ZAGADKI

WYKŁAD 5: UPORZĄDKOWANIA

KOGNITYWISTYKA UAM (III, IV, V)

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

Starsi obywatele dobrze rozumieją pojęcie porządku liniowego: tak właśnie uporządkowana powinna być kolejka ludzi oczekujących przed sklepem. Z kolei pojęcie uporządkowania hierarchicznego (*porządku częściowego*) jest chyba znane wszystkim: taki typ porządku obserwujemy w drzewach genealogicznych lub w hierarchii wojskowej czy też kościelnej. Naturalne jest pojęcie *dobrego uporządkowania*: takiego, w którym każdy niepusty podzbiór rozważanego uniwersum ma element najmniejszy. Dość dobrze radzimy sobie z tzw. naturalnym porządkiem w zbiorach liczbowych. Potrafimy też uchwycić różnicę między porządkami *dyskretnymi* (jak $<$ w zbiorze wszystkich liczb całkowitych) oraz *gęstymi* (jak $<$ w zbiorze wszystkich liczb wymiernych). Nieco trudniej jest przeciętnemu obywatelowi odróżnić porządki gęste od *ciągłych* (jak $<$ w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych).

1 Funkcja Cantora

Czy potrafisz udowodnić, że wszystkich ułamków jest tyle samo, co wszystkich liczb naturalnych? Inaczej mówiąc: czy potrafisz określić bijekcję między tymi dwoma zbiorami?

2 Drzewo Calkina-Wilfa

Zbudujemy następujące drzewo ułamków:

1. Korzeniem drzewa jest ułamek $\frac{1}{1}$.
2. Każdy wierzchołek drzewa ma dwóch bezpośrednich potomków.

3. Jeśli $\frac{a}{b}$ jest wierzchołkiem w drzewie, to jego bezpośrednimi potomkami są wierzchołki: $\frac{a}{a+b}$ (lewy) oraz $\frac{a+b}{b}$ (prawy).

To drzewo nazywamy drzewem *Calkina-Wilfa*. Czy potrafisz udowodnić, że każda dodatnia liczba wymierna wystąpi w tym drzewie dokładnie raz, przy tym zapisana w postaci nieskracalnego ułamka?

3 Drzewo Sterna-Brocota

Czy zdarzyło ci się w zamierzchłej niewinnej młodości wykonać „głupie” dodawanie: $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$? Jeśli tak, jeśli zostałaś za to (słusznie!) skarcona, to teraz będziesz miała okazję ujrzeć, że ta „głupia” operacja prowadzi do ciekawych wyników.

Opiszemy mianowicie konstrukcję drzewa *Sterna-Brocota*, podaną niezależnie przez Moritza Stern (1858) oraz Achillesa Brocota (1861). Będzie ona podobna do rozważanej wyżej konstrukcji drzewa Calkina-Wilfa.

Często podaje się następujący nieformalny opis tworzenia tego drzewa, wykorzystujący dwa elementy pomocnicze o postaci $\frac{0}{1}$ oraz $\frac{1}{0}$:

1. Korzeniem drzewa jest ułamek $\frac{1}{1}$.

2. Każdy wierzchołek drzewa ma dwóch bezpośrednich potomków.

3. Rozpoczynamy od elementów pomocniczych $\frac{0}{1}$ oraz $\frac{1}{0}$, umieszczonych, odpowiednio, z lewej i prawej strony.

4. Korzeń $\frac{1}{1}$ otrzymujemy z elementów pomocniczych, dodając je w sensie operacji $\oplus$: $\frac{1}{1} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{0} = \frac{0+1}{1+0}$.

5. Podobnie, dla każdego poziomu drzewa zawierającego ułamki $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{c}{d}$ włączamy ułamek $\frac{a+c}{b+d}$ do poziomu bezpośrednio niższego, pomiędzy ułamki $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{c}{d}$.

6. W przypadku najbardziej lewych oraz najbardziej prawych wierzchołków drzewa korzystamy z obiektów pomocniczych $\frac{0}{1}$ oraz $\frac{1}{0}$, odpowiednio, wykonując na nich oraz owych najbardziej skrajnych wierzchołkach operację $\oplus$.

Przedstaw graficznie opisaną wyżej nieformalnie konstrukcję i zbadaj jej matematyczne własności.

4 Hotel Hilberta

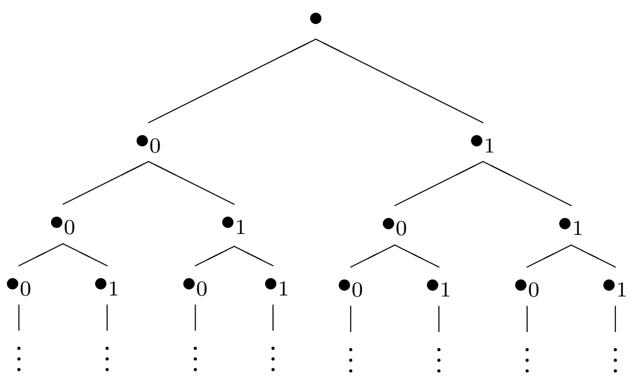
To jedna z najczęściej omawianych zagadek, gdy opowiada się w sposób popularny o zbiorach nieskończonych. Wyobrażamy sobie hotel, który ma nieskończoną liczbę pokoi, powiedzmy, ponumerowanych kolejnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Wszystkie pokoje w hotelu są zajęte – w każdym mieszka jeden gość. Rozważymy teraz kilka przypadków, w których chytry właściciel hotelu będzie chciał zakwaterować pewną liczbę nowych gości, jednak bez pozbywania się kogokolwiek już mieszkającego w hotelu:

1. Jeden dodatkowy gość.
2. Milion dodatkowych gości.
3. Nieskończenie wielu (tylu, ile jest liczb naturalnych) dodatkowych gości.
4. Kilka nieskończonych (jak wyżej) grup dodatkowych gości.
5. Nieskończenie wiele (jak wyżej) nieskończonych (jak wyżej) grup dodatkowych gości.
6. Tylu nowych gości, ile jest wszystkich liczb rzeczywistych.

W których z tych przypadków właściciel hotelu może umieścić w nim podaną liczbę nowych gości bez pozbywania się gości już zamieszkujących hotel?

5 Pełne drzewo dwójkowe

Nieskończone drzewo dwójkowe to drzewo o postaci rozpoczynającej się następująco:



Każdy z kolejnych wierzchołków ma dwóch bezpośrednich potomków. Wierzchołki (oprócz korzenia) kodujemy zerem lub jedynką. *Gałęzią* nazwiemy każdy *nieskończony* ciąg złożony z zer i jedynek. Pokaż, że nie jest możliwe ponumerowanie w sposób jednoznaczny (liczbami naturalnymi: 0, 1, 2, 3, 4, 5,...) wszystkich gałęzi.

6 Paradoks Condorceta

Przypuśćmy, że dziewczęta X, Y, Z chcą ustalić, który z facetów A, B, C jest najbardziej przystojny. Niech preferencje poszczególnych dziewcząt wyglądają następująco (piszemy $P > Q$ w znaczeniu: wybór P jest preferowany względem wyboru Q; preferencje każdego dziewczęcia są *przechodnie*):

X: $A > B > C$

Y: $B > C > A$

Z: $C > A > B$.

Czy możliwe jest liniowe uporządkowanie kandydatów zgodne z preferencjami większości dziewcząt?

7 Trzech mędrców

Król miał trzech mędrców: Wysokiego, Średniego i Niskiego. Aby sprawdzić czy rzeczywiście zasługują na miano mędrców poddał ich próbie.

– Oto mam pięć szlafmyc: 2 czarne i 3 białe, każdemu z was nałożę jedną z nich i każdy ma odgadnąć jaki kolor ma szlafmyca na jego głowie.

Król ustawił mędrców w kolejności: Niski, Średni, Wysoki, w ten sposób, aby Wysoki widział dwóch pozostałych, a Średni tylko Niskiego.

– Zgadujcie! – rozkazał król.

1. Wysoki odpowiedział: nie wiem.
2. Średni odpowiedział: nie wiem.
3. Niski zastanowił się chwilę i odpowiedział. Co odpowiedział?

8 Para wujów

Błogosławiony Alkuin z Yorku jest autorem ciekawych zagadek. Jedną z bardziej znanych jest zapewne ta o przewożeniu wilka, kozy i kapusty łódką na drugi brzeg rzeki, przy czym na łódkę zabrać można za każdym razem tylko jedno z tej trójki (oraz, oczywiście, przewoźnika). Chodzi oczywiście o to, aby nie pozostawiać na tym samym brzegu wilka i kozy, ani kozy i kapusty.

Inna zagadka Alkuina dotyczyła określenia związków pokrewieństwa zachodzących wtedy, gdy wdowa z córką spotyka (niespokrewnionego z nią) wdowca z synem i zawarte zostają związki: wdowiec żeni się z córką, a syn żeni się z wdową.

Pewną modyfikacją tej ostatniej zagadki jest problem następujący. Czy możliwe jest (bez związków kazirodczych), aby Stanisław był wujem Kazimierza, a Kazimierz wujem Stanisława? Przypomnijmy, że być wujem oznacza być bratem matki lub mężem siostry matki.

9 Lis i zając

Rozważmy jednowymiarową grę rozgrywaną na planszy o pozycjach ponumerowanych od lewej do prawej liczbami od 1 do 30. Żeton reprezentujący lisa umieszczony jest na początku gry na pozycji 1, a żeton reprezentujący zająca na pewnej pozycji s, gdzie $s > 1$. Reguły gry są następujące:

1. Gracze wykonują ruchy na przemian.
2. Lis może w każdym swoim ruchu przesunąć się o jedną pozycję w lewo lub w prawo.
3. Zając w każdym ruchu przeskakuje dwie pozycje w lewo lub w prawo, lądując na trzeciej.
4. Zając nie może wylądować na pozycji zajmowanej przez lisa.
5. Żaden z graczy nie może wyskoczyć poza planszę.
6. Jeśli zając nie ma możliwości ruchu, to przegrywa.
7. Celem lisa jest schwytanie zająca: następuje to wtedy, gdy obaj znajdują się na bezpośrednio sąsiednich pozycjach i lis ma ruch.
8. Celem zająca jest uniknięcie schwytania przez lisa.

Znajdź wszystkie wartości s (początkowej pozycji zająca), dla których lis wygrywa grę.

10 Problem Józefa Flawiusza

Ustawiamy n osób na okręgu, numerując je liczbami od 1 do n (dla ustalenia uwagi, w porządku zgodnym z ruchem wskazówek zegara). Zaczynając liczyć od osoby 1, eliminujemy co drugą z tych osób (okrutny sposób eliminacji pozostawiamy do wyboru czytelnikowi), dopóki nie pozostanie tylko jedna osoba. Znaleźć pozycję, którą trzeba zająć przed rozpoczęciem eliminacji, aby jej uniknąć.

Rozwiązania zagadek podane zostaną na wykładzie.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl