

# INFINITARNA LOGIKA

ERNSTA ZERMELA

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki Stosowanej UAM

[www.logic.amu.edu.pl](http://www.logic.amu.edu.pl)

Opole — Poznań

2004–2006

Praca wykonana w latach 2004–2006 w ramach projektu badawczego KBN 2H01A 00725 *Metody nieskończonościowe w teorii definicji*, kierowanego przez Profesora JANUSZA CZELAKOWSKIEGO w Instytucie Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Opolskiego.

NINIEJSZE NOTATKI NIE SĄ W OBECNEJ POSTACI PRZEZNACZONE DO DRUKU.

## PRZEDMOWA

Celem tego opracowania jest prezentacja założeń programu podstaw logiki i matematyki zaproponowanego przez Ernsta Zermelę. W szczególności, uwzględnione zostaną nowe ustalenia dotyczące tego programu, dokonane niedawno przez badaczy *Nachlaß* Zermela. Refleksja nad propozycjami Zermela, faktem początkowego nikłego (a właściwie żadnego) oddźwięku na nie oraz późniejszym o dwie dekady początkiem rozwoju logik infinitarnych pozwala, być może, na nowe spojrzenie na historię tworzenia się i utrwalania paradygmatu uprawiania logiki matematycznej. Z tego powodu, omawiamy propozycje Zermela w nieco szerszej perspektywie, poświęcając (może nieproporcjonalnie) sporo uwagi także dokonaniom innych (nie tylko ówczesnych) autorów — dotyczy to przede wszystkim refleksji związanych z paradoksem Skolema oraz z wyłanianiem się pojęć metalogicznych. Nadto, omawiana problematyka jest istotna z *metodologicznego* punktu widzenia w rozważaniach dotyczących *metod nieskończonościowych w teorii definicji*.<sup>1</sup>

Autor wyraża wdzięczność Panom Profesorom: Romanowi Murawskiemu, Janowi Woleńskiemu oraz Janowi Zygmuntowi za możliwość korzystania z ich kompetentnych opracowań dotyczących historii logiki, za pomoc w tropieniu źródeł bibliograficznych oraz za życzliwe rady i krytyczne komentarze udzielane w rozmowach i korespondencji. Osobne podziękowanie należy Panu Profesorowi Januszowi Czelakowskiemu za przyjazną ufność, iż piszący te słowa podoła intelektualnie wywiązać się z zaszczytnego dla niego zaproszenia do udziału we wspomnianym projekcie badawczym.

---

<sup>1</sup>Fragmenty niniejszych — dotąd niepublikowanych — notatek prezentowane były na konferencjach w ostatnich latach; zob. przytoczone w odnośnikach bibliograficznych informacje dotyczące tych odczytów.

## SPIS TREŚCI

1. *Zermelo — informacje biograficzne...* 5
2. *Granice fantazji w teorii mnogości...* 18
  - 2.1. Początki teorii mnogości
  - 2.2. Pierwsze prace Zermela z teorii mnogości
  - 2.3. Aksjomatyka z 1930 roku
  - 2.4. Teoria mnogości — młodość, dojrzałość i starość
3. *O paradoksie Skolema...* 39
  - 3.1. Twierdzenie Löwenheima-Skolema
  - 3.2. Stwór z logicznego Loch Ness
    - 3.2.1. Systemy kanoniczne Romana Suszki
    - 3.2.2. Michaela Resnika wyprawy przeciw Skolemitom
    - 3.2.3. Timothy Bays o paradoksie Skolema
4. *Logika między „Principia Mathematica” a „Grundlagen der Mathematik”...* 85
  - 4.1. Początki: próby kategorycznej charakterystyki podstawowych struktur matematycznych
  - 4.2. Kategoryczność a zupełność i pełność
  - 4.3. Czarny koń w kuźni pojęć metalogicznych: zwartość
  - 4.4. Twierdzenie o niewspółmożliwości. Utrata niewinności metalogicznej
  - 4.5. Wątki pominięte. Alternatywne historie logiki

**5. Projekt logiki infinitarnej Ernsta Zermela... 115**

- 5.1. *Tezy o nieskończoności* i wykłady w Warszawie
- 5.2. O sporze dotyczącym pojęcia *Definitheit*
- 5.3. Projekt logiki infinitarnej
- 5.4. Zermelo a Gödel
- 5.5. Próba odrzucenia paradoksu Skolema

**6. Also, doch ist die Zeit angekommen..... 137**

- 6.1. Logika infinitarna — okres prenatalny
- 6.2. Logika infinitarna — rozwój
- 6.3. Logika infinitarna — kilka uwag o współczesności
  - 6.3.1. Ile mocy (wyrażeniowej) potrzebuje logika?
  - 6.3.2. Metalogika dla logik infinitarnych
  - 6.3.3. Niefinitarne reguły inferencji
  - 6.3.4. Zbiory dopuszczalne i uogólniona rekursja
  - 6.3.5. Realizacja programu Zermela?

***Odnosiniki bibliograficzne*... 154**

***Wykorzystywane notatki własne*... 181**

## Wykorzystywane notatki własne

*Druga Wyprawa Przeciw Skolemitom. O znaczeniu twierdzeń metalogicznych dla teorii języka.* Niepublikowany tekst wykładu wygłoszonego 15 kwietnia 2002 roku w Instytucie Językoznawstwa w Poznaniu.

*Systemy kanoniczne Romana Suszki.* Trzy (albo 4?) odczyty wygłoszone na *Seminarium Opolskim*, Instytut Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Opolskiego, wiosna 2002 roku [wspólnie z prof. Jackiem Hawrankiem].

*Po co metalogika lingwistom?* Odczyt wygłoszony podczas uroczystej sesji Komitetu Nauk Językoznawczych PAN, Warszawa, kwiecień 2002.

*Jak żyć z paradoksem Skolema?* Odczyt wygłoszony podczas VIII Konferencji *Zastosowania Logiki w Filozofii i Podstawach Matematyki*, Karpacz, maj 2002.

*O paradoksie Skolema.* Odczyt wygłoszony podczas *Warsztatów Logiczno-Filozoficznych*, Zawoja, wrzesień 2002.

*Resnik i Skolemici.* Odczyt wygłoszony na *Seminarium Opolskim*, Instytut Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Opolskiego, jesień 2002 roku.

*Three Little Dots. Logician's Nightmares.* Tekst niepublikowany, Konstanz, wiosna 2003 roku.

*O tworzeniu się pojęć metalogicznych. Kategoryczność, zwartość, pełność i zupełność.* Tekst niepublikowany, Konstanz, wiosna 2003 roku.

*O tworzeniu (się?) pojęć metalogicznych.* Odczyt wygłoszony podczas *XLIX Konferencji Historii Logiki*, Kraków, październik 2003.

*Twierdzenie o niewspółmożliwości.* Odczyt wygłoszony na *Seminarium Opolskim*, Instytut Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Opolskiego, listopad 2003.

*Jak tworzą się pojęcia metalogiczne?* Odczyt wygłoszony podczas konferencji *Von Neumann's Birth Centenary Conference. Computational Power for Social Research*, Zakopane, grudzień 2003.

*Mrzonka metalogiczna — Gabelbarkeitssatz Carnapa.* Odczyt wygłoszony na seminarium Zakładu Logiki Matematycznej UAM w Poznaniu, grudzień 2003.

*Ku świadomej impotencji. Samoograniczenia metalogiczne.* Odczyt wygłoszony podczas VIII Konferencji *Zastosowania Algebry*, Zakopane, marzec 2004.

*Zermelo: antyskolemizm dobrze ufundowany.* Odczyt wygłoszony podczas IX Konferencji *Zastosowania Logiki w Filozofii i Podstawach Matematyki*, Karpacz, maj 2004.

*Zermelo: początki logiki infinitarnej.* Odczyt wygłoszony na seminarium Zakładu Logiki Stosowanej UAM w Poznaniu, październik 2004.

*Zermelo i Skolemici.* Odczyt wygłoszony podczas L Konferencji *Historii Logiki*, Kraków, październik 2004.

*Wielokropek.* Odczyt wygłoszony podczas X Konferencji *Zastosowania Logiki w Filozofii i Podstawach Matematyki*, Szklarska Poręba, maj 2005.

*Projekt logiki infinitarnej Ernsta Zermela.* Tekst złożony do ew. publikacji w tomie zbiorowym przygotowanym w 2005 roku przez Zakład Logiki Stosowanej UAM.