ZAGADKI

WYKŁAD 6: WZORCE I STRUKTURY

KOGNITYWISTYKA UAM (III, IV, V)

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

Niektórzy matematycy (np. Keith Devlin) uważają, że matematyka jest nauką o wzorcach (*Mathematics is a science of patterns*). Od XIX wieku datuje się sposób myślenia o matematyce jako nauce o różnorakich strukturach. Wiąże się to po części z rozwojem algebry abstrakcyjnej i jej zastosowaniach we wszystkich praktycznie działach matematyki. Tematy zagadek tego działu dotyczą m.in.: wielokątów, wielościanów, wielokomórek, parkietaży, wypełnień przestrzeni, różnych rodzajów symetrii, arytmetyki modularnej. Niektóre zagadki mają treść kombinatoryczną. Umieszczamy w tym dziale także zagadki dotyczące grafów.

1 Zagadka Einsteina

Ta zagadka doczekała się swoistej legendy – mawia się, iż jest tak trudna, że prawie nikt nie potrafi jej rozwiązać. Jest to oczywista przesada, albowiem wystarczy chwila refleksji oraz konsekwencja w ustalaniu poszczególnych wyników cząstkowych, aby dotrzeć do rozwiązania. Podajemy treść tej zagadki oraz szkic jej rozwiązania, podane w polskiej Wikipedii.

5 ludzi różnych narodowości zamieszkuje 5 domów w 5 różnych kolorach. Wszyscy palą papierosy 5 różnych marek i piją 5 różnych napojów. Hodują zwierzęta 5 różnych gatunków. Który z nich hoduje rybki?

2 Kulki w pudełkach z fałszywymi napisami

W każdym z trzech pudełek znajdują się dwie kule: w jednym dwie białe, w drugim dwie czarne, a w ostatnim jedną białą i jedną czarną. Na każdym z pudełek jest napis, informujący o jego zawartości. Wszystkie te napisy głoszą fałsz. Ile minimalnie trzeba wyciągnąć kul, aby ustalić zawartość wszystkich pudełek?

3 Woda – gaz – prąd

Każdy z trzech domów należy zaopatrzyć w: wodę, gaz oraz elektryczność. Czy możliwe jest wykonanie tego zadania przy założeniu, że połączenia między dostawcami a domami nie mogą się krzyżować?

4 Wielokąty Reuleaux

Dla dowolnej figury, posiadającej środek symetrii nazwijmy jej średnicą każdy odcinek, który przechodzi przez jej środek symetrii i łączy dwa przeciwległe punkty brzegowe tej figury.

Czy jest prawdą, że jeśli figura o środku symetrii ma wszystkie średnice równe, to musi być okręgiem?

5 Harmonijne wypełnianie kwadratu

Pamiętamy, że szereg harmoniczny jest rozbieżny. Zapytajmy teraz, czy nieskończoną liczbę kwadratów o bokach, kolejno: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ można zmieścić (bez nakładania ich na siebie) wewnątrz kwadratu jednostkowego?

6 Przeprawa przez rzekę

Klasyczna zagadka błogosławionego Alkuina z Yorku dotyczy przeprawy przez rzekę. Rybak R ma przewieźć łódką na drugi brzeg rzeki wilka W, kozę K oraz sałatę S (w oryginale była kapusta). Łodka pomieści za jedną przeprawą tylko rybaka oraz jedno z pozostałych. Trzeba to zrobić w ten sposób, aby nie było żadnych strat: wilk nie może zostać sam na brzegu z kozą, a koza z sałatą. Jak tego dokonać?

7 Wspólna droga

Cztery miejscowości leżące w czterech wierzchołkach kwadratu należy połączyć systemem dróg tak, aby całkowita długość tych dróg była minimalna.

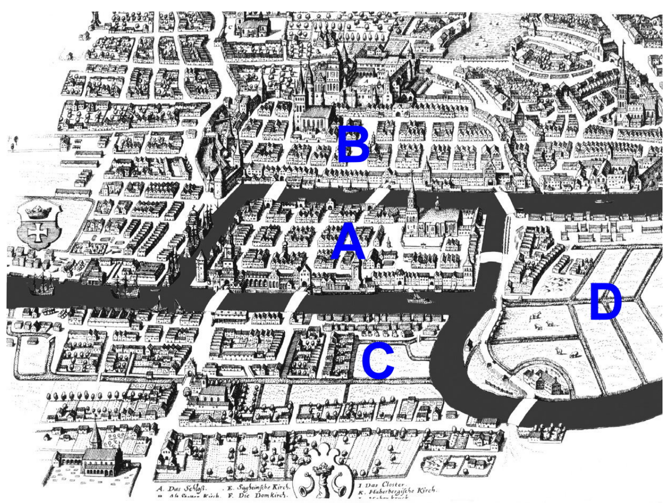
8 Liczba rozłącznych ósemek na płaszczyźnie

Z poprzednich zagadek (*Hotel Hilberta* oraz *funkcja Cantora*) wiesz już, że liczb naturalnych jest tyle samo, co par liczb naturalnych, ale liczb rzeczywistych nie jest tyle samo, co liczb naturalnych. Gdyby zapytać, ile rozłącznych okręgów narysować można na płaszczyźnie, to odpowiesz nie tylko, że można ich narysować nieskończenie wiele, ale możesz nawet powiedzieć bardziej dokładnie: tyle, ile jest liczb rzeczywistych, ponieważ wystarczy zapełnić płaszczyznę koncentrycznymi okręgami o promieniach będących dowolną liczbą rzeczywistą.

Ile rozłącznych ósemek 8 można narysować na płaszczyźnie? Na pewno tyle, ile jest par liczb całkowitych (czyli tyle samo, co par liczb naturalnych, czyli tyle samo, co liczb naturalnych – *przeliczalnie* wiele). Czy jednak można na płaszczyźnie narysować tyle rozłącznych ósemek, ile jest liczb rzeczywistych?

9 Mosty w Królewcu

To klasyczna zagadka, rozwiązana przez Eulera. W Królewcu jest siedem mostów łączących brzegi rzeki Pregoły z dwiema leżącymi na niej wyspami, jak pokazuje to rysunek poniżej:



Czy można tak zaplanować pieszy spacer, aby przejść po każdym z mostów dokładnie jeden raz?

10 Podstępny ciąg

Znajdź następny wyraz ciągu $2, 4, 8, 16, \ldots$

Rozwiązania zagadek podane zostaną na wykładzie.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl