldsymbol{K}_x p \in m_*$.
- Jeśli $\boldsymbol{B} p \in m$ i m_* jest epistemicznie alternatywne względem m, to $\boldsymbol{B} p \in m_*$.
- Jeśli $\boldsymbol{K}_x p \in m$, to $\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_x p \in m$.
- Każda doksastyczna alternatywność jest też epistemiczną alternatywnością.

O logikach modalnych

Wiedzę i przekonania można też opisywać z wykorzystaniem klasycznych modalności aletycznych:

- konieczności;
- możliwości.

Możemy uznać, że operator epistemiczny $\boldsymbol{K}_x$ zachowuje się tak, jak operator konieczności $\Box$, a operator $\boldsymbol{P}_x$ zachowuje się tak, jak operator możliwości $\Diamond$.
Wtedy możemy wykorzystać:

- znane wyniki dotyczące szeregu logik modalnych;
- semantykę algebraiczną (Kripkego) dla tak interpretowanych operatorów epistemicznych.

System Gödla-Löba

Logika Gödla-Löba, zwana też logiką dowodliwości jest logiką modalną, w której operator $\Box$ może być interpretowany jako dowodliwość (w ustalonym systemie).

Można także korzystać z tej logiki przy modelowaniu systemów przekonań, z użyciem operatora $\boldsymbol{B}$. W istocie, robiliśmy to na dwóch pierwszych wykładach, wzorując się na książce Smullyana *Forever Undecided*.

Logika Gödla-Löba ma następujące aksjomaty:

- wszystkie tautologie (KRZ);
- aksjomaty rozdzielności: $\boldsymbol{B}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \boldsymbol{B}\beta)$;
- wszystkie formuły postaci: $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \boldsymbol{B}\alpha$.

Regułami wnioskowania są: *modus ponens* oraz *ukoniecznianie*.

Systemy świadomych, racjonalnych przekonań

Jedną z propozycji rozumienia pojęcia świadome racjonalne przekonanie jest system aksjomatyczny LB podany przez Marka Tokarza w *Elementach pragmatyki logicznej*, będący zdaniową logiką modalną z operatorem $\boldsymbol{B}$ oraz:

Aksjomatami:

- α, dla wszystkich tautologii α
- $\boldsymbol{B}\alpha \equiv \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}\alpha$
- $\neg\boldsymbol{B}\alpha \equiv \boldsymbol{B}\neg\boldsymbol{B}\alpha$
- $\boldsymbol{B}\neg\alpha \rightarrow \neg\boldsymbol{B}\alpha$
- $\boldsymbol{B}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \boldsymbol{B}\beta)$.

Regułami:

- *modus ponens*: z $\alpha \rightarrow \beta$ i α możemy wyprowadzić β
- *regułą modalną*: z α możemy wyprowadzić $\boldsymbol{B}\alpha$.

Niektóre tezy systemu LB

- $\neg \boldsymbol{B}(\alpha \wedge \neg\alpha)$
- $\boldsymbol{B}(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\boldsymbol{B}\alpha \equiv \boldsymbol{B}\beta)$
- $(\boldsymbol{B}\alpha \vee \boldsymbol{B}\beta) \rightarrow \boldsymbol{B}(\alpha \vee \beta)$
- $(\boldsymbol{B}\alpha \wedge \boldsymbol{B}\beta) \equiv \boldsymbol{B}(\alpha \wedge \beta)$
- $\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \neg\boldsymbol{B}\neg\alpha$
- $(\boldsymbol{B}(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\boldsymbol{B}\alpha) \rightarrow \neg\boldsymbol{B}\neg\beta$
- $(\boldsymbol{B}(\alpha \vee \beta) \wedge \boldsymbol{B}\neg\alpha) \rightarrow \boldsymbol{B}\beta$
- $\boldsymbol{B}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\boldsymbol{B}\neg\beta \rightarrow \boldsymbol{B}\neg\alpha)$
- $\neg\boldsymbol{B}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\boldsymbol{B}\neg\alpha \wedge \neg\boldsymbol{B}\beta)$
- $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\alpha \vee \boldsymbol{B}\beta) \rightarrow \boldsymbol{B}(\alpha \vee \beta)$
- $\boldsymbol{B}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \beta)$
- $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \alpha)$

Własności systemu LB

- W LB zachodzi Twierdzenie o Dedukcji.
- System LB jest domknięty na regułę ekstensjonalności: jeśli $\vdash \alpha \equiv \beta$, to $\vdash \boldsymbol{B}\alpha \equiv \boldsymbol{B}\beta$.
- Pełność LB. Formuła α jest tezą logiki LB wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa we wszystkich właściwych algebrach filtrowych, tj. w strukturach postaci $\langle A, -, \cap, \cup, *, F\rangle$, gdzie $\langle A, -, \cap, \cup\rangle$ jest algebrą Boole'a, F właściwym filtrem tej algebry, a $*$ funkcją charakterystyczną zbioru F.
- Logika LB ma własność modeli skończonych (FMP), a więc jest rozstrzygalna.

Rozszerzenia systemu LB

Logikę LCB otrzymujemy z LB przez dodanie aksjomatu: $\boldsymbol{B}\alpha \vee \boldsymbol{B}\neg\alpha$. Równoważnie, dla otrzymania LCB można dodać do LB każdą z następujących formuł:

- $\neg\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \boldsymbol{B}\neg\alpha$
- $\boldsymbol{B}(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\boldsymbol{B}\alpha \vee \boldsymbol{B}\beta)$
- $(\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \boldsymbol{B}\beta) \rightarrow \boldsymbol{B}(\alpha \rightarrow \beta)$.

- Logika LCB jest logiką świadomego, racjonalnego *Besserwissera* — kogoś, kto ma wyrobioną opinię w każdej sprawie.
- Pełność LCB. Formuła α jest tezą logiki LCB wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa we wszystkich ultraalgebrach, tj. w strukturach postaci $\langle A, -, \cap, \cup, *, F\rangle$, gdzie $\langle A, -, \cap, \cup\rangle$ jest algebrą Boole'a, F ultrafiltrem tej algebry, a $*$ funkcją charakterystyczną zbioru F.
- Logika LCB ma własność modeli skończonych (FMP), a więc jest rozstrzygalna.

Rozszerzenia systemu LB

Dodanie do aksjomatów LB aksjomatu: $\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \alpha$ pozwala interpretować otrzymaną w ten sposób logikę LWB jako logikę wiedzy.

- LCB jest równoważna systemowi modalnemu S5.
- Pełność LWB. Formuła α jest tezą logiki LWB wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa we wszystkich strukturach postaci $\langle A, -, \cap, \cup, *, F \rangle$, gdzie $\langle A, -, \cap, \cup \rangle$ jest algebrą Boole'a, F filtrem jednostkowym tej algebry, a $*$ funkcją charakterystyczną zbioru F.
- Logika LWB ma własność modeli skończonych (FMP), a więc jest rozstrzygalna.

Teorie zmiany przekonań

Model AGM. W jaki sposób opisywać zmiany systemu przekonań? Czasami zmieniamy przekonania — uzyskujemy nową wiedzę, porzucamy jedne przekonania na rzecz innych, itp.

Rozważa się trzy operacje na systemach wiedzy:

- ekspansję — dołączenie nowego zdania do systemu;
- kontrakcję — odrzucenie pewnego zdania;
- rewizję — zastąpienie pewnego twierdzenia jego negacją.

Każda z tych operacji musi spełniać stosowne założenia. Podamy, dla przykładu, aksjomaty charakteryzujące kontrakcję.

Niech $T - \alpha$ oznacza stan przekonań powstający z T w wyniku usunięcia zdania α.

Aksjomaty kontrakcji

Przypuśćmy, że stan naszych przekonań jest reprezentowany przez teorię T. Usunięcie α z systemu przekonań T powoduje, że musimy z tego systemu przekonań usunąć również inne zdania (z których α może wynikać). Aksjomaty kontrakcji mają zapewniać, że operacja ta ma pożądane własności logiczne:

- $T - \alpha$ jest teorią (jest domknięty na operację konsekwencji).
- $T - \alpha \subseteq T$.
- Jeśli α nie jest tautologią, to $\alpha \notin T - \alpha$.
- Jeśli $\alpha \notin T$, to $T - \alpha = T$.
- Jeśli $\alpha \equiv \beta$ jest tautologią, to $T - \alpha = T - \beta$.
- T jest najmniejszą teorią zawierającą $(T - \alpha) \cup \{\alpha\}$.