Metalogika (2)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Uniwersytet Opolski

Ogólna teoria konsekwencji była przez wiele lat rozwijana głównie przez logików polskich, por.:

- Czelakowski, J. 2001. *Protoalgebraic Logics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
- Łoś, J., Suszko, R. 1958. Remarks on sentential logic. *Indagationes Mathematicae* **20**, 177–183.
- Pogorzelski, W.A., Wojtylak, P. 2008. *Elements of the theory of completeness in propositional logic.* Birkhäuser, Basel Boston Berlin.
- Wójcicki, R. 1988. *Theory of Logical Calculi. Basic Theory of Consequence Operations.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
- Tarski, A. 2001. *Pisma logiczno-filozoficzne. Tom 2: Metalogika*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Naszym celem miało być sprawozdanie najważniejszych dokonanych ustaleń (w odniesieniu do logik zdaniowych). **ALE...**

Popłoch i Zakłopotanie. *Ignotum per ignotum?*

- Poprzednie dwa wykłady wywołały (jak się zdaje) Popłoch wśród słuchaczy, co wprawiło w Zakłopotanie prowadzącego.
- Decydujemy się zatem na krótką powtórkę fragmentu Elementarza: przypomnimy dowody założeniowe w KRZ.
- Uprzejmie proszę nie żywić urazy: wykłady mają przynieść pożytek, a nie epatować publiczność niezrozumiałymi terminami i konstrukcjami.

- Wykorzystamy stosowne fragmenty wykładów: Logiki Matematycznej oraz Logiki Radosnej (www.logic.amu.edu.pl).
- Proste systemy dedukcji naturalnej wydają się być dobrym intuicyjnym wprowadzeniem do teorii ogólnych operacji konsekwencji.
- Na stronie internetowej tych wykładów zamieszczono szereg dodatków związanych z tym i następnym wykładem.

Pies Chryzypa

Pies Chryzypa. Tropiący Pies staje na rozwidleniu ścieżek. Obwąchuje jedną z nich, a potem już bez obwąchiwania drugiej, puszcza się nią biegiem.

Pies Chryzypa zastosował niezawodną regułę wnioskowania zwaną regułą opuszczania alternatywy. Z przesłanek postaci:

Zwierzyna na pierwszej ścieżce lub na drugiej ścieżce.
Ale na pierwszej ścieżce nie było Zwierzyny.

wyprowadza wniosek:

Zwierzyna na drugiej ścieżce.

$$\frac{\alpha \vee \beta, \quad \neg\alpha}{\beta}.$$

Ziuta i Zygfryd

Ziuta i Zygfryd. W kuchni w familoku na Śląsku Ziuta duma wieczorem:
Jeśli dziś była wypłata, to mój Zygfryd już jest pijany.
[Wchodzi Zygfryd, cały trzeźwy.] Ziuta konstatuje:
Ale przecie — chwała Panu Najwyższemu — mój Zygfryd nie jest pijany!
A po 2 sekundach oszołomienia konkluduje:
Znaczy, psiakość, nie było dziś wypłaty.

Ziuta stosuje niezawodną regułę wnioskowania, zwaną modus tollendo tollens:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \quad \neg\beta}{\neg\alpha}.$$

„Milicja, Wrocław i ja''

Czy na podstawie uznania następujących stwierdzeń:

- *Jeśli nie udowodniono podejrzanemu popełnienia morderstwa, to: stwierdzono samobójstwo denata lub wykonano sentencję wyroku, o ile udało się zatrzymać podejrzanego.*
- *Podejrzanemu nie udowodniono popełnienia morderstwa.*
- *Nie stwierdzono samobójstwa denata.*
- *Udało się zatrzymać podejrzanego.*

gotowa jesteś uznać stwierdzenie:

- *Wykonano sentencję wyroku*?

„Milicja, Wrocław i ja"

Zdania proste:

- α: *Udowodniono podejrzanemu popełnienie morderstwa.*
- β: *Stwierdzono samobójstwo denata.*
- γ: *Udało się zatrzymać podejrzanego.*
- δ: *Wykonano sentencję wyroku.*

Struktury składniowe przesłanek:

- $\neg\alpha \rightarrow (\beta \vee (\gamma \rightarrow \delta))$
- $\neg\alpha$
- $\neg\beta$
- γ

„Milicja, Wrocław i ja"

Drzewo argumentacji (dowodu):

$$\dfrac{\gamma \qquad \dfrac{\neg\beta \qquad \dfrac{\neg\alpha \qquad \neg\alpha \rightarrow (\beta \vee (\gamma \rightarrow \delta))}{\beta \vee (\gamma \rightarrow \delta)}}{\gamma \rightarrow \delta}}{\delta}$$

W tej argumentacji posłużono się kolejno (niezawodnymi) regułami:

- modus ponens (reguła odrywania)
- opuszczania alternatywy
- modus ponens.

Argumentacja jest **poprawna** z logicznego punktu widzenia.

Rozmyślania Kremlowskie

Rozmyślania Kremlowskie. Środek nocy. Tylko w jednym oknie na Kremlu pali się światło. Towarzysz Stalin (Josif Dżugaszwili) rozmyśla o wykończeniu towarzysza Trockiego (Leo Bronsteina):
Jest cziełowiek, jest probliema.
Nu Leo, pagadi! Niet cziełowieka, niet probliemy.

Rozumowanie towarzysza Stalina **nie jest** poprawne z logicznego punktu widzenia. Wnioskuje on tu wedle **zawodnej** reguły wnioskowania (nazwiemy ją Regułą Stalina):

$$\frac{\alpha \to \beta}{\neg\alpha \to \neg\beta}.$$

Reguły pierwotne

Czy można środkami czysto syntaktycznymi scharakteryzować (semantyczne) pojęcia: tautologii oraz reguły niezawodnej w KRZ? Pracujemy w języku KRZ. Konsekwencja założeniowa oparta jest jedynie na regułach (bez aksjomatów).

Można na różne sposoby dobierać **reguły pierwotne**.

- (RO) **Reguła odrywania**. Jeśli do dowodu należy implikacja oraz jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji. W zapisie symbolicznym:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \quad \alpha}{\beta}.$$

Reguły pierwotne

- (DK) **Reguła dołączania koniunkcji**. Do dowodu wolno dołączyć koniunkcję, o ile oba jej człony należą do dowodu.

$$\frac{\alpha, \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}.$$

- (OK) **Reguła opuszczania koniunkcji**. Jeśli do dowodu należy koniunkcja, to wolno dołączyć do dowodu każdy z jej członów.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}.$$

Reguły pierwotne

- (DA) **Reguła dołączania alternatywy**. Jeśli do dowodu należy jakaś formuła, to do dowodu wolno dołączyć alternatywę, której jednym z członów jest ta formuła.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}.$$

- (OA) **Reguła opuszczania alternatywy**. Jeśli do dowodu należy alternatywa oraz negacja jednego z jej członów, to do dowodu można dołączyć pozostały człon tej alternatywy.

$$\frac{\alpha \vee \beta, \quad \neg\alpha}{\beta} \qquad \frac{\alpha \vee \beta, \quad \neg\beta}{\alpha}.$$

Reguły pierwotne

- (DR) **Reguła dołączania równoważności**. Do dowodu wolno dołączyć równoważność, o ile należy do dowodu implikacja, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikacja odwrotna.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow \alpha}{\alpha \equiv \beta}.$$

- (OR) **Reguła opuszczania równoważności**. Jeśli do dowodu należy równoważność, to wolno dołączyć do dowodu zarówno implikację, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikację odwrotną.

$$\frac{\alpha \equiv \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \qquad \frac{\alpha \equiv \beta}{\beta \rightarrow \alpha}.$$

Reguły pierwotne

- **Uwaga 1.** Zauważ, że w podanych wyżej regułach nie ma ani słowa o **prawdzie**. Wykonaj jednak **ćwiczenie**: sprawdź, że wszystkie powyższe reguły są niezawodne.
- **Uwaga 2.** Zauważ, że reguły są dwóch rodzajów: dotyczą wprowadzania lub opuszczania stałych logicznych. W szczególności, (RO) jest regułą opuszczania implikacji. Dualna do niej reguła wprowadzania implikacji nie będzie dziś omawiana.

Reguły pierwotne

Przypomnijmy: jeśli S jest zbiorem wszystkich formuł języka KRZ, to przez *regułę wnioskowania* rozumiemy dowolny zbiór par (X, α) (*sekwentów*), gdzie $X \subseteq S$ oraz $\alpha \in S$. Pierwsze elementy takich par nazywamy *przesłankami* reguły, a drugie jej *wnioskiem*.

Oznaczmy przez *jas* zbiór podanych wyżej reguł. Każda reguła ze zbioru *jas* jest nieskończonym zbiorem sekwentów, o budowie składniowej podanej w symbolicznym zapisie tej reguły.

Możemy używać też bardzo wielu dalszych reguł, które wyprowadzone są z powyższych reguł pierwotnych i noszą nazwę reguł **wtórnych** (albo: **wyprowadzalnych**).

Operacja konsekwencji

Operacja konsekwencji to pewna funkcja C, która każdemu zbiorowi formuł X przyporządkowuje pewien zbiór formuł $C(X)$. Myśl o niej tak oto:

- Mam dany jakiś zbiór przesłanek X. Jaki jest ogół wniosków, które mogę wyprowadzić z X, za pomocą pewnych, z góry ustalonych reguł wnioskowania?

Tak, zgadłaś! To właśnie będzie ów zbiór $C(X)$.

Wnioski otrzymujemy z przesłanek stosując ustalone reguły wnioskowania. Operacja konsekwencji będzie zatem wyznaczona przez owe reguły.

Uwaga. Teraz będzie ścisła definicja. **Nie trwóż się!** Okaże się ona o wiele prostsza od ezoterycznych konstrukcji pojęciowych, z którymi obcujesz na innych wykładach.

Operacja konsekwencji

Niech S będzie zbiorem wszystkich formuł języka KRZ. Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną rodziną reguł wnioskowania w KRZ. Niech $\mathcal{N}$ oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych. Niech 2^S oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów S. Przez **operację konsekwencji w KRZ wyznaczoną przez $\mathcal{R}$** rozumiemy każdą funkcję $C : 2^S \to 2^S$, zdefiniowaną indukcyjnie następującymi warunkami dla dowolnego zbioru formuł X języka KRZ:

- $C^0_{\mathcal{R}}(X) = X$
- $C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X) = C^k_{\mathcal{R}}(X) \cup \{\alpha \in S : (\exists R \in \mathcal{R})(\exists P \subseteq C^k_{\mathcal{R}}(X))\, (P, \alpha) \in R\}$
- $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C^k_{\mathcal{R}}(X) : k \in \mathcal{N}\}$.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ czytamy: **α jest wyprowadzalna z X za pomocą reguł należących do $\mathcal{R}$**.

Operacja konsekwencji

Powyższy zapis symboliczny można też wyrazić „ludzką mową”:

- $C^0_{\mathcal{R}}(X)$ to po prostu wyjściowy zbiór X
- $C^1_{\mathcal{R}}(X)$ to zbiór X plus wszystkie bezpośrednie wnioski otrzymane z przesłanek ze zbioru X wedle reguł wnioskowania z zestawu $\mathcal{R}$
- elementami zbioru $C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X)$ są elementy $C^k_{\mathcal{R}}(X)$ oraz wszystkie wnioski wszystkich reguł z $\mathcal{R}$, których przesłanki brane są ze zbioru $C^k_{\mathcal{R}}(X)$
- $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest sumą wszystkich otrzymanych w ten sposób wniosków.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ oznacza zatem, że formułę α otrzymujemy z założeń X stosując (być może wielokrotnie) reguły wnioskowania z podanego ich zestawu $\mathcal{R}$.

Operacja konsekwencji

Jak zatem „działa” operacja konsekwencji na danym zbiorze przesłanek X? Czyli jak otrzymujemy zbiór $C_{\mathcal{R}}(X)$?

Bierzesz dowolną regułę wnioskowania R z zestawu $\mathcal{R}$ i tyle przesłanek ze zbioru X, ilu przesłanek wymaga reguła R. Wtedy zarówno elementy samego X, jak i wszystkie wnioski wszystkich takich reguł R dla dowolnych przesłanek z X tworzą zbiór $C^1_{\mathcal{R}}(X)$, czyli zbiór „bezpośrednich wniosków” z przesłanek znajdujących się w X. Procedurę tę powtarzasz wychodząc teraz od $C^1_{\mathcal{R}}(X)$ zamiast od X. Dostajesz wszystkie „wnioski co najwyżej drugiego stopnia” z przesłanek znajdujących się w X, czyli zbiór $C^2_{\mathcal{R}}(X)$ (aby do nich „dotrzeć” należy co najwyżej dwukrotnie stosować reguły wnioskowania). I tak dalej.

Suma (po wszystkich n) tych wszystkich „wniosków co najwyżej n-tego stopnia” daje ogół wszystkich wniosków, które można otrzymać z przesłanek X posługując się regułami z zestawu $\mathcal{R}$.

Konsekwencja założeniowa

Określamy zbiór T_{jas} **tez** systemu dedukcji naturalnej (systemu założeniowego) KRZ opartego na regułach *jas*:

- $\alpha \in T^0_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna $n \geqslant 0$ oraz formuły $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma$ takie, że:
  - α jest identyczna z $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \gamma) \ldots))$
  - $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\})$.
- $\alpha \in T^{k+1}_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne $n \geqslant 0$, $i < n$ oraz formuły $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ takie, że:
  - α jest identyczna z $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_i \rightarrow \gamma) \ldots))$
  - $\beta_{i+1}, \beta_{i+2}, \ldots, \beta_n \in T^k_{jas}$
  - $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\})$.

$\alpha \in T_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje m taka, że $\alpha \in T^m_{jas}$.

Konsekwencja założeniowa

Jeśli $\alpha \in T^m_{jas}$, to mówimy, że α jest **tezą stopnia m** systemu założeniowego KRZ. Jeśli α jest tezą stopnia m i $m \leqslant n$, to α jest też oczywiście tezą stopnia n. Jeśli $\alpha \in T_{jas}$, to mówimy, że α jest **tezą** systemu założeniowego KRZ.

Notacja. Aby pokazać, że $\alpha \in T_{jas}$, gdzie α jest identyczna z $(\beta_1 \to (\beta_2 \to \ldots(\beta_n \to \gamma)\ldots))$ budujemy dowód założeniowy, w którym $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ są założeniami i który zostaje uznany za zakończony, gdy $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\})$, tj. gdy otrzymamy formułę γ stosując (do założeń i pośrednich kroków dowodowych) reguły ze zbioru *jas*. Numerujemy poszczególne wiersze dowodu i opatrujemy je komentarzem wskazującym na ich uzasadnienie.

Uwaga. W dowodach tez stopnia n można wykorzystywać wszystkie tezy stopnia m, dla $m \leqslant n$.

Konsekwencja założeniowa

Zdefiniujemy relację $\vdash_{jas}$ **konsekwencji założeniowej**.

Niech $X = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ będzie skończonym zbiorem formuł, a α formułą języka KRZ. Zachodzi $X \vdash_{jas} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy tezą systemu założeniowego jest formuła:

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \alpha) \ldots)).$$

Tak więc, $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \vdash_{jas} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód założeniowy α w oparciu o założenia $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ oraz reguły ze zbioru *jas*.

O co chodzi?

Dowody założeniowe są naprawdę proste. Masz jakieś założenia: $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$. Jeśli z tych założeń, używając podanych wcześniej reguł, można otrzymać formułę α, to uznajemy, że udowodniona została implikacja:

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \alpha) \ldots)).$$

Także na odwrót, aby dowieść, że implikacja:

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \alpha) \ldots))$$

jest tezą systemu założeniowego, musisz formułę α wyprowadzić z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ przy użyciu podanych wcześniej reguł.

Odcinanie Ogonów

Gdy zatem masz udowodnić implikację:

$$(\beta_1 \to (\beta_2 \to \ldots (\beta_n \to \alpha) \ldots)),$$

to traktujesz ją jak **Wielki Ogon**: aby znaleźć założenia dowodowe, szukasz implikacji głównej. Jej poprzednik (tu: β_1) będzie pierwszym założeniem. Patrzysz teraz, czy jej następnik też jest implikacją. Jeśli tak, to jej poprzednik (tu: β_2) będzie drugim założeniem. I tak dalej. W końcu dojdziesz do takiego **Małego Ogonka**, który już implikacją nie jest. I to właśnie jest formuła (tu: α), którą należy otrzymać z założeń, stosując reguły ze zbioru *jas*.

Pierwszym etapem pracy jest zatem ćwiartowanie Wielkiego Ogona, a etapem drugim jest dotarcie do Małego Ogonka.

Prawo komutacji

$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ (prawo komutacji)

Należy dowieść, że z założeń $\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta, \alpha$ można otrzymać γ, używając reguł ze zbioru *jas*.

1.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	założenie
2.	β	założenie
3.	α	założenie
4.	$\beta \to \gamma$	RO: 1,3
5.	γ	RO: 4,2.

Zauważ, że ten dowód **planujesz**: masz otrzymać γ, patrzysz więc, w jakim założeniu γ występuje i co trzeba zrobić, aby do γ „dotrzeć", używając reguł ze zbioru *jas* oraz pozostałych założeń i kroków dowodowych.

Prawo eksportacji

$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ prawo **eksportacji**

Trzeba pokazać, że z założeń $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$, α, β można otrzymać γ.

1.	$(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$	założenie
2.	α	założenie
3.	β	założenie
4.	$\alpha \wedge \beta$	DK: 2,3
5.	γ	RO: 1,4.

Zauważ, że **planowanie** dowodu jest w tej metodzie proste: najpierw określasz **cel**, a potem szukasz **drogi** do niego. Przy tym, ową drogę wyznaczasz **od celu wstecz**, do założeń.

Reguły wtórne

Reguła R jest **regułą wyprowadzalną** (**wtórną**) systemu założeniowego KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego sekwentu $(X, \alpha) \in R$ mamy:

$$\alpha \in C_{jas}(X).$$

Jeśli R jest regułą wtórną systemu założeniowego KRZ, to można jej używać w dowodach dalszych tez tego systemu oraz w dowodach wyprowadzalności kolejnych reguł wtórnych. Podobnie, można używać w dowodach tez wyprowadzonych wcześniej.

Reguła wewnętrznego poprzedzania

Aby pokazać, że reguła:

$$\frac{\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta}{\alpha \to \gamma}$$

wewnętrznego poprzedzania (RWP) jest wyprowadzalna w systemie założeniowym KRZ, trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ i β otrzymać można $\alpha \to \gamma$:

1.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	założenie
2.	β	założenie
3.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$	prawo komutacji
4.	$\beta \to (\alpha \to \gamma)$	RO: 3,1
5.	$\alpha \to \gamma$	RO: 4,2.

Reguła Dunsa Scotusa

Pokażemy, że wyprowadzalna jest reguła:

$$\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}$$

1.	α	założenie
2.	$\neg\alpha$	założenie
3.	$\alpha \vee \beta$	DA: 1
4.	β	OA: 3,2.

Regułę $\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}$ nazywamy regułą **Dunsa Scotusa** (RDS).

Dowody nie wprost

Twierdzenie o Dedukcji Nie Wprost.

Jeśli $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{jas} \{\gamma, \neg\gamma\}$, to $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \vdash_{jas} \alpha$.

Twierdzenie powyższe pozwala zatem na stosowanie w systemie założeniowym **dowodów nie wprost**: aby pokazać, że α ma dowód z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ wystarczy pokazać, że z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \neg\alpha\}$ można wyprowadzić w systemie założeniowym KRZ parę formuł wzajem sprzecznych.
Nadto, z twierdzenia tego możemy korzystać również przy dowodzeniu wyprowadzalności reguł wtórnych systemu założeniowego KRZ.

Dowody nie wprost: przykłady

W dowodzie nie wprost formuły α z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ dopisujemy do założeń $\neg\alpha$, czyli **założenie dowodu nie wprost** (w skrócie: z.d.n.) i staramy się wyprowadzić z tych założeń parę formuł **wzajem sprzecznych**. Gdy to się powiedzie, α jest konsekwencją $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ w systemie założeniowym KRZ.

Dla przykładu, dowód nie wprost formuły $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ jest następujący:

1. $\neg\neg\alpha$ założenie
2. $\neg\alpha$ z.d.n.

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę **opuszczania negacji** ON:

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}.$$

Dowody nie wprost: przykłady

$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash_{jas} \neg\alpha$

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\neg\beta$	założenie
3.	$\neg\neg\alpha$	z.d.n.
4.	α	ON: 3
5.	β	RO: 1,4.

Pokazaliśmy więc, że regułą wtórną jest reguła *modus tollendo tollens* MT:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}.$$

Tezy, które nie są implikacjami. Uwaga: ważne!!!

$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ prawo niesprzeczności

1.	$\neg\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$	z.d.n.
2.	$\alpha \wedge \neg\alpha$	ON: 1
3.	α	OK: 2
4.	$\neg\alpha$	OK: 2.

Uwaga !!! W przypadkach poszukiwania dowodów formuł, które nie są implikacjami (a więc gdy nie można poczynić żadnych założeń), **zaczynamy dowód od założenia nie wprost**.

Trafność

Konsekwencja założeniowa jest **trafna**, tzn.:

- Jeśli α jest tezą systemu założeniowego, to α jest tautologią KRZ.
- Jeśli $X \vdash_{jas} \alpha$, to $X \models_{krz} \alpha$, czyli α wynika logicznie z X.

Powyższe implikacje są **metatwierdzeniami**. Ich dowody pomijamy. Znajdziesz je np. w wykładach **Logiki Matematycznej** zamieszczonych na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM.

Pełność

Konsekwencja założeniowa jest **pełna**, tzn.:

- Jeśli α jest tautologią KRZ, to α jest tezą systemu założeniowego.
- Jeśli $X \models_{krz} \alpha$ (czyli α wynika logicznie z X), to $X \vdash_{jas} \alpha$.

Powyższe implikacje są **metatwierdzeniami**. Ich dowody pomijamy. Znajdziesz je np. w wykładach **Logiki Matematycznej** zamieszczonych na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM.

Trafność i Pełność: zastosowania

Fakt, że konsekwencja założeniowa jest trafna i pełna może być wykorzystany np. w ustalaniu:

- czy dana formuła jest tautologią KRZ
- czy dana formuła wynika logicznie z podanego zbioru przesłanek
- czy dane wnioskowanie jest dedukcyjne
- czy dane zdanie jest prawdą logiczną.

Zwróć uwagę, że rozstrzyganie tych problemów dokonywane jest w języku przedmiotowym, a nie w metajęzyku.

Prawda logiczna o Pogonowskim

Zbadaj, czy jest prawdą logiczną:
Pogonowski oślepnie, jeśli wydłubiemy mu oczy i utniemy uszy ***dokładnie wtedy, gdy*** *nie utniemy mu uszu, o ile nie oślepnie, choć wydłubiemy mu oczy.*

Znajdujemy zdania proste w podanym tekście:

- α — Wydłubiemy Pogonowskiemu oczy.
- β — Utniemy Pogonowskiemu uszy.
- γ — Pogonowski oślepnie.

Budujemy schemat zdaniowy dla rozważanego zdania:
$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \equiv ((\alpha \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\beta)$.
Aby metodą założeniową dowieść równoważności $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, wystarczy dowieść implikacji prostej $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ i odwrotnej $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$.

Prawda logiczna o Pogonowskim

Dowód implikacji $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\beta)$.

1.	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$	założenie
2.	$\alpha \wedge \neg\gamma$	założenie
3.	$\neg\neg\beta$	z.d.n.
4.	$\neg\neg\beta \rightarrow \beta$	prawo podwójnej negacji (udowodnione wcześniej)
5.	β	RO: 4,3
6.	α	OK: 2
7.	$\neg\gamma$	OK: 2
8.	$\alpha \wedge \beta$	DK: 6,5
9.	γ	RO: 1,8
10.	Sprzeczność:	7,9.

Otrzymaliśmy sprzeczność w dowodzie nie wprost, a zatem rozważana implikacja jest tezą.

Prawda logiczna o Pogonowskim

Dowód implikacji $((\alpha \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$.

1.	$(\alpha \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\beta$	założenie
2.	$\alpha \wedge \beta$	założenie
3.	$\neg\gamma$	z.d.n.
4.	α	OK: 2
5.	$\alpha \wedge \neg\gamma$	DK: 4,3
6.	$\neg\beta$	RO: 1,5
7.	β	OK: 2
8.	Sprzeczność:	6,7.

Udowodniliśmy implikację prostą oraz odwrotną, a zatem $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \equiv ((\alpha \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\beta)$ jest tezą (na mocy DR). Jest więc tautologią (na mocy trafności C_{jas}). Rozważane zdanie jest prawdą logiczną.

A po co nam jakieś operacje konsekwencji?

Ktoś mógłby zapytać: a po co nam jakieś operacje konsekwencji? Mamy przecież definicję reguły niezawodnej i definicję tautologii KRZ. Ponadto, mamy przecież **algorytm** rozstrzygania, czy jakaś formuła jest tautologią KRZ i czy zachodzi wynikanie logiczne miedzy przesłankami i wnioskiem. To chyba wystarczy?

Otóż nie wystarczy, z kilku powodów. Stają się one bardziej oczywiste, gdy rozważa się KRP, czyli system logiczny o wiele mocniejszy od KRZ. A że musimy taki mocniejszy system rozważać, pokazuje choćby przykład Uszu i Ogona: w KRZ nie można pokazać, że *Uszy są krótsze od Ogona* wynika logicznie z *Ogon jest dłuższy od Uszu*.

KRZ jest bardzo ubogim (choć niezwykle ważnym!) systemem logicznym. Ma wspomnianą miłą własność rozstrzygalności. W ogólności, systemy logiczne własności tej mieć nie muszą. W szczególności, KRP **nie jest** rozstrzygalny.

A po co nam jakieś operacje konsekwencji?

Jak pamiętamy Wynikanie Logiczne ma charakter obiektywny. Wynikanie logiczne jest zależnością, która zachodzi lub nie, niezależnie od np. naszych mniemań lub życzeń. Nie można przegłosować, że zachodzi wynikanie logiczne. Nie można też ufnie zawierzyć żadnemu autorytetowi, który miałby nam podpowiadać: w tych wypadkach wynikanie logiczne zachodzi, a w tych nie zachodzi.

Nie mamy pełnej wiedzy o Faktach. Możemy natomiast dokonywać operacji na wyrażeniach językowych. Operacje konsekwencji mają, dla dowolnego zbioru przesłanek, określać (na drodze czysto syntaktycznej!), ogół wniosków logicznie z tych przesłanek wynikających.

A po co nam jakieś operacje konsekwencji?

Ważny powód, dla którego rozważamy operacje konsekwencji jest następujący.

Ustalanie metodami semantycznymi (np. metodą $0-1$, lub skróconą metodą $0-1$, czyli metodą nie wprost):

- czy dana formuła języka KRZ jest tautologią KRZ,
- czy dana formuła wynika logicznie z podanego zbioru formuł
- czy dany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny

było pracą wykonywaną w **metajęzyku** (gdzie korzystano z *nieskończonych* wartościowań).

Chcemy, aby sam **język przedmiotowy** był wyposażony w aparaturę inferencyjną, pozwalającą dokonywać wymienionych wyżej ustaleń.

A po co nam jakieś operacje konsekwencji?

Ogół logicznych konsekwencji danego zbioru przesłanek X jest dany w sposób obiektywny, niezależnie od naszych o nim mniemań. Naszym marzeniem jest określenie takich (efektywnych, obliczalnych, czysto składniowych) operacji na wyrażeniach językowych, aby ów ogół konsekwencji dał się opisać przez te operacje.

Mówiąc w sposób intuicyjny, operacja konsekwencji C jest **trafna**, jeśli dla dowolnego zbioru przesłanek X, zbiór $C(X)$ wszystkich konsekwencji X zawiera się w zbiorze tych formuł, które wynikają logicznie z X.

Mówiąc w sposób intuicyjny, operacja konsekwencji C jest **pełna**, jeśli dla dowolnego zbioru przesłanek X, zbiór tych formuł, które wynikają logicznie z X zawiera się w zbiorze $C(X)$ wszystkich konsekwencji X.

Operacje konsekwencji powinny być trafne i pełne.

Dowodzenie jest czynnością twórczą!

Budowania dowodów nie da się zredukować do czynności czysto algorytmicznych. Owszem, Maszyna może sprawdzić, czy dany ciąg napisów jest dowodem (jakiegoś twierdzenia). W ogólności jednak, znajdowanie dowodów to Sztuka, czynność poniekąd artystyczna.

W KRZ odróżnienie procedur algorytmicznych od twórczych metod dowodzenia ulega częściowemu zatarciu ze względu na wspomnianą miłą własność rozstrzygalności. Twórczy charakter procedur dowodowych jest natomiast wyraźnie widoczny w KRP, gdzie po raz pierwszy uczestniczymy w Bliskim Spotkaniu z Nieskończonością.

Nierozstrzygalność KRP ma swoje źródło w tym, że ustalanie tautologiczności formuł wymaga przejrzenia nieskończonej liczby interpretacji. Tego w skończonym czasie nikt, ani Mossad, ani Szin Bet, nie jest w stanie dokonać. Stąd brak algorytmu (rozstrzygania czy dowolna formuła KRP jest tautologią KRP).

Wykorzystywana literatura

- Borkowski, L. 1991. *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe KUL, Lublin.
- Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary formal logic.* McGraw-Hill Book Company.
- Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* PWN, Warszawa.
- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej.* Białystok.
- Słupecki, J., Borkowski, L. 1962. *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Słupecki, J., Hałkowska, K, Piróg-Rzepecka, K. 1999. *Logika matematyczna.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Surma, S. 1967. Twierdzenia o dedukcji niewprost. *Studia Logica* **XX**, 151–166.