Językowy obraz świata: języki logiki formalnej

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM

www.logic.amu.edu.pl

Obszernie, wielowątkowo i często mało konkluzywnie pisze się o *językowym obrazie świata* (dalej: JOS) w pracach językoznawczych, etnologicznych, psychologicznych i filozoficznych. Debatuje się nad wpływem języka na sposób postrzegania świata, na myślenie, analizuje się ewentualne różnice w kategoryzacji zjawisk w różnych językach, prowadzi spory dotyczące priorytetów (np. co ważniejsze: kultura czy język), itd. Niniejszy szkic nie jest poświęcony JOS dla wykształconych naturalnie języków etnicznych, zajmujemy się natomiast próbą odpowiedzi na pytanie, czy w przypadku pewnych *języków sztucznych* można również mówić o JOS, a jeśli tak, to w jaki sposób. W tym miejscu zajmiemy się językami logiki formalnej, w innym miejscu zamierzamy napisać o języku matematyki.

Języki sztuczne konstruowane są celowo, a więc owe cele ich tworzenia stanowią już jakieś wskazówki w poszukiwaniu tej odpowiedzi. Ze względu na olbrzymią różnorodność języków sztucznych trudno oczekiwać, że da się wypracować jakąś wspólną dla nich wszystkich metodologię badań. Do języków sztucznych zaliczamy:

1. Języki logiki.
2. Język matematyki.
3. Wybrane projekty filozoficzne.
4. Rekonstrukcje prajęzyków.
5. Języki sztuczne, które funkcjonują jako języki etniczne.

Ponadto, językami sztucznymi są też np.: języki informatyki, języki specjalistyczne poszczególnych nauk, języki tworzone dla potrzeb literackich oraz całe mnóstwo innych tworów semiotycznych. Rozważając języki sztuczne, zwracamy uwagę na:

1. Cel ich tworzenia (odniesienie przedmiotowe, zamierzony sposób funkcjonowania).
2. Własności strukturalne (składniowe i semantyczne).
3. Uwarunkowania pragmatyczne.
4. Rekonstruowany dla nich JOS.

Jest oczywiste, że w każdym języku mówi się *o czymś* i robi się to w określony *sposób*. Można uważać ogół związków między odniesieniem przedmiotowym (ustalonego) języka a sposobem jego używania za *językowy obraz świata* (tego języka). Tak pojmowany twór jest, rzecz jasna, wielce niejednorodny. Należy wyodrębnić jego zasadnicze komponenty i łączące je relacje, oddzielić istotne od pozostałych, itd. Można się spodziewać, że tak rozumiany JOS badany powinien być na metapoziomie. Ponadto, nie można wykluczyć, że JOS dla ustalonego języka, rozumiany w tym sensie, wymaga w swojej charakterystyce uwzględnienia JOS stosownych innych języków. Te ogólnikowe uwagi może niewiele wnoszą, ale trzeba wspomnieć, że trudno znaleźć w literaturze przedmiotu w miarę precyzyjną charakterystykę pojęcia JOS. Tu przyjmowane jest może zbyt szerokie rozumienie tego pojęcia. Rozpatrywane niżej przykłady powinny wskazać na możliwości ewentualnego doprecyzowania przyjętego wstępnie określenia JOS dla języków sztucznych.

Języki logiki

Mówiąc o językach logiki mamy na myśli specjalnie tworzone sztuczne języki logiki matematycznej. Przypomnijmy, że *systemem logicznym* nazywamy układ złożony z *języka*, *operacji konsekwencji* oraz *semantyki*. Przed bliższą charakterystyką tych trzech komponentów przypomnijmy kilka faktów historycznych. Logika to dyscyplina specyficzna dla kultury Zachodu – Orient (Indie, Chiny) nie wykształcił tak rozwiniętych rozważań logicznych jak grecka starożytność, a później jej kontynuatorzy. Geneza logiki wiąże się z analizą *rozumowań*, z poszukiwaniem własności, które wyróżniają rozumowania *poprawne* z ogółu rozumowań. Pierwsze systemy logiczne to sylogistyka Arystotelesa oraz logika Stoików. Rozwój badań logicznych był raczej powolny (w porównaniu np. z dziejami matematyki lub fizyki). Właściwie dopiero od połowy XIX wieku możemy mówić o systematycznych badaniach logicznych, opartych na coraz bardziej solidnych podstawach matematycznych. Uważano przy tym, że logika jest jedna, nie można wykroczyć poza nią, a jej odniesieniem przedmiotowym jest wszystko. Pierwsza połowa XX wieku przynosi zmianę perspektywy: zaczyna się odróżnianie indywidualnych systemów logicznych, powstaje ich metateoria, logika uzyskuje możliwość mówienia o sobie samej w precyzyjny sposób. I taki jest właściwie obraz logiki również dziś: dysponujemy olbrzymią menażerią systemów logicznych, uważamy, że mamy ich dobrą metateorię, tworzymy coraz to nowe aplikacje logiki w poszczególnych naukach. Inspiracje dla nowych badań logicznych pochodzą przede wszystkim z: matematyki, informatyki, filozofii, językoznawstwa. Celem nadrzędnym pozostaje analiza rozumowań, wzbogacona refleksją metateoretyczną. Spośród niezliczonych pozycji, dotyczących tego czym jest logika, pozwalamy sobie polecić w tym miejscu zbiór artykułów pod redakcją Jana Woleńskiego: Woleński 1977, a także monografię Woleński 1993 oraz artykuł Woleński 2004. O związkach logiki z filozofią matematyki traktuje np. monografia Murawski 2001.

Charakterystyka części składowych systemu logicznego, w największym skrócie, jest następująca. *Język systemu* to język formalny, zdefiniowany poprzez podanie jego *alfabetu* (zestawu symboli prostych) oraz *reguł tworzenia* wyrażeń złożonych. W skład alfabetu wchodzą *zmienne* (określonych kategorii, np.: zdaniowe, nazwowe), inne symbole proste (np. predykaty, symbole funkcyjne, stałe), *stałe logiczne* (np. symbole funktorów prawdziwościowych, kwantyfikatory, funktory reprezentujące modalności) oraz, ewentualnie, symbole pomocnicze (np. nawiasy, przecinek). Reguły tworzenia wyrażeń złożonych (termów, formuł) mają zwykle postać indukcyjną. Podkreślić należy następujące własności syntaktycznego opisu języków systemów logicznych:

1. Są to opisy kategorialne: poszczególnym wyrażeniom przypisać można jednoznacznie ich kategorie syntaktyczne. Każde wyrażenie ma jednoznaczną strukturę składniową, odzwierciedlającą sposób jego utworzenia. Kategorie syntaktyczne pozostają w zgodności z wprowadzanymi osobno w semantyce kategoriami semantycznymi.

2. O specyfice systemu logicznego przesądzają zarówno rodzaje zmiennych jego języka (które w semantyce przebiegają stosowne uniwersa), jak i zestaw stałych logicznych (których znaczenie ma być dla danego systemu ustalone). Zwykle stałe logiczne systemu podaje się przez proste ich wyliczenia, bada się jednak także ogólne warunki, które powinny spełniać stałe logiczne – por. np. Tarski 1986, Indrzejczak 2013.
3. Opis składniowy jest efektywny, w tym sensie, że używane pojęcia syntaktyczne są obliczalne: można w sposób algorytmiczny rozstrzygać, czy dany ciąg symboli jest poprawnie utworzonym wyrażeniem, można też w taki sposób obliczać wartości wykonywanych operacji składniowych.

Zakładamy, że czytelnik zetknął się z logiką elementarną i pamięta podstawowe fakty dotyczące składni języków tworzących Elementarz Logiczny, czyli języków: *klasycznego rachunku zdań* oraz *klasycznego rachunku predykatów* (nazywanego też klasycznym rachunkiem kwantyfikatorów).

Operacja konsekwencji danego systemu logicznego ustala jego własności inferencyjne. Jest to funkcja, która każdemu zbiorowi formuł rozważanego języka przyporządkowuje pewien zbiór formuł. Ma opisywać to, jakie *wnioski* uzyskujemy z danego zbioru *przesłanek*. Standardowo zakłada się, że operacja ta spełnia znane warunki Tarskiego (zwrotność, monotoniczność, idempotentność, finitystyczność), choć rozważa się również inne rodzaje inferencji (np. niemonotoniczne lub niefinitarne). Operacje konsekwencji są reprezentowane poprzez zestawy *reguł wnioskowania* bądź zestawy reguł wnioskowania oraz *aksjomatów*. Reguły wnioskowania używane w praktyce odwołują się do formy składniowej przesłanek i wniosku. Każdy z czytelników codziennie wnioskuje wedle takich reguł, jak np.: *modus ponens*, *modus tollens*, reguła *sylogizmu hipotetycznego*, itp. *Aksjomaty* uważane mogą być za bezprzesłankowe reguły wnioskowania, czasem jednak wygodnie jest rozważać je osobno, jako formuły akceptowane mocą decyzji (odpowiednio motywowanej, rzecz jasna). Zauważmy, że reguły wnioskowania oraz operacje konsekwencji są konstrukcjami syntaktycznymi. O regułach wnioskowania praktycznie stosowanych zakłada się, że są one dane w sposób efektywny.

Przy pomocy reguł wnioskowania (oraz, ewentualne, aksjomatów) określa się pojęcia: *dowodu* oraz *tezy* rozważanego systemu logicznego. *Dowód* z ustalonego zbioru przesłanek jest (skończonym) ciągiem formuł takim, że poszczególne jego elementy są bądź aksjomatami, bądź danymi wprzódy przesłankami, bądź wnioskami wedle którejś z przyjętych reguł wnioskowania zastosowanej do wcześniejszych elementów tego ciągu. Tak rozumiany dowód także jest pojęciem efektywnym: można algorytmicznie rozstrzygnąć, czy dany ciąg formuł jest dowodem, czy nie jest. Ostatni element dowodu nazywamy *tezą* rozważanego systemu logicznego. To pierwsze pojęcie, którego złożoność obliczeniowa jest większa od dotąd rozważanych. Formuła języka rozważanego systemu jest bowiem tezą tego systemu, gdy *istnieje* jej dowód w tym systemie. Ponieważ kwantyfikator egzystencjalny w tej definicji nie jest ograniczony, więc pojęcie tezy systemu logicznego jest *rekurencyjnie przeliczalne*, w ogólności nie musi być *rekurencyjne*.

Z formalnego punktu widzenia można uprawiać logikę na sposób czysto syntaktyczny, ograniczając się do wyżej określonych operacji konsekwencji, reguł wnioskowania, dowodów i tez. Zadowalamy się wtedy czysto syntaktyczną charakterystyką poprawności rozumowań. Praktyka była i jest jednak z reguły oczywiście inna: zwykle systemy logiczne tworzymy dla rekonstrukcji wnioskowań poprawnych o danej dziedzinie przedmiotowej, a to wymaga uwzględnienia semantyki. W historii logiki o wiele częściej mamy do czynienia z konstrukcją systemu syntaktycznego dla określonej wprzódy semantyki niż na odwrót. Ustalamy, że pewne reguły wnioskowania są poprawne, ponieważ zachowują one określone aspekty przetwarzanej w rozumowaniu informacji – np. polegają na transmisji (stosownie rozumianej) prawdziwości.

Semantyka systemu logicznego, w najogólniejszym ujęciu, to pewna klasa *interpretacji* (czyli struktur relacyjnych), pewna konstrukcja mnogościowa. Czytelnik pamięta zapewne, że semantykę klasycznego rachunku zdań tworzą dwa dowolne, byle różne przedmioty (które można nazwać np. *prawdą* i *fałszem*) oraz pewien zestaw funkcji określonych na tych przedmiotach (tzw. *funkcje prawdziwościowe*), zaś semantyka klasycznego rachunku predykatów to już ogół *struktur relacyjnych*, złożonych ze zbioru (uniwersum) oraz określonych na tym zbiorze relacji, funkcji, elementów wyróżnionych. Do pojęć semantycznych należą też m.in.: *wartościowanie* (zmiennych), *spełnianie* (formuły przez wartościowanie w interpretacji), *prawdziwość* (zdania w interpretacji), *niezawodna reguła wnioskowania*, *wynikanie logiczne*, *prawo* logiki (tautologia). Dla systemów wykraczających poza Elementarz Logiczny pojęcia te definiuje się wedle pewnych standardów, dodając potrzebne subtelności. Przypominanie w tym miejscu wszystkich stosownych definicji byłoby wielkim nietaktem, którego szczęśliwie unikniemy. Zwróćmy jedynie uwagę na kilka ogólnych ważnych cech semantycznego komponentu każdego systemu logicznego:

1. Rozważane pojęcia semantyczne mają charakter *obiektywny*. Nie pytamy np. o naturę prawdy – w tym ujęciu mamy po prostu pewien zestaw wartości logicznych, z których jedną (bądź więcej) traktujemy jako wyróżnioną. Wyrażeniom języka systemu przypisujemy ich odpowiedniki pozajęzykowe poprzez wyraźnie zdefiniowane funkcje: wartościowań oraz denotacji. Definiujemy niezawodne reguły wnioskowania jako te, które zachowują jakieś aspekty przetwarzanej informacji (np. wartości wyróżnione). W przypadku stałych logicznych systemu ich wartość semantyczna jest ustalona.
2. Pojęcia semantyczne są zwykle bardziej złożone obliczeniowo od rozważanych wcześniej pojęć syntaktycznych. Ten fakt jest dość oczywisty: skoro ustalenie pewnej własności semantycznej wymaga przejrzenia *nieskończonej* liczby interpretacji, to nie może to być wykonalne na sposób algorytmiczny. Czytelnik pamięta zapewne z kursu logiki, że klasyczny rachunek zdań jest *rozstrzygalny* (istnieją algorytmy pozwalające ustalać tautologiczność formuł tego systemu), natomiast klasyczny rachunek predykatów jest *nierozstrzygalny* (nie ma takich algorytmów w tym przypadku), natomiast jest *półrozstrzygalny* – istnieją algorytmy, które pozwalają potwierdzić tautologiczność, które jednak nie działają (nie dają odpowiedzi w skończonej liczbie kroków) w przypadku formuł, które nie są prawami tego rachunku.

Życie systemu logicznego nie kończy się wraz z precyzyjnym określeniem jego języka, operacji konsekwencji oraz semantyki. Ono dopiero wtedy tak naprawdę się zaczyna. Możemy bowiem wtedy prowadzić badania: syntaktyczne, semantyczne, metalogiczne. Pierwsze z nich polegają na wyprowadzaniu tez mających dowód w rozważanym systemie. Drugie dotyczyć mogą czysto matematycznych własności proponowanej semantyki. Wreszcie, badania metalogiczne skupiają się m.in. na:

1. Ustalaniu *własności inferencji* przeprowadzanych w danym systemie. Przykładami są tu, m.in.: sprowadzanie formuł do stosownych równoważnych postaci kanonicznych, syntaktyczne twierdzenie o zwartości, syntaktyczne twierdzenie o dedukcji, twierdzenie o niesprzeczności, twierdzenie o niewyróżnianiu stałych pozalogicznych, itp.
2. Ustalaniu *zgodności* między składnią a semantyką. To przede wszystkim: twierdzenia o *trafności* (każda teza jest tautologią) oraz *pełności* (każda tautologia jest tezą), także w różnych mocniejszych wersjach niż te podane w nawiasach, np. ustalających odpowiedniość między dowodami a wynikaniem logicznym.
3. Ustalaniu *własności semantyki*. Przykłady to, m.in.: semantyczne twierdzenie o dedukcji, semantyczne twierdzenie o zwartości, twierdzenia dotyczące istnienia (bądź nieistnienia matryc adekwatnych), twierdzenie o istnieniu modelu, właściwie wszelkie twierdzenia klasycznej teorii modeli, mające walor prawdziwości w przypadku rozważanego systemu logicznego.
4. *Porównywaniu* poszczególnych systemów logicznych ze względu np. na: ich moc wyrażania, złożoność obliczeniową dowodów, wzajemne związki ich operacji konsekwencji, itd.
5. Badaniu *teorii*, które sformułować można w języku rozważanego systemu logicznego, a więc np. ustalanie, które teorie są zupełne, rozstrzygalne, kategoryczne (w stosownych mocach), itd. Tego typu badania należą już jednak raczej do metamatematyki, a nie do metalogiki.

Tworzenie coraz to nowych systemów logicznych może wyglądać na radosną, niczym nie skrępowaną twórczość kierowaną fantazją logików i matematyków, a czasem także filozofów. Można i trzeba przyjrzeć się jednakże również czynnikom *pragmatycznym*, które odpowiedzialne są za rezultaty tej twórczości. Pamiętamy o nadrzędnym celu badań logicznych: charakterystyce rozumowań poprawnych (w ustalonej dziedzinie przedmiotowej). Początkowo analizowano głównie rozumowania przeprowadzane w językach etnicznych, dotyczące bądź sfery doświadczenia potocznego, bądź spekulacji filozoficznych. Pewną rolę w rozwoju refleksji logicznej odegrały rozumowania przeprowadzane w naukach empirycznych. Zawiłości semantyczne języków etnicznych także inspirowały logików do tworzenia nowych systemów. Najważniejsza rola w rozwoju refleksji logicznej przypadła matematyce i przeprowadzanym w niej rozumowaniom. Sądzimy, że do ważnych uwarunkowań pragmatycznych badań logicznych należą, m.in.:

1. Zerwanie z *psychologizmem* w logice. Od ponad stu lat nie badamy już wnioskowań jako niejasno określonych czynności psychicznych, lecz jako operacje na wyrażeniach językowych. Oczywiście możemy próbować modelować matematycznie czynności

psychiczne, ale nie tak rozumiany jest dzisiaj główny cel i standard rozważań logicznych.

2. Uznanie *niezależnego istnienia* różnych systemów logicznych. Obecnie przyjmujemy naszkicowane wyżej rozumienie systemu logicznego. Możemy oczywiście pytać o to, czy któreś z tych systemów są jakoś wyróżnione. Dla przykładu, możemy być zwolennikami tzw. *tezy pierwszego rzędu*, głoszącej, że prawdziwą, naturalną logiką jest logika pierwszego rzędu, formułowana w języku rachunku predykatów i bazująca na jakiejś standardowej operacji konsekwencji. Na poparcie tej tezy przywołać możemy wybrane własności metalogiczne tego systemu, które świadczą o jego uniwersalności i owocności zastosowań, a także pewne metatwierdzenia (np. twierdzenia Lindströma), które ustalają wyjątkowość tej logiki. Wśród argumentów przeciw tej tezie wymienia się zwykle to, że język logiki pierwszego rzędu ma nikczemnie małą moc wyrażania – nie można w nim wyrazić np. tak podstawowych pojęć matematycznych jak nieskończoność, ciągłość, zbiór miary zero, itd. Można je jednak wyrazić w takich teoriach pierwszego rzędu, jak powszechnie akceptowana teoria mnogości Zermela-Fraenkla. Nadto, można argumentować, że operowanie wspomnianymi wyżej pojęciami to nie domena logiki, lecz matematyki. Nie zajmujemy emocjonalnego stanowiska wobec tezy pierwszego rzędu. Uważamy natomiast dogmatycznie, że *nie istnieje* coś takiego, jak globalna, jakoś naturalna logika języka naturalnego, sądzimy, że można jedynie dokonywać lokalnych (biorących pod uwagę wybrane aspekty) przekładów między językami etnicznymi a sztucznymi językami logiki. Odmawiamy także realności domniemanemu przedmiotowi badań *etnologiki*, postulującej rzekome różnice kulturowe w ujmowaniu refleksji logicznej. Systemów logicznych jest wiele, ale zasadniczy cel logiki jest jeden: badanie kryteriów poprawności rozumowań, które to badanie, owszem, może brać pod uwagę czynniki specyficzne dla rozważanej kultury. Dla przykładu, rozumowania w danej kulturze mogą być wartościowane nie jako bazujące na wynikaniu logicznym, lecz na walorach perswazyjnych. Wtedy jednak także będą one polegały na zachowywaniu pewnych ustalonych aspektów przetwarzania informacji. Ich „niezawodność'' będzie polegała na transmisji wybranych cech komunikatów.
3. Uznanie, że zachodzenie twierdzeń o *trafności i pełności* stanowi warunek konieczny, aby rozważany system był traktowany jako pełnowartościowy system logiczny. Zauważmy, że nawet w przypadku logiki intuicjonistycznej, która ma formalizować przekonanie, że istotą prawdy matematycznej jest dowód i która była rozwijana najpierw czysto syntaktycznie, również podjęto próby budowania dla niej semantyki, w postaci algebr Heytinga i modeli Kripkego. Zauważmy też, że logicy nie zadowalają się tworzeniem czysto formalnych semantyk (wykorzystując np. wiązkę Lindenbauma), lecz zwykle starają się, aby proponowana semantyka spełniała stosowne warunki adekwatności, zgodności ze składnią. W szczególności, rozważa się np. to, czy operacje konsekwencji określane są w jakoś naturalny sposób – por. np. Pogorzelski, Wojtylak 2008.
4. Zwrócenie uwagi na *obliczeniowe* aspekty badań logicznych. Od ponad osiemdziesięciu lat mamy w (klasycznej) matematyce świadomość różnicy między

dowodem a prawdą. Ta świadomość wpłynęła (wraz z późniejszym rozwojem informatyki) na intensyfikację badań nad efektywnością procedur badawczych.

5. Wreszcie, do uwarunkowań pragmatycznych badań logicznych można zapewne zaliczyć *poglądy filozoficzne*, wyznawane przez poszczególnych logików. Mogą oni co prawda deklarować, że oddzielają swoje poglądy filozoficzne od swojej roboty formalnej, ale – w ostatecznym rozrachunku – wybierają przecież takie, a nie inne metody w prowadzonych badaniach, nastawiają się na dążenie do określonego rodzaju rozwiązań, itd.

Propozycja definicji

Mamy następującą propozycję dotyczącą rozumienia pojęcia *językowy obraz świata* w przypadku języków logiki. Ustalamy metateorię M, w której pracujemy – zwykle będzie to teoria mnogości ZFC Zermela-Fraenkla z aksjomatem wyboru. W ramach tej metateorii *językowym obrazem świata systemu logicznego* S jest ogół twierdzeń, które możemy w M udowodnić o S. Proponowana definicja jest jedynie punktem wyjścia, można teraz zastanawiać się nad jej sensownością, adekwatnością, itd. Zauważmy, że:

1. Definiujemy JOS dla S w ramach M jako dobrze określony obiekt: pewien zbiór twierdzeń. Możemy zmieniać metateorię (np. z klasycznej na intuicjonistyczną), otrzymamy wtedy inny JOS dla S.
2. Można wysuwać obiekcję, że proponowana definicja jest za szeroka, że za JOS systemu S w M chcielibyśmy uważać tylko wybrane twierdzenia o S, które są – z jakichś określonych względów – interesujące, które mówią o S coś naprawdę ważnego. Nie ma jednak żadnej możliwości, aby poddać formalizacji pojęcie ,,interesujące twierdzenie''.
3. Z drugiej strony, można zarzucać tej definicji, że jest za wąska, że nie ujmuje pewnych naszych przekonań o S jako elementów jego JOS. Na tę krytykę jesteśmy otwarci. Nie widać żadnych przeszkód, aby do rozumianego na powyższy sposób JOS danego S dołączyć (nie mające jednak statusu twierdzeń w M) pewne przekonania, odzwierciedlające np.: nasze preferencje dotyczące, powiedzmy, dogmatu dwuwartościowości logiki, spełniania (lub nie) przez nią wybranych zasad ekstensjonalności, ograniczenia się do finitarnych operacji konsekwencji, odmówienia statusu stałych logicznych modalnościom (i traktowaniu systemów modalnych jako teorii, a nie logik), rozszerzeniu zestawu stałych logicznych, itd. Niech P(S) będzie ogółem takich wybranych przekonań o S. Powinniśmy założyć, że przekonania składające się na zbiór P(S) dają się wyrazić w języku metateorii M, lub w stosownym jego rozszerzeniu, np. uwzględniającym jakoś formalnie charakteryzowane relacje preferencji. Praktyczne spełnienie tego wymogu może być trudne. Na JOS systemu S składają się wtedy zarówno twierdzenia w M o S, jak i przekonania z P(S), a także wszystko to, co z tego można wywnioskować, w tak przygotowanym rozszerzeniu metateorii M. Uzyskujemy w ten sposób pewne twierdzenia matematyczne oraz sformalizowane konkluzje filozoficzne. W takim szerszym rozumieniu rozważanego pojęcia ma więc ono część obiektywną, zależną od metateorii M oraz część subiektywną, zależną od akceptowanych preferencji filozoficznych.

Można ewentualnie podnieść zarzut: a czymże różni się tak rozumiany JOS systemu S w ramach M po prostu od wszystkiego, co dotąd nazywano ogółem własności systemu S, które przypisać mu można w M? Odpowiedź brzmi oczywiście: niczym. Naszym zadaniem w tym przypadku było zaproponowanie rozumienia pojęcia *językowy obraz świata* dla sztucznych języków logiki. Nie było dotąd takiej propozycji, o ile nam wiadomo. Teraz można się nad nią znęcać.

Wypada jeszcze wskazać na przykłady – co mianowicie składa się na JOS systemu S w ramach M dla wybranych, mniej lub lepiej powszechnie znanych, systemów S, a także zastanowić się, jak przy powyższej propozycji wygląda porównywanie JOS poszczególnych systemów logicznych. Rozważmy kilka przykładów:

1. Klasyczny rachunek zdań. Może być formułowany przy pomocy różnych, równoważnych zestawów aksjomatów i reguł wnioskowania – por. np. konsekwencję aksjomatyczną, systemy dedukcji naturalnej, metodę tablic analitycznych, metodę rezolucji, rachunki sekwentów. Jest trafny i pełny, spełnia twierdzenia o dedukcji, zwartości, niesprzeczności, jest rozstrzygalny. Zakłada dwuwartościowość logiki, dwuelementowa algebra Boole'a stanowi dlań adekwatną semantykę. Jest powszechnie uważany za standardowy. Logika ta „widzi'' zatem świat jako dychotomiczne uniwersum, na którym określone są pewne operacje.
2. Intuicjonistyczny rachunek zdań. W tym systemie logicznym nie zachodzi np. prawo wyłączonego środka. Nie istnieje skończona matryca logiczna adekwatna dla tej logiki. Semantyka oparta jest na algebrach Heytinga. Filozoficzne motywacje dla uprawiania tej logiki wiążą się z intuicjonistycznym przekonaniem, że prawda matematyczna rozumiana powinna być wyłącznie w terminach dowodu. Można więc chyba rzec, że logika intuicjonistyczna „widzi'' tylko takie aspekty świata, które osiągalne są za pomocą dowodów.
3. Klasyczny rachunek predykatów. Może być formułowany przy pomocy różnych, równoważnych zestawów aksjomatów i reguł wnioskowania – por. np. konsekwencję aksjomatyczną, systemy dedukcji naturalnej, metodę tablic analitycznych, metodę rezolucji, rachunki sekwentów. Jest trafny i pełny, spełnia twierdzenia o dedukcji, zwartości, niesprzeczności, jest półrozstrzygalny. Semantykę stanowi klasa wszystkich struktur relacyjnych (ustalonej sygnatury). Logika ta „widzi'' zatem wszystkie światy złożone z jakiegoś uniwersum przedmiotów, wraz z ich (ekstensjonalnie rozumianymi) własnościami, łączącymi je relacjami, określonymi na nich funkcjami. Ma szerokie zastosowania w formalizacji rozważań w wielu naukach. Wielu filozofów uważa ten system logiki (logikę pierwszego rzędu) za właściwą, standardową, naturalną logikę (the logic).
4. Niefregowski rachunek zdań. Z logicznego punktu widzenia jest to logika dwuwartościowa, całkowicie ekstensjonalna. Jej cechą wyróżniającą jest przypisanie formułom korelatów semantycznych – sytuacji. Identyczność sytuacji jest nowym funktorem zdaniowym, który nie pokrywa się z funktorem równoważności materialnej. Logika ta „widzi'' zatem świat o wiele subtelniej niż logika fregowska,

czyli klasyczny rachunek zdań. Problemem pozostaje dostarczenie porządnej matematycznej charakterystyki samego pojęcia sytuacji.

5. Logiki wielowartościowe. Rozważa się wartościowania formuł w co najmniej dwuelementowym (skończonym lub nieskończonym) zbiorze wartości logicznych, dla których można przyjmować różne interpretacje i z których co najmniej jedna jest wyróżniona. Logiki te pozwalają zatem „widzieć'' świat nie dychotomicznie, lecz jako spektrum możliwości (np. od niemożliwego, przez możliwe do koniecznego) lub, powiedzmy, stopni prawdopodobieństwa zachodzenia zjawisk.
6. Logiki modalne. Rozszerza się zestaw stałych logicznych o funktory konieczności i możliwości. Charakteryzować je aksjomatycznie można na wiele sposobów, stąd też istnieje wielkie mnóstwo systemów modalnych. Opracowano dla nich systemy semantyki, dla których odpowiednie logiki modalne są pełne. Logiki modalne „widzą'' zatem „światy alternatywne''. Relacja alternatywności (osiągalności) może być rozumiana na różne sposoby. Wedle podobnego wzorca, jak w przypadku logik konieczności i możliwości rozważa się np. logiki temporalne, doksastyczne, epistemiczne, itd.
7. Logika drugiego rzędu. Dopuszcza kwantyfikację nie tylko po indywiduach, ale także po ich zbiorach, relacjach, funkcjach, a więc podstawy jej ontologii są obszerniejsze niż w przypadku logiki pierwszego rzędu. W najogólniejszej postaci nie spełnia twierdzenia o pełności, a więc nie istnieje efektywny system dedukcyjny, który pozwoliłby osiągnąć wszystkie jej tautologie. Pozwala na kategoryczne (czyli jednoznaczne, z dokładnością do izomorfizmu) charakterystyki ważnych struktur matematycznych.
8. Logiki z uogólnionymi kwantyfikatorami. Zestaw standardowych stałych logicznych można rozszerzyć o dodatkowe kwantyfikatory (numeryczne kwantyfikatory Mostowskiego, kwantyfikator Changa, kwantyfikator Härtiga, kwantyfikator Henkina, itd.). Semantykę tych stałych określamy przez stosowne warunki dotyczące spełniania formuł je zawierających (dotyczące np. liczby elementów uniwersum modelu, spełniających formułę). Logiki te mają moc wyrażania większą od logiki pierwszego rzędu – można w niektórych z nich zdefiniować np. pojęcie nieskończoności.
9. Logiki infinitarne. System logiczny uważamy za infinitarny, gdy dopuszcza nieskończone konstrukcje składniowe (koniunkcje i alternatywy) lub posługuje się infinitarnymi regułami wnioskowania (np. ω-regułą). Opis składni istotnie wykorzystuje tu teorię mnogości. Formułuje się stosowne warunki, pozwalające na mówienie o pełności oraz zwartości takich logik. Są to oczywiście logiki mocniejsze od klasycznej logiki pierwszego rzędu. Są użyteczne m.in. w prostym wyrażeniu niektórych własności struktur algebraicznych (gdy np. jakaś własność wymaga uwzględnienia nieskończonej koniunkcji bądź alternatywy warunków).
10. Logiki abstrakcyjne. Można precyzyjnie określić pojęcie mocy wyrażania systemu logicznego. Pozwala to na porównywanie takich systemów, ustalanie które z nich są maksymalnymi systemami o danych własnościach, itp. Do ważnych pierwszych tego typu ustaleń należy np. twierdzenie Lindströma, głoszące, że klasyczna logika pierwszego rzędu jest maksymalną logiką spełniającą twierdzenie o zwartości oraz twierdzenie Löwenheima-Skolema.

11. Operacje konsekwencji. Ogół wszystkich operacji konsekwencji (dla ustalonego języka) badać możemy np. środkami algebraicznymi, studiując kratę konsekwencji. To inny (od wspomnianego wyżej) paradygmat, w którym możliwe jest porównywanie systemów logicznych, ustalanie istnienia (bądź nieistnienia) maksymalnych logik o danych własnościach, itd.

Proponowane wyżej rozumienie pojęcia JOS dla języków logiki jest, sądzimy, szczególnym przypadkiem uważania za JOS danego języka ogółu związków między jego odniesieniem przedmiotowym a sposobem jego używania, anonsowanego we wstępie tekstu.

Podane wyżej propozycje mają wyraźnie *synchroniczny* charakter. Nie ma jednak przeszkód, aby pojęcie JOS dla języków logiki relatywizować historycznie, otrzymując w ten sposób *diachroniczne* jego rozumienie. Zauważmy w tym kontekście, że:

1. Zamiast mówić o ogóle twierdzeń o S zachodzących w M, możemy brać pod uwagę jedynie dotąd udowodnione twierdzenia, czyli to, co w danym momencie wiemy na gruncie M o S.
2. Czynniki pragmatyczne warunkujące przekonania tworzące P(S), mogą zależeć od kontekstu historycznego. Wspominaliśmy już o porzuceniu przekonania, że logika jest jedna (i nie można wyjść „poza'' nią, na metapoziom) oraz o odrzuceniu psychologicznie bazowanego ujęcia logiki. W XX wieku następowały też zmiany, jeśli chodzi o formalne własności akceptowanych języków logiki: po standardzie teorii typów dominującą rolę zaczyna odgrywać standard logiki pierwszego rzędu, a dopiero w drugiej połowie XX wieku rozpoczynają się systematyczne badania np. logik infinitarnych oraz logik z uogólnionymi kwantyfikatorami.
3. Przekonania tworzące w ustalonym momencie P(S) mogą podlegać zmianom, spowodowanym np. wynikami o S uzyskanymi w M. Najbardziej znane przykłady takich zmian to modyfikacje programu, który za cel stawiał sobie udowodnienie przy pomocy środków finitarnych niesprzeczności, zupełności, rozstrzygalności podstaw matematyki – znane twierdzenia limitacyjne wykazały, że program taki podlega obiektywnym ograniczeniom.
4. Nie byłoby rozumne zakładanie, że obecne wyobrażenia o tym, jak wygląda (powinien wyglądać) system logiczny nie ulegną w przyszłości żadnym zmianom. Owe zmiany mogą dotyczyć m.in.: statusu stałych logicznych (np. predykat należenia elementu do zbioru utracił status stałej logicznej), akceptacji określonych środków dowodowych (np. aksjomat wyboru uzyskał taką akceptację w klasycznej matematyce, natomiast akceptacja dowodów opartych na działaniu programu komputerowego jest obecnie dyskutowana), zmiany całego paradygmatu uprawiania badań logicznych (np. ewentualne zastąpienie powszechnego dziś paradygmatu teoriomnogościowego paradygmatem bazującym na teorii kategorii).

Niniejszy tekst jest zapisem odczytu, wygłoszonego na Seminarium Zakładu Logiki Stosowanej UAM w dniu 22 stycznia 2014 roku. Zawiera propozycje, które być może nie są warte polemiki. Autor będzie jednak oczywiście niezmiernie wdzięczny za wszelkie uwagi krytyczne dotyczące tego tekstu.

Odnośniki bibliograficzne

Indrzejczak, A. 2013. *Rachunki sekwentowe w logice klasycznej*. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Murawski, R. 2001. *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Pogorzelski, W.A., Wojtylak, P. 2008. *Elements of the theory of completeness in propositional logic*. Birkhäuser, Basel Boston Berlin.

Tarski, A. 1986. What are logical notions? *History and Philosophy of Logic* 7, 143—154.

Woleński, J. (Red.) 1977. *Filozofia logiki*. Wydawnictwo SPACJA – Fundacja Aletheia, Warszawa.

Woleński, J. 1993. *Metamatematyka a epistemologia*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Woleński, J. 2004. First-Order Logic: (Philosophical) Pro and Contra. W: V. Hendricks, F. Neuhaus, S.A. Pedersen, U. Scheffer, H. Wansing (eds.) *First-Order Logic Revisited*. Logos, Berlin, 369—398.