Klasyczny Rachunek Predykatów:

Semantyka: Zadania

(Logika Matematyczna: Wykłady 16, 17)

Semestr Letni 2007–2008

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM

http://www.logic.amu.edu.pl

17. Ćwiczenia

Teraz to, co lubicie najbardziej, czyli zadania do samodzielnego rozwiązania. Wszystkie zaopatrzone zostały w odpowiedzi.

17.1. Język KRP

17.1.1. Podaj zmienne wolne i związane formuł:

- (a) $\forall x \ (P(x,y) \rightarrow \exists y \ (Q(x) \wedge R(x,y)))$
- (b) $\exists x \ (P(x) \wedge \forall z \ (Q(z) \rightarrow R(x,z)))$
- (c) $\exists x \ (P(x) \wedge \forall x \ (Q(x) \rightarrow R(x,y)))$.

17.1.2. Czy term t jest podstawialny za zmienną x w formule α, gdzie:

- (a) t jest postaci $f(x)$, a α jest formułą $\forall y \exists z \ (P(y,z) \rightarrow Q(x))$; x jest jedyną zmienną w termie t;
- (b) t jest postaci $g(x,y)$, a α jest formułą $\forall y \forall z \ (P(x,y) \rightarrow Q(z))$; x i y są jedynymi zmiennymi w termie t;
- (c) t jest postaci $f(a)$, a α jest formułą $\forall y \ (P(x) \vee Q(y))$; t jest termem bazowym.

17.1.3. Podaj wartość $S(t, x, t')$ dla:

- (a) t postaci $f(a)$ oraz t' postaci $g(x, f(x))$;
- (b) t postaci $f(x, f(x,x))$ oraz t' postaci $g(x, g(x,y))$;
- (c) t postaci $f(x)$ oraz t' postaci $g(a,a)$; $g(a,a)$ jest termem bazowym.

17.1.4. Podaj wartość $S(t, x, \alpha)$ dla:

- (a) t postaci y oraz α postaci $\forall x \exists z \ (P(x) \rightarrow Q(x,z))$;
- (b) t postaci $f(x,y)$ oraz α postaci $\forall x \exists z \ (P(x) \rightarrow Q(x,z))$;
- (c) t postaci $g(x, f(y))$ oraz α postaci $P(x) \rightarrow Q(f(x), g(x,x))$.

17.1.5. Opisz zbiór wszystkich termów:

- (a) utworzonych z jednej zmiennej x oraz jednego symbolu funkcyjnego jednoargumentowego f;
- (b) utworzonych z jednej zmiennej x oraz jednego symbolu funkcyjnego dwuargumentowego g;
- (c) utworzonych z jednej zmiennej x, jednego termu bazowego t oraz jednego symbolu funkcyjnego dwuargumentowego g.

17.1.6. Które z podanych niżej formuł są zdaniami języka KRP:

- (a) $\forall x \exists y \forall z \ (P(x,y,z) \rightarrow Q(x,x,x))$
- (b) $\exists x \ ((P(x) \vee Q(y)) \wedge \forall x \forall y \ (P(x) \rightarrow Q(y)))$
- (c) $\forall x \exists y \ (P(f(y), x) \wedge Q(x, f(y)))$.

17.2. Relacja spełniania

17.2.1. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Niech $w = \langle 1, 1, \ldots \rangle$ będzie wartościowaniem zmiennych w uniwersum $\mathfrak{M}$ o stałej wartości 1. Czy wartościowanie w spełnia formułę α w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- (a) α postaci $\exists x_1 \ (x_1 \prec x_2) \vee \exists x_2 \ (x_1 \prec x_2)$
- (b) α postaci $\forall x_1 \ (x_1 \prec x_2) \vee \forall x_2 \ (x_1 \prec x_2)$
- (c) α postaci $\exists x_1 \ (x_1 \prec x_2) \wedge \exists x_2 \ (x_1 \prec x_2)$
- (d) α postaci $\forall x_1 \ (x_1 \prec x_2) \wedge \forall x_2 \ (x_1 \prec x_2)$.

17.2.2. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Jakie wartościowania spełniają formułę α w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- (a) α postaci $\forall x_1 \ (x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1)$
- (b) α postaci $\forall x_1 \ (x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$
- (c) α postaci $\forall x_1 \ (x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2 \ (x_1 \prec x_2)$.

17.2.3. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Czy formuła α jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- (a) α postaci $\forall x \forall y \exists z \ (x \prec z \wedge z \prec y)$
- (b) α postaci α postaci $\forall x \forall y \exists z \ (z \prec x \wedge z \prec y)$
- (c) α postaci α postaci $\forall x \forall y \exists z \ (x \prec z \wedge y \prec z)$.

Niech teraz $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację niewiększości $\leqslant$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $\leqslant$. Które z powyższych formuł są wtedy prawdziwe w strukturze $\mathfrak{M}$?

17.2.4. Niech $\mathfrak{N}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych, z operacjami: dodawania $+$, mnożenia $\cdot$ i następnika „+1” oraz relacją mniejszości $<$ i relacją identyczności $=$ oraz zerem 0 jako elementem wyróżnionym w uniwersum, zdefiniowanymi w zwykły sposób. Niech:

- $\oplus$ denotuje operację dodawania
- $\otimes$ denotuje operację mnożenia
- S denotuje operację następnika
- $\prec$ denotuje relację mniejszości
- $\doteq$ denotuje relację identyczności
- $\bigcirc$ denotuje liczbę 0.

A) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze formuły, wyrażające następujące pojęcia:

- (a) x jest podzielna bez reszty przez y
- (b) x jest liczbą pierwszą
- (c) x i y są względnie pierwsze
- (d) x jest sumą dwóch kwadratów
- (e) x jest większa od każdego podzielnika y
- (f) x nie jest następnikiem żadnego podzielnika y
- (g) x jest liczbą parzystą
- (h) x jest największym wspólnym podzielnikiem y oraz z
- (i) x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością y oraz z.

B) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze następujące zdania i zastanowić się, które z nich są zdaniami prawdziwymi w strukturze $\mathfrak{N}$:

- (a) Istnieje największa liczba pierwsza.
- (b) Istnieje bardzo dużo liczb pierwszych.
- (c) Każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych.
- (d) Najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb jest mniejsza od ich największego wspólnego podzielnika.
- (e) Istnieją dokładnie dwie różne liczby, dla których zachodzi: $3x^2 + 2x + 1 = 0$.
- (f) Dodawanie jest rozdzielne względem mnożenia.
- (g) Każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych.

17.2.5. Niech $\mathfrak{L}$ będzie nieskończonym zbiorem L częściowo uporządkowanym przez relację $\sqsubseteq$. Oznacza to, że relacja $\sqsubseteq$ jest w zbiorze L zwrotna, przechodnia oraz antysymetryczna. Niech relacja $\sqsubset$ będzie zdefiniowana warunkiem: $x \sqsubset y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \sqsubseteq y$ oraz nieprawda, że $y \sqsubseteq x$. Niech predykat $\doteq$ denotuje relację identyczności $=$. Niech predykat $\ll$ denotuje relację $\sqsubseteq$, a predykat $\prec$ relację $\sqsubset$.

A) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze formuły, wyrażające następujące pojęcia:

- (a) x jest elementem $\sqsubseteq$-minimalnym (nie istnieje element y różny od x taki, że x jest następnikiem, a y poprzednikiem w relacji $\sqsubseteq$)
- (b) x jest elementem $\sqsubseteq$-maksymalnym (nie istnieje element y różny od x taki, że y jest następnikiem, a x poprzednikiem w relacji $\sqsubseteq$)
- (c) x jest elementem $\sqsubseteq$-najmniejszym (x jest poprzednikiem w relacji $\sqsubseteq$ względem każdego y)
- (d) x jest elementem $\sqsubseteq$-największym (x jest następnikiem w relacji $\sqsubseteq$ względem każdego y)
- (e) x nie jest $\sqsubseteq$-następnikiem y oraz nie jest $\sqsubseteq$-poprzednikiem z.

B) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze następujące zdania i zastanowić się, które z nich są zdaniami prawdziwymi w strukturze $\mathfrak{L}$:

- (a) Porządek $\sqsubseteq$ jest liniowy (ma dodatkowo własność spójności).
- (b) Porządek $\sqsubset$ jest gęsty (istnieją co najmniej dwa elementy pozostające w relacji $\sqsubset$ oraz między każdymi dwoma elementami pozostającymi w relacji $\sqsubset$ istnieje element $\sqsubset$-pośredni).

- (c) Porządek $\sqsubset$ jest dyskretny (każdy element, który ma $\sqsubset$-poprzednik ($\sqsubset$-następnik), ma także bezpośredni $\sqsubset$-poprzednik (bezpośredni $\sqsubset$-następnik)).
- (d) Porządek $\sqsubset$ nie jest ani gęsty, ani dyskretny.
- (e) Istnieją elementy $\sqsubseteq$-nieporównywalne.
- (f) Każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubseteq$-poprzednik.
- (g) Każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubseteq$-następnik.
- (h) Istnieją elementy $\sqsubset$-nieporównywalne.
- (i) Każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubset$-poprzednik.
- (j) Każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubset$-następnik.

Niech teraz $\mathfrak{L}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych, relacja $\sqsubseteq$ będzie inkluzją, a $\sqsubset$ inkluzją właściwą. Które z powyższych zdań są wtedy prawdziwe w $\mathfrak{L}$?

17.3. Tautologie KRP

17.3.1. Wykaż, że nie są tautologiami KRP:

- (a) $(\forall x\ P(x) \to \forall x\ Q(x)) \to \forall x\ (P(x) \to Q(x))$
- (b) $(\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)) \to \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$
- (c) $\forall x \exists y\ P(y, x) \to \exists y \forall x\ P(y, x)$.

17.3.2. Wykaż, że są tautologiami KRP:

- (a) $\exists x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \exists x\ \beta)$
- (b) $(\alpha \vee \forall x\ \beta) \to \forall x\ (\alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest zmienną wolną w α.
- (c) $\forall x\ (\alpha \to \neg\beta) \to \forall x\ (\beta \to \neg\alpha)$.

17.3.3. Udowodnij, że następująca formuła jest prawdziwa w każdej strukturze skończonej, ale nie jest tautologią KRP:

- (a) $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3\ ((P(x_2, x_3) \to P(x_1, x_3)) \to (P(x_1, x_1) \to P(x_2, x_1)))$

17.4. Wynikanie logiczne w KRP

17.4.1. Wykaż, że ze zbioru X wynika logicznie zbiór Y, dla:

- (a) $X = \{\forall x\ (\alpha \to \beta),\ \forall x\ (\beta \to \gamma)\}, Y = \{\forall x\ (\alpha \to \gamma)\}$
- (b) $X = \{\forall x\ \alpha,\ \forall x\ \beta\}, Y = \{\forall x\ (\alpha \wedge \beta),\ \forall x\ (\alpha \vee \beta)\}$.

17.4.2. Wykaż, że ze zbioru X nie wynika logicznie formuła α, dla:

- (a) $X = \{\forall x \exists y\ P(x, y),\ \exists x\ P(x, x)\}$, α postaci $\forall x\ P(x, x)$
- (b) $X = \{\exists x\ P(x),\ \forall x\ (P(x) \vee Q(x))\}$, α postaci $Q(x)$.

17.5. Teoria mnogości

Uwaga. Słuchacze tych wykładów mają za sobą kurs WSTĘPU DO MATEMATYKI, na którym omówiono rachunek zbiorów i relacji oraz rozwiązano wiele ćwiczeń dotyczących tej problematyki. Nie będziemy więc tego wszystkiego raz jeszcze rozpamiętywać. Poniżej podajemy jedynie kilka typowych ćwiczeń.

17.5.1. Zapisz w języku teorii mnogości:

- (a) x jest funkcją różnowartościową z y na z.
- (b) Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.
- (c) Istnieje zbiór nieprzeliczalny.

17.5.2. Podaj przykłady ukazujące, że następujące zdania nie są prawdziwe o wszelkich zbiorach:

- (a) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \in y \wedge y \in z) \rightarrow x \in z)$
- (b) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \in y \wedge y \neq z) \rightarrow x \notin z)$
- (c) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \subseteq y \wedge y \in z) \rightarrow x \notin z)$.

17.5.3. Pokaż, że są prawami rachunku zbiorów:

- (a) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \subseteq y \wedge y \cap z = \emptyset) \rightarrow x \cap z = \emptyset)$
- (b) $\forall x \forall y \ (x = x \cap y \rightarrow x \subseteq y)$
- (c) Produkt kartezjański dowolnej rodziny zbiorów niepustych jest niepusty.

17.5.4. Udowodnij, że:

- (a) operacje sumy $\cup$ oraz różnicy $-$ można zdefiniować w terminach operacji: $\cap$ oraz różnicy symetrycznej $\div$;
- (b) operacji sumy $\cup$ nie można zdefiniować w terminach operacji iloczynu $\cap$ oraz różnicy $-$.

17.5.5. Pokaż, że są prawami rachunku relacji:

- (a) Niech $R \circ S$ oznacza złożenie relacji R i S, a R^{-1} niech oznacza konwers relacji R. Konwers złożenia relacji R i S jest złożeniem relacji S i R, czyli: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
- (b) Relacja R w zbiorze X jest jednocześnie równoważnością i częściowym porządkiem wtedy i tylko wtedy, gdy jest relacją identyczności w X.
- (c) Złożenie $R_1 \circ SR_2$ relacji równoważności R_1 oraz R_2 jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1.$$

17.6. Algebry Boole'a

17.6.1. Zapisz w języku teorii algebr Boole'a:

- (a) Dopełnienie kresu górnego elementów x i y jest równe kresowi dolnemu dopełnień elementów x i y.
- (b) Zbiór I elementów algebry jest jej ideałem, tj.: jest domknięty na operację kresu górnego oraz zawiera, wraz z każdym swoim elementem, wszystkie elementy od niego mniejsze.
- (c) Zbiór F elementów algebry jest jej filtrem, tj.: jest domknięty na operację kresu dolnego oraz zawiera, wraz z każdym swoim elementem, wszystkie elementy od niego większe.

17.6.2. Podaj przykłady ukazujące, że następujące zdania nie są prawdziwe o wszelkich algebrach Boole'a:

- (a) Istnieją atomy, tj. elementy minimalne algebry różne od jej zera.
- (b) Istnieją koatomy, tj. elementy maksymalne algebry różne od jej jedynki.
- (c) Porządek elementów algebry nie jest liniowy.

17.6.3. Pokaż, że są prawami teorii algebr Boole'a (w drugiej aksjomatyce):

- (a) Kres górny elementów x i y jest równy kresowi górnemu elementu y oraz różnicy x i y.
- (b) Dopełnienie kresu dolnego elementów x i y jest równe kresowi górnemu dopełnień elementów x i y.

17.6.4. Niech $\mathbb{F}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru nieskończonego X o skończonych dopełnieniach i niech $\mathfrak{B}$ będzie algebrą Boole'a wszystkich podzbiorów zbioru X ze zwykłymi teoriomnogościowymi operacjami sumy, iloczynu oraz dopełnienia.

- (a) Czy zbiór $\mathbb{F}$ jest filtrem, czy ideałem algebry $\mathfrak{B}$?
- (b) Czy algebra $\mathfrak{B}$ zawiera jakieś atomy lub koatomy?

17.7. Język KRP a języki etniczne

17.7.1. Podaj wyrażenie języka KRP odpowiadające strukturze składniowej następujących zdań języka polskiego:

- (a) Są wstrętne prawdy i piękne fałsze.
- (b) Kobiety i mężczyźni mają równe prawa przy nawiązywaniu lub rozwiązywaniu umowy o pracę.
- (c) Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii.
- (d) Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie.
- (e) Nikt nigdy nikomu w żadnej sprawie nie ufa.

17.7.2. Odczytaj w języku polskim odpowiedniki następujących formuł języka KRP, przy podanej interpretacji:

- (a) $\forall x\ ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow R(x))$; $P(x)$ — x wdycha opary rtęci, $Q(x)$ — x kona, rzężąc, pocąc się i mocząc, $R(x)$ — x świruje jarząbka.

- (b) $\forall x\ (P(x) \rightarrow (\exists x \forall y\ (Q(x,y) \rightarrow \exists x\ \neg R(x))))$; $P(x)$ — x jest bezrobotny, $Q(x,y)$ — x jest bogatszy od y, $R(x)$ — x jest odpowiedzialny za stan gospodarki tego nieszczęsnego kraju.
- (c) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \forall x_5\ ((M(x_1,x_2,x_3) \wedge M(x_4,x_3,x_5)) \rightarrow \exists x_6\ (M(x_1,x_6,x_4 \wedge M(x_5,x_2,x_6)$; $M(x,y,z)$ — y leży między x oraz z, przy czym nie jest wykluczone, iż y jest identyczny z x lub y jest identyczny z z.

17.7.3. Które z poniższych wyrażeń są prawdami logicznymi lub fałszami logicznymi:

- (a) Żaden papież nie był kobietą.
- (b) Dawno, dawno temu wszystkie liczby były wymierne.
- (c) Współżył z najstarszą mieszkanką naszej wsi, ale mieszkał u jej matki.
- (d) Prawdy wieczne są odwieczne.
- (e) Elipsy to takie lekko spłaszczone okręgi.

Rozwiązania ćwiczeń

17.1. Język KRP

17.1.1.

- (a) Pierwsze z lewej wystąpienie y jest wolne w tej formule. Zmienna y jest zmienną wolną tej formuły.
- (b) Ta formuła nie zawiera zmiennych wolnych.
- (c) Zmienna y jest jedyną zmienną wolną tej formuły.

17.1.2.

- (a) Tak. Żadna zmienna występująca w termie $f(x)$ nie stanie się związana po podstawieniu tego termu do rozważanej formuły.
- (b) Nie. Po wstawieniu termu $g(x,y)$ do formuły $\forall y \forall z\ (P(x,y) \rightarrow Q(z))$ zmienna y występująca w tym termie staje się związana w rozważanej formule.
- (c) Tak. Term $f(a)$ nie zawiera zmiennych wolnych, a więc jest podstawialny do każdej formuły.

17.1.3.

- (a) $S(f(a), x, g(x, f(x)))$ jest termem $g(f(a), f(f(a)))$.
- (b) $S(f(x, f(x,x)), x, g(x, g(x,y)))$ jest termem $g(f(x, f(x,x)), g(f(x, f(x,x)), y)))$.
- (c) Nie można dokonać podstawienia. Term $g(a,a)$ nie zawiera zmiennej x.

17.1.4.

- (a) $S(y, x, \forall x \exists z\ (P(x) \rightarrow Q(x,z)))$ jest formułą $\forall x \exists z\ (P(y) \rightarrow Q(y,z))$.

- (b) $S(f(x,y),x,\forall x\exists z\ (P(x)\rightarrow Q(x,z)))$ jest formułą $\forall x\exists z\ (P(f(x,y))\rightarrow Q(f(x),z))$. Zauważ, że zmienna x stała się związana po podstawieniu!
- (c) $S(g(x,f(y)),x,P(x)\rightarrow Q(f(x),g(x,x))$ jest formułą:
  $P(g(x,f(y)))\rightarrow Q(f(g(x,f(y))),g(g(x,f(y)),g(x,f(y))))$.

17.1.5.

- (a) Jest to zbiór: $\{x,f(x),f(f(x)),f(f(f(x))),\ldots\}$.
- (b) Jest to zbiór: $\{x,g(x,x),g(x,g(x,x)),g(g(x,x),x),\ldots\}$.
- (c) Jest to zbiór:
  $\{x,t,g(x,x),g(t,t),g(x,t),g(t,x)\}\cup$
  $\{g(x,g(x,x)),g(x,g(t,t)),g(x,g(x,t)),g(x,g(t,x))\}\cup$
  $\{g(t,g(x,x)),g(t,g(t,t)),g(t,g(x,t)),g(t,g(t,x))\}\cup\ldots$.

17.1.6.

- (a) Tak, jest zdaniem.
- (b) Pierwszy człon koniunkcji zawiera wolne wystąpienie zmiennej y, a więc rozważana formuła nie jest zdaniem.
- (c) Tak, jest zdaniem.

17.2. Relacja spełniania

17.2.1.

- (a) Rozważana formuła jest alternatywą, a więc ciąg stały $w=\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle$ spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia co najmniej jeden jej człon. Wystarczy teraz zauważyć, że ciąg stały $w=\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ pierwszy człon tej alternatywy, ponieważ ciąg $w'=\langle 0,1,1,1,\ldots\rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1\prec x_2$.
- (b) Rozważana formuła jest alternatywą, a więc ciąg stały $w=\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle$ spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ co najmniej jeden jej człon. Ciąg w spełniałby w strukturze $\mathfrak{M}$ pierwszy człon tej alternatywy, gdyby ***każdy*** ciąg $w'=\langle a,1,1,1,\ldots\rangle$, gdzie a jest dowolną liczbą naturalną, spełniał w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1\prec x_2$. Tak jednak nie jest, ponieważ np. ciąg $\langle 2,1,1,1,\ldots\rangle$ nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $x_1\prec x_2$. Podobnie dla drugiego członu rozważanej alternatywy: ciąg w spełniałby w strukturze $\mathfrak{M}$ drugi człon tej alternatywy, gdyby ***każdy*** ciąg $w'=\langle 1,a,1,1,\ldots\rangle$, gdzie a jest dowolną liczbą naturalną, spełniał w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1\prec x_2$. Tak jednak nie jest, ponieważ np. ciąg $\langle 1,0,1,1,\ldots\rangle$ nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $x_1\prec x_2$. Widzimy zatem, że ciąg $w=\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle$ nie spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ żadnego z członów rozważanej alternatywy. W konsekwencji, alternatywa ta nie jest spełniona w strukturze $\mathfrak{M}$ przez ciąg w.
- (c) Rozważana formuła jest koniunkcją, a więc ciąg stały $w=\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle$ spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwa jej człony. Oba człony tej koniunkcji są formułami egzystencjalnie skwantyfikowanymi. Ciąg $w=\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ pierwszy człon tej koniunkcji, czyli formułę $\exists x_1\ x_1\prec x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy ***co najmniej jeden*** ciąg $w'=\langle a,1,1,1,\ldots\rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1\prec x_2$, gdzie a jest jakąś liczbą naturalną. Wystarczy teraz za a wziąć liczbę 0: ciąg $\langle 0,1,1,1,\ldots\rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1\prec x_2$. Podobnie dla drugiego członu rozważanej koniunkcji: ciąg $w=\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ drugi człon tej koniunkcji, czyli formułę $\exists x_2\ x_1\prec x_2$ wtedy

i tylko wtedy, gdy ***co najmniej jeden*** ciąg $w' = \langle 1, a, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$, gdzie a jest jakąś liczbą naturalną. Wystarczy teraz za a wziąć liczbę 2: ciąg $\langle 1, 2, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Ponieważ ciąg w spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ oba człony koniunkcji, spełnia też w strukturze $\mathfrak{M}$ całą koniunkcję.

- (d) Rozważana formuła jest koniunkcją, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwa jej człony. Oba człony tej koniunkcji są formułami generalnie skwantyfikowanymi. Ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ pierwszy człon tej koniunkcji, czyli formułę $\forall x_1\ x_1 \prec x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy ***każdy*** ciąg $w' = \langle a, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$, gdzie a jest dowolną liczbą naturalną. Jednak np. ciąg $\langle 2, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $x_1 \prec x_2$. Widzimy więc, że ciąg w nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $\forall x_1\ x_1 \prec x_2$, czyli pierwszego członu rozważanej koniunkcji. Nie spełnia zatem również całej koniunkcji. Szukanie odpowiedzi na pytanie, czy ciąg w spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ drugi człon rozważanej koniunkcji (a nietrudno pokazać, że nie spełnia) nie jest już potrzebne.

17.2.2.

- (a) Wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla ***każdego*** wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$, gdzie a jest ***dowolną*** liczbą naturalną, w' spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1$. Ponieważ ta ostatnia formuła jest alternatywą, więc w' spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia co najmniej jeden człon tej alternatywy. Widać jednak, że np. wartościowanie $\langle w_2, w_2, w_3 \ldots \rangle$ nie spełnia ***żadnego*** z członów tej alternatywy. Oznacza to, że nie wszystkie wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełniają alternatywę $x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1$, a to z kolei znaczy, że nie ma wartościowania $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełniającego w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę:
$$\forall x_1\ (x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1).$$
- (b) Wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla ***każdego*** wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$, gdzie a jest ***dowolną*** liczbą naturalną, w' spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1$. Ponieważ ta ostatnia formuła jest koniunkcją, więc w' spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwa człony tej koniunkcji. Widać jednak, że np. wartościowanie $\langle w_2, w_2, w_3 \ldots \rangle$ nie spełnia ***żadnego*** z członów tej koniunkcji. Oznacza to, że nie wszystkie wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełniają koniunkcję $x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1$, a to z kolei znaczy, że nie ma wartościowania $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełniającego w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$.
- (c) Wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1(x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2(x_1 \prec x_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi alternatywa: (1) w nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $\forall x_1(x_1 \prec x_2)$ ***lub*** (2) w spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_2(x_1 \prec x_2)$. Punkt (1) oznacza, że nie dla wszystkich wartościowań $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$ wartościowanie w' spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Istotnie, tak właśnie jest: np. wartościowanie $\langle w_2, w_2, w_3 \ldots \rangle$ nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $x_1 \prec x_2$. Ponieważ zachodzi jeden (pierwszy) z członów alternatywy (1) ***lub*** (2), więc zachodzi cała ta alternatywa. Oznacza to, że ***dowolne*** wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1(x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2(x_1 \prec x_2)$.

17.2.3.

Najpierw rozważamy przypadek, gdy $\prec$ denotuje relację mniejszości $<$.

- (a) Rozpatrywana formuła stwierdza, że między każdymi dwiema liczbami naturalnymi istnieje liczba „pośrednia” (w sensie porządku $<$). Formuła ta jest więc fałszywa w strukturze $\mathfrak{M}$, ponieważ np. między liczbami 1 i 2 nie ma żadnej liczby naturalnej n takiej, że $1 < n$ oraz $n < 2$.
- (b) Rozpatrywana formuła stwierdza, że dla każdych dwóch liczb naturalnych istnieje liczba mniejsza od nich obu. Formuła ta jest więc fałszywa w strukturze $\mathfrak{M}$, ponieważ nie istnie np. liczba mniejsza od liczb 0 oraz 1.
- (c) Rozpatrywana formuła stwierdza, że dla każdych dwóch liczb naturalnych istnieje liczba większa od nich obu. Formuła ta jest więc prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$: dla dowolnych liczb naturalnych m oraz n np. liczba $m + n + 1$ jest większa zarówno od m, jak i od n.

UWAGA. W powyższej interpretacji nie mamy możliwości stwierdzania, że rozważane liczby naturalne są różne (nie dysponujemy predykatem identyczności).

Rozważamy teraz przypadek, gdy $\prec$ denotuje relację niewiększości $\leqslant$.

- (a) Rozpatrywana formuła jest fałszywa w strukturze $\mathfrak{M}$: np. dla liczb 3 oraz 2 nie istnieje liczba n taka, że $3 \leqslant n$ oraz $n \leqslant 2$.
- (b) Rozpatrywana formuła jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$. Dla dowolnych dwóch liczb naturalnych m oraz n istnieje liczba k taka, że zarówno $k \leqslant m$, jak i $k \leqslant n$.
- (c) Rozpatrywana formuła jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$. Dla dowolnych dwóch liczb naturalnych m oraz n istnieje liczba k taka, że zarówno $m \leqslant k$, jak i $n \leqslant k$.

17.2.4.

A) W przypadku predykatu $\doteq$ będziemy pisać $t_1 \doteq t_2$ zamiast $\doteq (t_1, t_2)$. Podobnie, w przypadku predykatu $\prec$ będziemy pisać $t_1 \prec t_2$ zamiast $\prec (t_1, t_2)$. Niech ponadto predykat $\preceq$ będzie zdefiniowany warunkiem: $x \preceq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \prec y$ lub $x \doteq y$. [Oznacza to, że wyrażenie $x \preceq y$ jest skrótem dla wyrażenia $x \prec y \vee x \doteq y$.]

- (a) $\exists z\ (x \doteq \otimes(y, z))$. Niech skrótem dla tej formuły będzie $div(x, y)$. Formułę $div(x, y)$ czytamy zatem: x jest podzielna się bez reszty przez y.
- (b) $\forall y\ (y \preceq x \rightarrow ((y \doteq S(\bigcirc) \vee y \doteq x)) \vee \neg div(x, y))$. Niech skrótem dla tej formuły będzie $pr(x)$. Formułę $pr(x)$ czytamy zatem: x jest liczbą pierwszą.
- (c) $\forall z\ ((\neg z \doteq S(\bigcirc) \wedge (z \preceq x \wedge z \preceq y)) \rightarrow \neg(div(x, z) \wedge div(y, z)))$. Niech skrótem dla tej formuły będzie $rp(x, y)$. Formułę $rp(x, y)$ czytamy zatem: x oraz y są względnie pierwsze.
- (d) $\exists y \exists z\ (x \doteq \oplus(\otimes(y, y), \otimes(z, z)))$. Formuła ta stwierdza, że x jest suma dwóch kwadratów.
- (e) $\forall z\ (div(y, z) \rightarrow z \prec x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest większa od każdego podzielnika y.
- (f) $\forall z\ (div(y, z) \rightarrow \neg x \doteq s(z))$. Formuła ta stwierdza, że liczba x nie jest następnikiem żadnego podzielnika liczby y.
- (g) $\exists z\ (x \doteq \otimes(S(S(\bigcirc)), z))$. Formuła ta stwierdza, że x jest liczbą parzystą.
- (h) $div(y, x) \wedge div(z, x) \wedge \forall u\ ((div(y, u) \wedge div(z, u)) \rightarrow u \preceq x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest największym wspólnym podzielnikiem y oraz z.
- (i) $div(x, y) \wedge div(x, z) \wedge \forall u\ ((div(u, y) \wedge div(u, z)) \rightarrow x \preceq u)$. Formuła ta stwierdza, że x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością y oraz z.

B)

- (a) $\exists x\ (pr(x) \wedge \forall y\ (pr(y) \rightarrow y \preceq x))$. To zdanie stwierdza, że istnieje największa liczba pierwsza. Jest ono fałszywe w strukturze $\mathfrak{M}$.
- (b) Tego nie można napisać w języku KRP. „Bardzo dużo" jest wyrażeniem niejasnym znaczeniowo. W języku KRP rozważanej sygnatury można zapisać np. to, że dla każdej liczby pierwszej istnieje większa od niej liczba pierwsza (por. punkt (a) powyżej). Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.
- (c) $\forall x \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4\ (x \doteq \oplus(\otimes(y_1, y_1), \oplus(\otimes(y_2, y_2), \oplus(\otimes(y_3, y_3), \otimes(y_4, y_4)))))$. To zdanie stwierdza, że każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów. Jest ono prawdziwe w strukturze $\mathfrak{M}$.
- (d) $\forall x \forall v \forall y \forall z\ (((div(x, y) \wedge div(x, z) \wedge \forall u\ ((div(u, y) \wedge div(u, z)) \rightarrow x \preceq u)) \wedge (div(y, v) \wedge div(z, v) \wedge \forall u\ ((div(y, u) \wedge div(z, u)) \rightarrow u \preceq v))) \rightarrow x \prec v)$. Ta formuła stwierdza, że najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb jest mniejsza od ich największego wspólnego podzielnika. Jest ona fałszywa w strukturze $\mathfrak{M}$.

- (e) Zapiszmy najpierw formułę $R(x)$ wyrażającą fakt, że $3x^2 + 2x + 1 = 0$:

$$\oplus(\otimes(S(S(S(\bigcirc))), \otimes(x,x)), \oplus(\otimes(S(S(\bigcirc)), x), S(\bigcirc))) \doteq \bigcirc.$$

  Napiszemy teraz, że istnieją dokładnie dwie liczby, dla których zachodzi $3x^2 + 2x + 1 = 0$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \; ((R(x_1) \wedge R(x_2)) \wedge \forall y \; (R(y) \rightarrow (y \doteq x_1 \vee y \doteq x_2))).$$

  To zdanie jest fałszywe w strukturze $\mathfrak{M}$.

- (f) $\forall x \forall y \forall z \; (\otimes(\oplus(x,y), z) \doteq \oplus(\otimes(x,z), \otimes(y,z)))$. To zdanie wyraża (prawostronną) rozdzielność dodawania względem mnożenia. Jest ono prawdziwe w strukturze $\mathfrak{M}$. Podobnie zapisujemy lewostronną rozdzielność dodawania względem mnożenia (Ćwiczenie: zapisz).

- (g) $\forall x \; (\exists z \; (x \doteq \otimes(S(S(\bigcirc)), z)) \rightarrow \exists u \exists v \; ((pr(u) \wedge pr(v)) \wedge x \doteq \oplus(u,v)))$. To zdanie stwierdza, że każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych. W chwili, gdy pisane są te słowa, nie wiadomo, czy to zdanie jest prawdziwe w strukturze $\mathfrak{M}$. Jest to tzw. ***hipoteza Goldbacha***.

17.2.5.

A)

- (a) $\neg \exists y \; (\neg y \doteq x \wedge y \ll x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem $\sqsubseteq$-minimalnym.
- (b) $\neg \exists y \; (\neg y \doteq x \wedge x \ll y)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem $\sqsubseteq$-maksymalnym.
- (c) $\forall y \; (x \ll y)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem $\sqsubseteq$-najmniejszym.
- (d) $\forall y \; (y \ll x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem $\sqsubseteq$-największym.
- (e) $\neg y \ll x \wedge \neg x \ll x$. Formuła ta stwierdza, że x nie jest $\sqsubseteq$-następnikiem y oraz nie jest $\sqsubseteq$-poprzednikiem z.

B)

- (a) Trzeba zapisać, że predykat $\ll$ denotuje relację zwrotną, przechodnią, antysymetryczną i spójną:
  $\forall x \; (x \ll x)$
  $\forall x \forall y \forall z \; ((x \ll y \wedge y \ll z) \rightarrow x \ll z)$
  $\forall x \forall y \; ((x \ll y \wedge y \ll x) \rightarrow x \doteq y)$
  $\forall x \forall y \; (\neg x \doteq y \rightarrow (x \ll y \vee y \ll x))$.
  Koniunkcja tych formuł stwierdza, że $\sqsubseteq$ (czyli denotacja predykatu $\ll$) jest liniowym porządkiem.
- (b) $\exists x \exists y \; (\neg x \doteq y \wedge x \prec y) \wedge \forall x \forall y \exists z \; (x \prec y \rightarrow (x \prec z \wedge z \prec y))$. Formuła ta stwierdza, że $\sqsubset$ (czyli denotacja predykatu $\prec$) jest porządkiem gęstym.
- (c) $\forall x \; (\exists y \; x \prec y \rightarrow \neg \exists z \; (x \prec z \wedge z \prec y)) \wedge \forall x \; (\exists y \; x \prec y \rightarrow \neg \exists z \; (y \prec z \wedge z \prec x))$. Formuła ta stwierdza, że $\sqsubset$ (czyli denotacja predykatu $\prec$) jest porządkiem dyskretnym: każdy element, który ma $\sqsubset$-poprzednik ($\sqsubset$-następnik) ma też bezpośredni $\sqsubset$-poprzednik (bezpośredni $\sqsubset$-następnik).
- (d) Koniunkcja zaprzeczeń formuł z (b) i (c) powyżej stwierdza, że $\sqsubset$ (czyli denotacja predykatu $\prec$) nie jest ani porządkiem gęstym, ani porządkiem dyskretnym.
- (e) $\exists x \exists y \; (\neg x \ll y \wedge \neg y \ll x)$. Formuła ta stwierdza, że istnieją elementy $\sqsubseteq$-nieporównywalne.
- (f) $\forall x \forall y \exists z \; (z \ll x \wedge z \ll y)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubseteq$-poprzednik.
- (g) $\forall x \forall y \exists z \; (x \ll z \wedge y \ll z)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubseteq$-następnik.
- (h) $\exists x \exists y \; (\neg x \prec y \wedge \neg y \prec x)$. Formuła ta stwierdza, że istnieją elementy $\sqsubset$-nieporównywalne.

- (i) $\forall x \forall y \exists z \; (z \prec x \wedge z \prec y)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubset$-poprzednik.
- (j) $\forall x \forall y \exists z \; (x \prec z \wedge y \prec z)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubset$-następnik.

Dla każdego z powyższych zdań znaleźć można zbiór częściowo uporządkowany, w którym zdanie to jest fałszywe. Innymi słowy, zdania te nie są prawdziwe o wszystkich zbiorach częściowo uporządkowanych.

Jeśli L jest rodziną wszystkich podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych, a relacja $\sqsubseteq$ jest relacją inkluzji i relacja $\sqsubset$ jest relacją inkluzji właściwej, to w strukturze $\mathfrak{L} = \langle L, \sqsubseteq, \sqsubset \rangle$:

- (a) Nie jest prawdziwe. Inkluzja nie jest porządkiem liniowym w L.
- (b) Nie jest prawdziwe o inkluzji właściwej. Inkluzja właściwa nie jest porządkiem gęstym w rozważanym zbiorze. Dla przykładu, nie istnieje zbiór A taki, że $\{1, 2\} \subset A$ oraz $A \subset \{1, 2, 3\}$.
- (c) Jest prawdziwe o inkluzji właściwej. Inkluzja właściwa jest porządkiem dyskretnym w rozważanym zbiorze.
- (d) Nie jest prawdziwe o inkluzji właściwej: zobacz punkty (b) i (c) powyżej.
- (e) Jest prawdziwe. Istnieją zbiory A, B liczb naturalnych takie, że ani $A \subseteq B$ ani $B \subseteq A$.
- (f) Jest prawdziwe. Dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi: $A \cap B \subseteq A$ oraz $A \cap B \subseteq B$.
- (g) Jest prawdziwe. Dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi: $A \subseteq A \cup B$ oraz $B \subseteq A \cup B$.
- (h) Jest prawdziwe. Istnieją zbiory A, B liczb naturalnych takie, że ani $A \subset B$ ani $B \subset A$.
- (i) Nie jest prawdziwe. Zbiór pusty $\emptyset$ oraz dowolny zbiór niepusty A nie mają wspólnego $\subset$-poprzednika.
- (j) Nie jest prawdziwe. Zbiór wszystkich liczb naturalnych oraz dowolny jego podzbiór A nie mają wspólnego $\subset$-następnika.

17.3. Tautologie KRP

17.3.1.

- (a) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę $\mathfrak{M}$, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacje predykatów P oraz Q odpowiadają własnościom:

  - być liczbą podzielną przez 2
  - być liczbą podzielną przez 4.

  Wtedy:

  - Poprzednik rozważanej implikacji jest zdaniem, które odczytujemy: *Jeśli wszystkie liczby są podzielne przez 2, to wszystkie liczby są podzielne przez 4.* Ta implikacja jest prawdziwa w rozważanej interpretacji, ponieważ ma fałszywy poprzednik.
  - Następnik rozważanej implikacji jest zdaniem, które odczytujemy: *Każda liczba podzielna przez 2 jest też podzielna przez 4.* Ta implikacja jest fałszywa w rozważanej interpretacji, ponieważ np. liczba 2 jest podzielna przez 2, a nie jest podzielna przez 4.

- (b) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę $\mathfrak{M}$, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacje predykatów P oraz Q odpowiadają własnościom:

  - być liczbą parzystą

– być liczbą nieparzystą.

Wtedy poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy (istnieją liczby parzyste oraz istnieją liczby nieparzyste), a jej następnik jest fałszywy (nie istnieje liczba, która jest jednocześnie parzysta i nieparzysta).

- (c) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę $\mathfrak{M}$, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacja predykatu P będzie relacją „być następnikiem". Wtedy poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy (każda liczba ma następnik), a jej następnik jest fałszywy (nie istnieje liczba, będąca następnikiem wszystkich liczb naturalnych).

17.3.2. Przyjmiemy następującą konwencję notacyjną: jeśli w jest wartościowaniem w zbiorze M i $m \in M$, a x jest zmienną indywiduową, to przez w_x^m oznaczamy wartościowanie powstające z wartościowania w przez zastąpienie wartości przypisanej przez w zmiennej x elementem m.

- (a) Dowód przeprowadzamy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP. Wtedy istnieje interpretacja $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models \exists x\ (\alpha \rightarrow \beta)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ \alpha \quad \rightarrow \quad \exists x\ \beta$. Oznacza to, że $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \exists x\ \beta$. Stąd istnieje wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \exists x\ \beta$ (oraz $\mathfrak{M} \models_w \exists x\ (\alpha \rightarrow \beta)$). Na mocy definicji relacji spełniania oznacza to, że dla wszystkich $m \in M$ mamy: $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^m} \beta$.

  Na mocy $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$ mamy: $\mathfrak{M} \models_w \forall x\ \alpha$. Oznacza to, na mocy definicji relacji spełniania, że dla wszystkich $m \in M$ mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$.

  Założenie $\mathfrak{M} \models_w \exists x\ (\alpha \rightarrow \beta)$ oznacza, że dla pewnego $m_0 \in M$ mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \beta$.

  Ponieważ dla wszystkich $m \in M$ mamy $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$, więc mamy także w szczególności: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$.

  Ponieważ reguła odrywania jest niezawodna, z powyższego otrzymujemy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$, co jest sprzeczne z otrzymanym poprzednio $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^m} \beta$. Przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba więc odrzucić. Ostatecznie, rozważana formuła jest tautologią KRP.

- (b) Dowód przeprowadzamy metodą nie wprost. Załóżmy, że x nie jest zmienną wolną w α. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP. Wtedy istnieje interpretacja $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models \alpha \vee \forall x\ \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ (\alpha \vee \beta)$. Oznacza to, że istnieje wartościowanie w takie, że: $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x\ (\alpha \vee \beta)$ (oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha \vee \forall x\ \beta$). Na mocy definicji relacji spełniania istnieje element $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha \vee \beta$. Stąd, mamy: $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \beta$.

  Z założenia, $\mathfrak{M} \models_w \alpha \vee \forall x\ \beta$. Oznacza to, na mocy definicji relacji spełniania, że zachodzi alternatywa:

  – (1) $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ ***lub***
  – (2) $\mathfrak{M} \models_w \forall x\ \beta$.

  Każdy z tych przypadków należy rozpatrzyć oddzielnie.

  Jeśli zachodzi (1), to — ponieważ x nie jest zmienną wolną formuły α — na mocy twierdzenia 16.2.5.3., $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$. Ale $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha$, na mocy przypuszczenia dowodu nie wprost. Stąd przypadek (1) jest wykluczony.

  Jeśli zachodzi (2), to $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta$ dla wszystkich $m \in M$, na mocy definicji relacji spełniania. W szczególności zatem: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$ i otrzymujemy sprzeczność. Tak więc, również przypadek (2) został wykluczony.

  Przypuszczenie dowodu nie wprost należy zatem odrzucić. Ostatecznie, rozważana formuła jest tautologia KRP.

- (c) Wystarczy zauważyć, że formuły $\alpha \rightarrow \neg\beta$ oraz $\beta \rightarrow \neg\alpha$ są semantycznie równoważne, co widoczne jest stąd, że tautologiami KRZ są:

  – $\alpha \rightarrow \neg\beta \ \equiv\ \neg\alpha \vee \neg\beta$
  – $\beta \rightarrow \neg\alpha \ \equiv\ \neg\beta \vee \neg\alpha$
  – $\neg\alpha \vee \neg\beta \ \equiv\ \neg\beta \vee \neg\alpha$.

Formuły semantycznie równoważne spełniane są przez dokładnie te same wartościowania.

17.3.3.

- (a) Trzeba pokazać, że rozważana formuła jest prawdziwa we wszystkich strukturach skończonych, ale nie jest prawdziwa w co najmniej jednej strukturze nieskończonej.

  Po pierwsze, pokażemy, że jeśli podana formuła jest fałszywa w jakiejś strukturze $\mathfrak{M} = \langle M, R \rangle$, gdzie relacja R jest denotacją predykatu P, to zbiór M jest nieskończony. Stąd oczywiście wynika, że rozważana formuła jest prawdziwa we wszystkich modelach skończonych.

  Jeśli $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3\ ((P(x_2, x_3) \rightarrow P(x_1, x_3)) \rightarrow (P(x_1, x_1) \rightarrow P(x_2, x_1)))$ jest fałszywa w $\mathfrak{M} = \langle M, R \rangle$, to istnieje funkcja $f : M \rightarrow M$ taka, że:

  - dla każdego $m \in M$ zachodzi $R(m, m)$
  - dla żadnego $m \in M$ nie zachodzi $R(f(m), m)$
  - dla każdych $m, n \in M$ mamy: jeśli $R(f(m), n)$, to $R(m, n)$.

  Weźmy dowolny element $m \in M$. Konstruujemy ciąg $\langle m_i \rangle$ w sposób następujący:

  - $m_0 = m$
  - $m_{i+1} = f(m_i)$.

  Niech $i < j$. Mamy wtedy:

  - zachodzi $R(m_i, m_{j-1})$
  - nie zachodzi $R(m_j, m_{j-1})$,

  co oznacza, że $m_i \neq m_j$. Tak więc, ciąg $\langle m_i \rangle$ jest różnowartościowy. Stąd zbiór M jest nieskończony.

  Po drugie, zauważmy, że rozważana formuła nie jest prawdziwa w strukturze nieskończonej $\mathfrak{M}$, której uniwersum stanowią wszystkie liczby naturalne, a denotacją predykatu P jest relacja niewiększości $\leqslant$.

17.4. Wynikanie logiczne w KRP

17.4.1. Przyjmiemy następującą konwencję notacyjną: jeśli w jest wartościowaniem w zbiorze M i $m \in M$, a x jest zmienną indywiduową, to przez w_x^m oznaczamy wartościowanie powstające z wartościowania w przez zastąpienie wartości przypisanej przez w zmiennej x elementem m.

- (a) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że nie zachodzi $X \models_{krp} Y$. Wtedy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models Y$. Oznacza to, że: $\mathfrak{M} \models \forall x\ (\alpha \rightarrow \beta)$, $\mathfrak{M} \models \forall x\ (\beta \rightarrow \gamma)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ (\alpha \rightarrow \gamma)$. Stąd, dla pewnego wartościowania w mamy: $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x\ (\alpha \rightarrow \gamma)$. Na mocy definicji relacji spełniania istnieje wtedy $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \gamma$.

  Ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ (\alpha \rightarrow \beta)$, więc $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha \rightarrow \beta$ dla wszystkich $m \in M$, a więc w szczególności również $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \beta$. Podobnie, ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ (\beta \rightarrow \gamma)$, więc $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta \rightarrow \gamma$ dla wszystkich $m \in M$, a więc w szczególności również $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta \rightarrow \gamma$. Skoro $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta \rightarrow \gamma$, to oczywiście także $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \gamma$, ponieważ reguła sylogizmu hipotetycznego jest regułą niezawodną. Otrzymaliśmy zatem sprzeczność. Przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba więc odrzucić. Ostatecznie, zachodzi wynikanie logiczne: $X \models_{krp} Y$.

- (b) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że nie zachodzi $X \models_{krp} Y$. Wtedy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models Y$.

  Oznacza to, że: $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \{\forall x\ (\alpha \wedge \beta), \forall x\ (\alpha \vee \beta)\}$. Zachodzi zatem alternatywa:

  - (1) $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ (\alpha \wedge \beta)$ ***lub***

– (2) $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ (\alpha \vee \beta)$.

Każdy z tych przypadków należy rozpatrzyć oddzielnie.

Jeśli zachodzi (1), to istnieje wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x\ (\alpha \wedge \beta)$. Na mocy definicji relacji spełniania istnieje wtedy element $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} (\alpha \wedge \beta)$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$. W szczególności zatem, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$. Podobnie, ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta$. W szczególności zatem, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$. Oznacza to, na mocy definicji relacji spełniania, że: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \wedge \beta$. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem przypadek (1) został wykluczony.

Jeśli zachodzi (2), to istnieje wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x\ (\alpha \vee \beta)$. Na mocy definicji relacji spełniania istnieje wtedy element $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} (\alpha \vee \beta)$. Stąd: $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \beta$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$. W szczególności, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$. Podobnie, ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta$. W szczególności, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$. Otrzymaliśmy sprzeczność (nawet dwie), a zatem również przypadek (2) został wykluczony.

Ostatecznie, przypuszczenie dowodu nie wprost należy odrzucić. Zachodzi wynikanie logiczne $X \models_{krp} Y$.

17.4.2.

- (a) Wystarczy znaleźć interpretację $\mathfrak{M}$ taką, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, czyli w tym przypadku znaleźć zbiór M oraz podać odpowiednią interpretację $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ predykatu P w tym zbiorze. Niech:
  - $M = \{1, 2, 3\}$
  - $\Delta_{\mathfrak{M}}(P) = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$.

  Wtedy $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.
- (b) Wystarczy znaleźć interpretację $\mathfrak{M}$ taką, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, czyli w tym przypadku znaleźć zbiór M oraz podać odpowiednią interpretację $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ predykatu P oraz $\Delta_{\mathfrak{M}}(Q)$ predykatu Q w tym zbiorze. Niech:
  - M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych
  - $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ będzie zbiorem wszystkich liczb parzystych
  - $\Delta_{\mathfrak{M}}(Q)$ będzie zbiorem wszystkich liczb nieparzystych.

  Wtedy $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.

17.5. Teoria mnogości

17.5.1. Definicje wszystkich rozpatrywanych pojęć muszą być sformułowane jedynie w terminach relacji $\in$ oraz relacji identyczności $=$.

- (a) Definiujemy najpierw pojęcia: singletonu, pary nieuporządkowanej i pary uporządkowanej:

$$x = \{y\} \ \equiv\ \forall z(z \in x \equiv z = y)$$

$$x = \{y, z\} \ \equiv\ \forall u(u \in x \equiv (u = y \vee u = z))$$

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

  Predykat „być funkcją” ma następującą definicję:

$$\mathrm{Fn}(x) \ \equiv\ (\forall y(y \in x \to \exists u \exists v(y = \langle u, v\rangle)) \wedge \forall y \forall u \forall v((\langle y, u\rangle \in x \wedge \langle y, v\rangle \in x) \to u = v)).$$

  Definiujemy pojęcia dziedziny i przeciwdziedziny:

$$y = \delta(x) \ \equiv\ \forall z(z \in y \equiv \exists u(\langle z, u\rangle \in x))$$

$$y = \rho(x) \ \equiv \ \forall z(z \in y \equiv \exists u(\langle u, z\rangle \in x)).$$

Definiujemy własność „być funkcją różnowartościową”:

$$\mathrm{In}(x) \ \equiv \ \mathrm{Fn}(x) \wedge \forall y \forall z \forall u \forall v(((\langle y, u\rangle \in x \wedge \langle z, v\rangle \in x) \wedge u = v) \rightarrow y = z).$$

Wreszcie, własność „być funkcją różnowartościową z y na z” definiujemy następująco:

$$\mathrm{Bi}(x, y, z) \ \equiv \ \mathrm{In}(x) \wedge (\delta(x) = y \wedge \rho(x) = z).$$

- (b) Definiujemy relacje inkluzji oraz inkluzji właściwej:

$$x \subseteq y \ \equiv \ \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$$

$$x \subset y \ \equiv \ x \subseteq y \wedge \neg x = y.$$

Definiujemy własność „być zbiorem potęgowym zbioru x”:

$$y = \wp(x) \ \equiv \ \forall z(z \in y \equiv z \subseteq x).$$

Fakt, że zbiory y oraz z są równoliczne ma zapis następujący:

$$\exists x \ \mathrm{Bi}(x, y, z).$$

Wtedy twierdzenie Cantora, głoszące, że żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów otrzymuje zapis następujący:

$$\neg \exists x \exists y \ \mathrm{Bi}(x, y, \wp(y)).$$

- (c) Definiujemy zbiór pusty oraz operację sumy zbiorów:

$$x = \emptyset \ \equiv \ \forall y \neg y \in x$$

$$z = x \cup y \ \equiv \ \forall u(u \in z \equiv (u \in x \vee u \in y)).$$

Definiujemy liczby porządkowe oraz graniczne liczby porządkowe:

$$\mathrm{Ord}(x) \ \equiv \ (\forall y \forall z((z \in y \wedge y \in x) \rightarrow z \in x) \wedge \forall y \forall z((y \in x \wedge z \in x) \rightarrow (z \in y \vee y = z \vee y \in z)))$$

$$\mathrm{Lim}(x) \ \equiv \ ((\mathrm{Ord}(x) \wedge \neg x = \emptyset) \wedge \forall y \neg x = y \cup \{x\}).$$

Definiujemy najmniejszą graniczną liczbę porządkową ω:

$$x = \omega \ \equiv \ (\mathrm{Lim}(x) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \neg \mathrm{Lim}(y))).$$

Definiujemy własność „być zbiorem przeliczalnym”:

$$\mathrm{Ctb}(x) \ \equiv \ \exists y \ \mathrm{Bi}(y, x, \omega).$$

Definiujemy własność „być zbiorem nieskończonym”:

$$\mathrm{Inf}(x) \ \equiv \ \exists y \exists z \ (z \in \wp(x) \wedge \mathrm{Bi}(y, x, z)).$$

Wreszcie, definiujemy własność „być zbiorem nieprzeliczalnym”:

$$\mathrm{Uct}(x) \ \equiv \ \mathrm{Inf}(x) \wedge \neg \ \mathrm{Ctb}(x).$$

Zdanie *Istnieje zbiór nieprzeliczalny* ma zatem postać:

$$\exists x \ \mathrm{Uct}(x).$$

Zwróćmy uwagę, że w definicji własności „być zbiorem nieprzeliczalnym” piszemy, że nie istnieje funkcja ustalająca równoliczność pewnych zbiorów.

17.5.2.

- (a) Wystarczy znaleźć zbiory A, B oraz C takie, że poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Takie są np. zbiory:
  - $A = \{1, 2\}$
  - $B = \{\{1, 2\}, 3\}$
  - $C = \{\{\{1, 2\}, 3\}, 4\}$.

  Mamy wtedy: $A \in B$, $B \in C$ oraz $A \notin C$.
- (b) Wystarczy znaleźć zbiory A, B oraz C takie, że poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Takie są np. zbiory:
  - $A = \{1, 2\}$
  - $B = \{\{1, 2\}, 3\}$
  - $C = \{\{1, 2\}, 4\}$.

  Mamy wtedy: $A \in B$, $B \neq C$ oraz $A \in C$.
- (c) Wystarczy znaleźć zbiory A, B oraz C takie, że poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Takie są np. zbiory:
- $A = \{1, 2\}$
- $B = \{1, 2, 3\}$
- $C = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, 4\}$.

Mamy wtedy: $A \subseteq B$, $B \in C$ oraz $A \in C$.

17.5.3.

- (a) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest prawem rachunku zbiorów. Wtedy istnieją zbiory A, B oraz C takie, że:
  - $A \subseteq B$
  - $B \cap C = \emptyset$
  - $A \cap C \neq \emptyset$.

  Z ostatniej nierówności otrzymujemy, że istnieje $x \in A \cap C$, czyli $x \in A$ oraz $x \in C$. Skoro $A \subseteq B$, to $x \in B$. Ponieważ $B \cap C = \emptyset$, to $x \notin C$ i otrzymujemy sprzeczność. Tak więc, poczynione przypuszczenie należy odrzucić. Ostatecznie, jeśli $A \subseteq B$ oraz $B \cap C = \emptyset$, to $A \cap C = \emptyset$, dla dowolnych zbiorów A, B oraz C.
- (b) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest prawem rachunku zbiorów. Wtedy istnieją zbiory A oraz B takie, że:
  - $A = A \cap B$
  - $A \nsubseteq B$.

  Z drugiego z powyższych warunków otrzymujemy, że istnieje $x \in A$ taki, że $x \notin B$. Stąd i z warunku pierwszego, skoro $x \in A$ oraz $A = A \cap B$, to $x \in A \cap B$, czyli także $x \in B$. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem poczynione przypuszczenie należy odrzucić. Ostatecznie, jeśli $A = A \cap B$, to $A \subseteq B$, dla dowolnych zbiorów A oraz B.
- (c) Dla dowodu, że produkt kartezjański dowolnej niepustej rodziny $\{A_i : i \in I\}$ zbiorów niepustych jest niepusty wystarczy skorzystać z pewnika wyboru: wybieramy po jednym elemencie a_i z każdego ze zbiorów A_i. Wtedy ciąg $\langle a_i \rangle_{i \in I}$ jest elementem produktu kartezjańskiego rodziny $\{A_i : i \in I\}$.

17.5.4.

- (a) Przypominamy, że różnica symetryczna zbiorów A i B zdefiniowana jest wzorem:

$$A \div B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

  Operacja ta jest łączna, tzn.: $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$, można więc pisać $A \div B \div C$ w miejsce $A \div (B \div C)$ lub $(A \div B) \div C$. Mamy:

  - $A \cup B = A \div B \div (A \cap B)$
  - $A - B = A \div (A \cap B)$.

- (b) Niech zbiór C otrzymany będzie ze zbiorów A i B z pomocą operacji $\cap$ i $-$. Liczbę zastosowań operacji $\cap$ i $-$ potrzebnych do otrzymania C z A i B nazwiemy *wysokością* zbioru C. Przez indukcję po wysokości zbioru C pokażemy, że C jest podzbiorem albo A albo B.

  Jeśli wysokość C wynosi 0, to $C = A$ lub $C = B$ i twierdzenie jest udowodnione.

  Niech C ma wysokość $n+1$ i załóżmy, że twierdzenie zostało udowodnione dla wszystkich zbiorów o mniejszej wysokości. Wtedy $C = D \cap E$ lub $C = D - E$ dla pewnych zbiorów D i E, których wysokość jest mniejsza niż $n + 1$.

  W obu przypadkach $C \subseteq D$, a z założenia indukcyjnego D jest podzbiorem albo A, albo B. Zatem również C jest podzbiorem albo A, albo B.

  Tak więc, z A i B z pomocą operacji $\cap$ i $-$ otrzymać można tylko podzbiory A lub podzbiory B. Ale $A \cup B$ nie zawsze jest podzbiorem A lub podzbiorem B. Stąd, operacji sumy $\cup$ nie można zdefiniować w terminach operacji iloczynu $\cap$ i różnicy $-$.

17.5.5.

- (a) Następujące warunki są równoważne, dla dowolnych relacji R oraz S oraz dowolnych x i y:

  - $x(R \circ S)^{-1}y$
  - $y(R \circ S)x$
  - $\exists z\ (yRz \wedge zSx)$
  - $\exists z\ (zSx \wedge yRz)$
  - $\exists z\ (xS^{-1}z \wedge RS^{-1}y)$
  - $x(S^{-1} \circ R^{-1})y$.

  Otrzymujemy stąd zatem: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

- (b) Jeśli R jest relacją identyczności, to oczywiście jest relacją równoważności, a także jest częściowym porządkiem (bo jest zwrotna i przechodnia, a następnik implikacji charakteryzującej warunek antysymetrii jest zawsze spełniony, więc R jest również antysymetryczna).

  Z drugiej strony, skoro R jest jednocześnie równoważnością i częściowym porządkiem, to ponieważ R jest zarazem symetryczna i antysymetryczna, to dla dowolnych x oraz y, z $R(x, y)$ otrzymujemy $x = y$. Ponieważ R jest w dodatku zwrotna, więc R musi być relacją identyczności.

- (c) Przypominamy, że:

  - operacja złożenia relacji jest łączna, tj.: $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$
  - jeśli $R_1 \subseteq R_2$, to $R \circ R_1 \subseteq R \circ R_2$ oraz $R_1 \circ R \subseteq R_2 \circ R$ dla dowolnych relacji R, R_1 i R_2
  - relacja R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{-1}$
  - relacja R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$
  - jeśli relacje R i S są zwrotne, to relacja $R \circ S$ też jest zwrotna.

Niech teraz R_1 i R_2 będą relacjami równoważności.
Najpierw pokazujemy, że jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
Jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to zachodzą następujące równości:

$$R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = R_2 \circ R_1.$$

Niech $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Pokażemy, że $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością.
Po pierwsze, mamy:

$$(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1} = R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest symetryczna.
Po drugie, mamy:

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2) = R_1 \circ (R_2 \circ R_1) \circ R_2 = R_1 \circ (R_1 \circ R_2) \circ R_2 = (R_1 \circ R_1) \circ (R_2 \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest przechodnia.
Zwrotność $R_1 \circ R_2$ jest oczywista, ponieważ R_1 oraz R_2 są zwrotne z założenia.

17.6. Algebry Boole'a

17.6.1.

- (a) $\boxminus(\boxplus(x, y)) \doteq \boxtimes(\boxminus(x), \boxminus(y))$.
- (b) Zbiór I elementów algebry Boole'a jest jej ideałem, gdy:
  - $\forall x \forall y\ ((x \in I \wedge y \in I) \rightarrow \boxplus(x, y) \in I)$
  - $\forall x \forall y\ ((x \in I \wedge y \leqslant x) \rightarrow y \in I)$.
- (c) Zbiór F elementów algebry Boole'a jest jej filtrem, gdy:
  - $\forall x \forall y\ ((x \in F \wedge y \in F) \rightarrow \boxtimes(x, y) \in F)$
  - $\forall x \forall y\ ((x \in F \wedge x \leqslant y) \rightarrow y \in F)$.

17.6.2. Niech $\mathfrak{B}$ będzie algebrą Boole'a o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb rzeczywistych z odcinka $[0, 1]$ wraz z operacjami:

- $\boxplus(x, y) = \max\{x, y\}$
- $\boxtimes(x, y) = \min\{x, y\}$
- $\boxminus(x) = 1 - x$,

gdzie jedynką algebry jest 1, a jej zerem jest 0. Wtedy:

- (a) Algebra $\mathfrak{B}$ nie zawiera atomów.
- (b) Algebra $\mathfrak{B}$ nie zawiera koatomów.
- (c) Porządek algebry $\mathfrak{B}$ jest liniowy.

17.6.3.

- (a) Przez różnicę elementów x oraz y rozumiemy element $\boxtimes(x, \boxminus(y))$. Oto dowód (w drugiej aksjomatyce), że kres górny elementów x i y jest równy kresowi górnemu elementu y oraz różnicy x i y, czyli że zachodzi: $\boxplus(x, y) = \boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y)))$:

1.	$\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxtimes(\boxplus(y, x), \boxplus(y, \boxminus(y)))$	aksjomat B_2^7
2.	$\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxtimes(\boxplus(y, x), \triangle)$	1, aksjomat B_2^1
3.	$\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxplus(y, x)$	2, aksjomat B_2^2
4.	$\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxplus(x, y)$	3, aksjomat B_2^6
5.	$\boxplus(x, y) = \boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y)))$	4, symetryczność identyczności.

- (b) Mamy pokazać, że dopełnienie kresu dolnego elementów x i y jest równe kresowi górnemu dopełnień elementów x i y, czyli że: $\boxminus(\boxtimes(x, y)) = \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))$.

  Po pierwsze, przypomnijmy, że następujące warunki są równoważne:

  - (1) $\boxtimes(x, y) = x$
  - (2) $\boxplus(x, y) = y$.

  Po drugie, zauważmy, że zachodzi implikacja:

  (3) jeśli $\boxtimes(x, z) = \triangle$ oraz $\boxplus(x, z) = \triangledown$, to $z = \boxminus(x)$.

  Istotnie, następujące dwa ciągi równości, wraz z (1) oraz (2) uzasadniają (3):

$$z = \boxplus(\triangle, z) = \boxplus(\boxtimes(x, \boxminus(x)), z) = \boxtimes(\boxplus(x, z), \boxplus(\boxminus(x), z)) = \boxtimes(\triangledown, \boxplus(\boxminus(x), z)) = \boxplus(\boxminus(x), z).$$

$$z = \boxtimes(\triangledown, z) = \boxtimes(\boxplus(x, \boxminus(x)), z) = \boxplus(\boxtimes(x, z), \boxtimes(\boxminus(x), z)) = \boxplus(\triangle, \boxtimes(\boxminus(x), z)) = \boxtimes(\boxminus(x), z).$$

  Pokażemy teraz, że:

  - (4) $\boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))) = \triangle$
  - (5) $\boxplus(\boxtimes(x, y), \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))) = \triangledown$.

  Wtedy, na mocy (3), (4) oraz (5) otrzymamy poszukiwaną równość $\boxminus(\boxtimes(x, y)) = \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))$.

  Dowód (4) jest następującym ciągiem równości:

$$\begin{aligned}
&\boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))) = \\
&\boxplus(\boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxminus(x)), \boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxminus(y))) = \\
&\boxplus(\boxtimes(\boxtimes(y, x), \boxminus(x)), \boxtimes(x, \boxtimes(y, \boxminus(y)))) = \\
&\boxplus(\boxtimes(y, \boxtimes(x, \boxminus(x))), \boxtimes(x, \triangle)) = \boxplus(\boxtimes(y, \triangle), \triangle) = \\
&\boxplus(\triangle, \triangle) = \\
&\triangle.
\end{aligned}$$

  Dowód (5) jest następującym ciągiem równości:

$$\begin{aligned}
&\boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))) = \\
&\boxtimes(\boxplus(x, \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))), \boxplus(y, \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y)))) = \\
&\boxtimes(\boxplus(\boxplus(x, \boxminus(x)), \boxminus(y)), \boxplus(y, \boxplus(\boxminus(y), \boxminus(x)))) = \\
&\boxtimes(\boxplus(\triangledown, \boxminus(y)), \boxplus(\boxplus(y, \boxminus(y)), \boxminus(x))) = \\
&\boxtimes(\triangledown, \boxplus(\triangledown, \boxminus(x))) = \\
&\boxtimes(\triangledown, \triangledown) = \\
&\triangledown.
\end{aligned}$$

17.6.4.

- (a) Zbiór $\mathbb{F}$ jest filtrem rozważanej algebry.
- (b) Atomami algebry $\mathfrak{B}$ są dokładnie wszystkie zbiory jednoelementowe. Koatomami algebry $\mathfrak{B}$ są dokładnie wszystkie zbiory, których dopełnienia są jednoelementowe.

17.7. Język KRP a języki etniczne

17.7.1.

- (a) Wybieramy predykaty:
  - $P(x)$ — x jest prawdą
  - $F(x)$ — x jest fałszem
  - $B(x)$ — x jest piękne
  - $U(x)$ — x jest wstrętne.

  Wtedy struktura składniowa zdania *Są wstrętne prawdy i piękne fałsze* jest następująca:

  $$\exists x\ (U(x) \wedge P(x)) \wedge \exists x\ (B(x) \wedge F(x)).$$

- (b) Wybieramy predykaty:
  - $K(x)$ — x jest kobietą
  - $M(x)$ — x jest mężczyzną
  - $N(x)$ — x może nawiązać umowę o pracę
  - $R(x)$ — x może rozwiązać umowę o pracę.

  Wtedy struktura składniowa zdania *Kobiety i mężczyźni mają równe prawa przy nawiązywaniu lub rozwiązywaniu umowy o pracę* jest następująca:

  $$\forall x\ ((K(x) \vee M(x)) \rightarrow (N(x) \wedge R(x))).$$

  Zwróć uwagę, że w powyższym przykładzie słowu „i" odpowiada alternatywa, a słowu „lub" odpowiada koniunkcja.

- (c) Mamy tu następujące predykaty:
  - $P(x, y, u, v)$ — z x do y jest dalej niż z u do v
  - $Q(x)$ — x jest miejscowością
  - $R(x, y)$ — x jest niewiększa od y
  - $S(x)$ — x jest wioską w Japonii.

  Mamy ponadto dwie stałe indywiduowe: a — denotującą Kutno oraz b — denotującą Paryż. Struktura składniowa zdania *Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii* jest zatem następująca:

  $$\forall x \forall y\ (((Q(x) \wedge S(y)) \wedge \forall z\ (S(z) \rightarrow R(y, z))) \rightarrow P(a, x, b, y)).$$

- (d) Mamy tu jeden predykat dwuargumentowy: $P(x, y)$ — x myśli o y. Mamy ponadto jedną stałą indywiduową a, której denotacją jest wypowiadający rozważane zdanie. Trzeba również użyć predykatu identyczności $\doteq$. Struktura składniowa zdania *Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie* jest zatem następująca:

  $$\forall x \forall y\ (P(x, y) \rightarrow x \doteq y) \wedge P(a, a).$$

- (e) Załóżmy, że predykatem istotnym dla rekonstrukcji budowy składniowej tego zdania jest:
  - $P(x, y, z, t)$ — x ufa y w sprawie z w czasie t.

  Wtedy struktura składniowa zdania *Nikt nigdy nikomu w żadnej sprawie nie ufa* jest następująca:

  $$\neg\exists x\exists y\exists z\exists t\ P(x, y, z, t).$$

  Można też proponować inne rekonstrukcje logiczne tego zdania, wprowadzając dodatkowo predykaty dla oznaczania własności: „być momentem", „być sprawą", „być osobą", itd. W istocie, nie zawsze jest jasne, kiedy w języku naturalnym mamy do czynienia z predykatem prostym („nierozkładalnym" na inne predykaty).

17.7.2.

- (a) *Ktokolwiek nie kona, rzężąc, pocąc się i mocząc przy wdychaniu oparów rtęci, ten świruje jarząbka.*
- (b) *Jeśli wszyscy są bezrobotni, to o ile ktoś jest bogatszy od wszystkich, to co najmniej jedna osoba nie jest odpowiedzialna za stan gospodarki tego nieszczęsnego kraju.*
- (c) *Dla dowolnych pięciu (punktów), jeśli Drugi leży między Pierwszym a Trzecim, a Trzeci leży między Czwartym a Piątym, to istnieje Szósty, leżący między Pierwszym a Czwartym taki, że Drugi leży między Piątym a Szóstym.*

17.7.3.

- (a) To nie jest prawda logiczna. Nie jest to też prawda faktualna. Jak dotąd, (co najmniej) jeden z papieży był kobietą.
- (b) Najpierw trzeba ustalić semantykę zwrotu *dawno, dawno temu*. Może to oznaczać np. milion lat temu, albo sto lat temu, itp. Może też oznaczać np. rok przed twoim urodzeniem — zauważ, że rok przed twoim urodzeniem to dla ciebie przeszłość *nieskończenie* odległa, podobnie jak minuta po twoim zgonie będzie dla ciebie przyszłością nieskończenie odległą. Dość żartów. Niech *dawno, dawno temu* znaczy np. *milion lat i dwa tygodnie* temu. Po pierwsze, wiadomo, że istnieją liczby niewymierne, a więc nie wszystkie liczby są wymierne. Po drugie *istnienie* liczb jest niezależne od czasu. Tak więc, rozważane zdanie nie jest ani prawdą logiczną, ani prawdą faktualną. Oczywiście inaczej rzecz się ma np. ze zdaniem stwierdzającym, że *3000 lat temu sądzono, że wszystkie liczby są wymierne*. To zdanie zawiera jednak modalność (doksastyczną) i jego analiza wykracza poza Elementarz Logiczny.
- (c) Ta koniunkcja jest fałszem logicznym, choć każdy z jej członów z osobna może być prawdą faktualną. Nikt nie jest (biologicznie) starszy od własnej matki.
- (d) Przypomnijmy:
  - ODWIECZNOŚĆ PRAWDY: *Sąd A jest prawdziwy w czasie t wtedy i tylko wtedy, gdy A jest prawdziwy w dowolnym czasie wcześniejszym t'.*
  - WIECZNOŚĆ PRAWDY: *Sąd A jest prawdziwy w czasie t wtedy i tylko wtedy, gdy A jest prawdziwy w dowolnym czasie późniejszym t'.*

  Tak więc, zdanie *Prawdy wieczne są odwieczne* nie jest prawdą logiczną. Łatwo zbudować zdanie, wyrażające prawdę wieczną, która nie jest odwieczna.
- (e) Temu zdaniu nie można przypisać wartości logicznej. Termin *lekko spłaszczony* nie jest terminem ostrym.

* * *

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl