5 wykładów dla Studium Doktoranckiego Wydziału Neofilologii UAM

LOGIKA WSPÓŁCZESNA: PRZEGLĄD ZAGADNIEŃ

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

1 Wstęp

Niniejszy tekst to notatki do pięciu wykładów dla Studium Doktoranckiego Wydziału Neofilologii UAM. Wykłady mają na celu ukazanie – w wielkim skrócie – wybranych pojęć i twierdzeń współczesnej logiki. Omawiane tematy to kolejno:

1. Klasyczna logika pierwszego rzędu
2. Wybrane logiki nieklasyczne
3. Metalogika
4. Semiotyka logiczna
5. Ogólna metodologia nauk.

Forma wykładów podyktowana jest tym, że audytorium stanowią filolodzy. Skupiamy się zatem na wprowadzeniu wybranych ważnych pojęć logicznych oraz informacjach o niektórych twierdzeniach, pomijając szczegóły dowodów formalnych.

Logika jest fenomenem kulturowym specyficznym dla cywilizacji Zachodu – w żadnym innym kręgu kulturowym rozważania logiczne nie przybrały tak rozwiniętej postaci jak właśnie na Zachodzie. W najszerszym rozumieniu tego terminu, *logika* (*logica magna*) obejmuje trzy działy:

1. logikę formalną (obecnie: matematyczną),
2. semiotykę logiczną,
3. ogólną metodologię nauk.

Pomijamy w naszym przedstawieniu aspekty historyczne, skupiając się, zgodnie z tytułem wykładów, na ustaleniach współczesnych.

Logika wyrasta z analizy rozumowań przeprowadzanych w językach etnicznych (niektórzy wolą mówić: w języku *naturalnym*, bądź w języku *potocznym*). Przekształca się później w analizę języka *nauki*. *Logika formalna*, w jej obecnej szacie matematycznej, może być traktowana jako gałąź matematyki. W istocie, jest dość ściśle powiązana z różnymi dyscyplinami matematycznymi. Analiza języka nauki oraz rozumowań w naukach przeprowadzanych stanowi trzon *ogólnej metodologii nauk*. Współczesna *semiotyka logiczna* wykorzystuje natomiast środki pojęciowe oraz metody badawcze logiki formalnej w analizie języków etnicznych.

Logika matematyczna to stosunkowo młoda dyscyplina – jej początki sięgają połowy XIX wieku, ustalenie pewnych paradygmatów to pierwsza połowa wieku XX, a bardzo intensywny rozwój i dywersyfikacja badań to druga połowa poprzedniego stulecia. W całym wieku XX logika matematyczna była inspirowana problemami samej matematyki, po części również zagadnieniami wyrosłymi z analiz filozoficznych oraz językoznawczych.

Czy mamy do czynienia z jedną logiką, czy też z wielością logik? Należy odróżniać termin *logika* oznaczający dyscyplinę naukową od terminu *logika*, rozumianego jako *system logiczny*. W tym drugim rozumieniu jest wiele logik. Czasami podaje się lapidarne określenia w rodzaju:

1. *Logika to usystematyzowany zespół niezawodnych reguł wnioskowania.*
2. *Logika to język wraz z określoną w nim operacją konsekwencji.*
3. *Logika to trójka uporządkowana* (L, C, S)*, gdzie* L *jest językiem,* C *określoną w nim operacją konsekwencji, a* S *semantyką języka* L*.*

Jak zobaczymy, operacja konsekwencji to funkcja, która każdemu zbiorowi *przesłanek* przyporządkowuje zbiór wszystkich *wniosków* z tych przesłanek. Interesujemy się przede wszystkim operacjami konsekwencji wyznaczonymi przez *niezawodne reguły wnioskowania* (ewentualnie także przyjmowane *aksjomaty*). Regułą wnioskowania jest każdy zbiór par uporządkowanych, złożonych ze zbioru formuł (przesłanek) oraz formuły (wniosku). W praktyce przyjmujemy ponadto, że rozważane reguły zbudowane są wedle pewnych ustalonych schematów, odnoszących się do kształtu (składniowego) przesłanek oraz wniosku. Wreszcie, niezawodność reguły oznacza, że *zachowuje* ona wybrane *wartości logiczne*. W popularnym

sformułowaniu, wnioskując wedle niezawodnej reguły wnioskowania od prawdziwych przesłanek nie dojdziemy do fałszywego wniosku. Najczęściej rozważamy dwie wartości logiczne, którymi mogą być dowolne dwa różne przedmioty, oznaczane np. 0 oraz 1 i nazywane – jeśli ktoś lubi nazywać – odpowiednio: *fałszem* oraz *prawdą*.

Formalny charakter logiki polega m.in. na tym, że abstrahuje się od *treści* wyrażeń. Wyrażenia języków systemów logicznych zbudowane są wyłącznie ze *zmiennych* (różnych typów) oraz *stałych logicznych* (pomijając nieistotne symbole pomocnicze). Zmienne są *wartościowane*; dla przykładu:

1. *zmienne zdaniowe* za wartości przyjmować mogą 0 i 1;
2. *zmienne nazwowe* za wartości przyjmować mogą denotacje nazw ogólnych, czyli zbiory elementów (z ustalonego uniwersum);
3. *zmienne indywidualne* za wartości przyjmować mogą elementy (ustalonego uniwersum).

Możliwe jest podanie definicji stałych logicznych, ale najczęściej określa się je po prostu poprzez wyliczenie, dla każdego rozważanego systemu logicznego. Do *stałych logicznych* zaliczamy m.in.:

1. *funktory prawdziwościowe* (cztery jednoargumentowe oraz szesnaście dwuargumentowych *ekstensjonalnych* funktorów zdaniotwórczych od argumentów zdaniowych);
2. *kwantyfikatory* (ogólny, szczegółowy, tzw. kwantyfikatory uogólnione);
3. *wybrane funktory* różnych kategorii syntaktycznych – np. funktory *modalne*, *epistemiczne*, inne funktory *intensjonalne*;
4. czasem również predykat *identyczności*.

Opis *składniowy* języków systemów logicznych polega na podaniu *indukcyjnych* definicji zbiorów wyrażeń ustalonych kategorii syntaktycznych (*termów*, *formuł*). Zasada jest zawsze taka sama: ustalamy najpierw zbiór wyrażeń *prostych* danej kategorii, a potem reguły otrzymywania wyrażeń *złożonych* z wyrażeń prostszych. W ten sposób określa się każdy zbiór wyrażeń (ustalonej kategorii) jako *najmniejszy* zbiór zawierający wyrażenia proste oraz domknięty na owe reguły tworzenia wyrażeń złożonych. Wyrażenia języków systemów logicznych są *jednoznaczne składniowo*.

Gdy dany jest już zbiór F formuł języka L, to przez (finitystyczną) *operację konsekwencji* w tym języku rozumiemy dowolną funkcję $C : \wp(F) \to \wp(F)$, która spełnia następujące warunki, dla dowolnych $X \subseteq F$ oraz $Y \subseteq F$:

1. $X \subseteq C(X)$ (zwrotność)

2. jeśli $X \subseteq Y$, to $C(X) \subseteq C(Y)$ (monotoniczność)

3. $C(C(X)) \subseteq C(X)$ (idempotencja)

4. $C(X)$ jest sumą wszystkich $C(Z)$, gdzie Z przebiega wszystkie skończone podzbiory X (finitarność).

Każda operacja konsekwencji jest pewnym *operatorem domknięcia*. Punkty stałe operacji konsekwencji C nazywają się jej *systemami dedukcyjnymi* (*teoriami*). Powyższa definicja pochodzi od Alfreda Tarskiego. Współcześnie rozważa się – głównie w celach aplikacyjnych (informatyka, filozofia, lingwistyka) – także inne rodzaje operacji konsekwencji (w szczególności, tzw. konsekwencje *niemonotoniczne*). Definicja Tarskiego pozwala uwzględnić zarówno konsekwencje polegające na *uznawaniu* zdań, jak też na ich *odrzucaniu*.

W praktyce rozważamy zwykle operacje konsekwencji wyznaczone przez podany wyraźnie zestaw reguł wnioskowania (ewentualnie również aksjomaty – choć aksjomaty zawsze traktować możemy jako bezprzesłankowe reguły wnioskowania). Niech zatem, dla ustalonych L (język) oraz F (zbiór wszystkich formuł), R będzie zbiorem (finitarnych) reguł wnioskowania, czyli zbiorem relacji $r \subseteq \wp_{fin}(F) \times F$, gdzie $\wp_{fin}(F)$ oznacza zbiór wszystkich skończonych podzbiorów zbioru F. Poprzedniki każdej relacji r nazywamy *przesłankami* reguły r, a jej następniki – *wnioskami* reguły r. Zakłada się przy tym ponadto, że dla każdej takiej relacji r liczebność jej zbiorów przesłanek jest ustalona. Reguły wnioskowania mogą mieć zatem jedną, dwie, trzy, itd. przesłanki. Zwykle reguły wnioskowania zapisujemy w postaci schematycznej: jeśli przesłankami reguły r są $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, a jej wnioskiem β, to schematycznym zapisem r jest:

$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta}.$$

Elementy reguły r nazywa się czasem jej *sekwentami*.

Mówimy, że *formuła β jest wyprowadzalna ze zbioru formuł X za pomocą reguł ze zbioru R*, gdy istnieje skończony ciąg formuł $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ taki, że:

1. β jest identyczna z α_n,

2. dla dowolnej $i \leqslant n$, albo α_i jest elementem zbioru X, albo istnieją wskaźniki $i_1, \ldots, i_k < i$ oraz istnieje reguła r należąca do R takie, że para złożona ze zbioru przesłanek $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}\}$ oraz wniosku α_i należy do r.

Jeśli formuła β jest wyprowadzalna ze zbioru formuł X za pomocą reguł ze zbioru R, to piszemy $\beta \in C_R(X)$. Każdy ciąg $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ spełniający podane wyżej warunki nazywamy *dowodem formuły β ze zbioru (założeń) X (przy użyciu reguł wnioskowania ze zbioru R)*. Zbiór $C_R(X)$ to zatem zbiór wszystkich formuł posiadających dowód ze zbioru założeń znajdujących się w X. Można sprawdzić, że tak określona operacja $C_R : \wp(F) \to \wp(F)$ jest operacją konsekwencji w sensie Tarskiego. Podobnie zdefiniować można operację $C_{R,A}$ wyprowadzalności formuł ze względu na zbiór reguł wnioskowania R oraz zbiór *aksjomatów* $A \subseteq F$:

$$C_{R,A}(X) = C_R(A \cup X).$$

Zbiór $C_R(\emptyset)$ (lub, odpowiednio, zbiór $C_{R,A}(\emptyset)$ nazywany jest zbiorem *tez* operacji konsekwencji C_R (odpowiednio, operacji $C_{R,A}$). Dla pewnych celów wygodne jest również rozważanie *wyprowadzalności w stopniu* k, którego (indukcyjna) definicja jest następująca:

1. $C_R^0(X) = X$
2. $C_R^{k+1}(X) = C_R^{k+1}(X) \cup \{\beta \in F : (\exists r \in R)(\exists Y \subseteq C_R^k(X))\ (Y, \beta) \in r\}$
3. $C_R^\infty(X) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} C_R^k(X)$.

Definicja ta formalizuje pojęcie posiadania dowodu o długości co najwyżej k i jest szczególnie użyteczna w metodzie *dowodów założeniowych*.

Wszystkie operacje konsekwencji dla ustalonego języka L i zbioru wszystkich jego formuł F tworzą pewną strukturę porządkową (tzw. *kratę*). Ów porządek jest określony następująco: $C_1 \preceq C_2$ dokładnie wtedy, gdy $C_1(X) \subseteq C_2(X)$ dla wszystkich $X \subseteq F$. Jeśli $C_1 \preceq C_2$, to mówimy, że C_2 jest *nadkonsekwencją* C_1 (oraz że C_1 jest *podkonsekwencją* C_2).

Gdy rozważamy system logiczny z operacją konsekwencji C_R (lub $C_{R,A}$), to reguły należące do R nazywamy regułami *pierwotnymi*. Warto wspomnieć o innych jeszcze rodzajach reguł związanych z dowolną operacją konsekwencji C_R (lub $C_{R,A}$, odpowiednio):

1. Reguła r jest *dopuszczalna* ze względu na C_R (lub $C_{R,A}$, odpowiednio), gdy – mówiąc intuicyjnie – dołączenie jej do zbioru reguł pierwotnych nie zmienia zbioru tez. Gdy r jest dopuszczalna ze względu na $C_{R,A}$, to piszemy $r \in \mathrm{Perm}(R, A)$. Formalnie: $r \in \mathrm{Perm}(R, A)$ dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich $Y \subseteq F$ oraz $\beta \in F$, jeśli $(Y, \beta) \in r$ oraz $Y \subseteq C_R(A)$, to $\beta \in C_R(A)$. Reguła dopuszczalna w jakimś systemie logicznym to zatem taka reguła, ze względu na którą zbiór tez tego systemu jest domknięty.

2. Reguła r jest *wyprowadzalna* ze względu na C_R (lub $C_{R,A}$), gdy – mówiąc intuicyjnie – dołączenie do aksjomatów A przesłanek Y z pary (Y, β) należącej do r powoduje wyprowadzalność formuły β. Gdy r jest wyprowadzalna ze względu na $C_{R,A}$, to piszemy $r \in \mathrm{Der}(R, A)$. Formalnie: $r \in \mathrm{Der}(R, A)$ dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich $Y \subseteq F$ oraz $\beta \in F$, jeśli $(Y, \beta) \in r$, to $\beta \in C_R(X \cup Y)$.

Zamiast mówić: r jest dopuszczalna ze względu na (R, A), mówmy: r jest (R, A)-dopuszczalna (i podobnie dla wyprowadzalności). Każda reguła (R, A)-wyprowadzalna jest (R, A)-dopuszczalna, lecz nie na odwrót. Reguła jest (R, A)-wyprowadzalna dokładnie wtedy, gdy jest dopuszczalna ze względu na dowolne rozszerzenie zbioru reguł R oraz zbioru aksjomatów A. Słuchacze zapewne zetknęli się z pojęciem reguł wyprowadzalnych podczas elementarnego kursu klasycznego rachunku zdań, bazującego na metodzie dowodów założeniowych.

Wreszcie, ważne jest także pojęcie reguły *strukturalnej*. W dydaktyce logiki używa się właściwie wyłącznie takich reguł wnioskowania. Jednak dla – choćby intuicyjnego – określenia własności strukturalności potrzebne są pewne dodatkowe pojęcia. Niech $e : At \to F$ będzie dowolną funkcją przyporządkowującą każdej formule prostej (w przypadku rachunków zdaniowych: każdej zmiennej zdaniowej) jakąś formułę ze zbioru F. Wtedy e można jednoznacznie rozszerzyć w naturalny sposób do homomorfizmu $h^e : F \to F$. Mówimy, że reguła r jest *strukturalna*, gdy dla wszystkich $X \subseteq F$, $\beta \in F$ oraz $e : At \to F$: jeśli $(X, \beta) \in r$, to $(h^e[X], h^e(\beta)) \in r$, gdzie $h^e[X]$ oznacza obraz X względem h^e. Intuicyjnie mówiąc, reguła strukturalna zawiera wszystkie pary: (zbiór przesłanek, wniosek), będące podstawieniami jakiejkolwiek pary należącej do tej reguły.

Na zakończenie tego wstępu rozważmy prosty przykład – znany być może słuchaczom *implikacyjno-negacyjny klasyczny rachunek zdań*, w jednej z wersji aksjomatycznych i w nieco innej notacji niż zwykle rozważana. *Alfabet* języka $L_\heartsuit$ zawiera wyłącznie:

1. wszystkie elementy nieskończonego zbioru $A_\heartsuit = \{\heartsuit_1, \heartsuit_2, \heartsuit_3, \ldots\}$ (zmienne zdaniowe);

2. dwa symbole: $\S$ oraz $\bigstar$ (odpowiednio: symbol implikacji oraz symbol negacji).

Zbiór $F_\heartsuit$ wszystkich *formuł* języka $L_\heartsuit$ definiujemy przez indukcję:

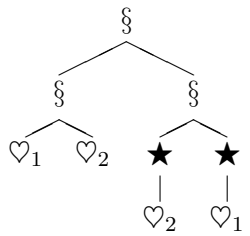
1. $A_\heartsuit \subseteq F_\heartsuit$

2. Jeśli $\alpha, \beta \in F_\heartsuit$, to $\S\alpha\beta \in F_\heartsuit$

3. Jeśli $\alpha \in F_\heartsuit$, to $\bigstar\alpha \in F_\heartsuit$

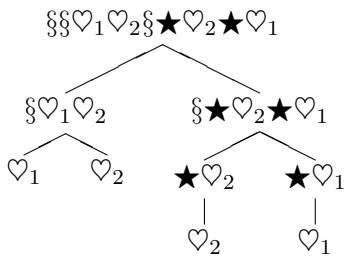
4. Każdy element w $F_\heartsuit$ jest bądź elementem $A_\heartsuit$, bądź powstaje z elementów $F_\heartsuit$ przez zastosowanie reguły (2) lub reguły (3).

Formułą języka $L_\heartsuit$ jest np. ciąg: $\S\S\heartsuit_1\heartsuit_2\S\bigstar\heartsuit_2\bigstar\heartsuit_1$. Jej budowę składniową można reprezentować poprzez *drzewa składniowe*, np. tak:



Na liściach tego drzewa umieszczono elementy zbioru $A_\heartsuit$, w jego pozostałych wierzchołkach symbole § lub ★, w korzeniu *funktor główny* rozważanej formuły.

Inny sposób drzewowej reprezentacji struktury składniowej tej samej formuły, czyli $\S\S\heartsuit_1\heartsuit_2\S\bigstar\heartsuit_2\bigstar\heartsuit_1$:



Wierzchołki tego drzewa oznakowano wszystkimi *podformułami* rozważanej formuły.

Aksjomatami naszego systemu są wszystkie formuły o postaci (tu α, β, γ są elementami $F_\heartsuit$):

1. $\S\S\alpha\beta\S\S\beta\gamma\S\alpha\gamma$

2. $\S\S\bigstar\alpha\alpha\alpha$

3. $\S\alpha\S\bigstar\alpha\beta$.

Reguła odcinania ogona[1] to zbiór wszystkich par postaci $(\{\S\alpha\beta, \alpha\}, \beta)$, gdzie $\alpha, \beta \in F_\heartsuit$. *Dowodem* formuły α ze zbioru wyrażeń X nazywamy każdy skończony ciąg $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ taki, że α jest identyczne z α_n, a każdy element α_k tego

[1]To tylko nazwa wprowadzona dla zabawy. Naprawdę używa się nazwy *reguła odrywania*.

ciągu jest bądź aksjomatem $L_\heartsuit$, bądź elementem X, bądź drugim elementem pary w regule odcinania ogona, gdzie pierwszy element tej pary składa się z formuł występujących w tym ciągu wcześniej niż α_k. Dla dowolnego $X \subseteq F_\heartsuit$ niech:

$$C_\heartsuit(X) = \{\alpha \in F_\heartsuit : \text{ istnieje dowód } \alpha \text{ z } X\}.$$

Wtedy $C_\heartsuit$ jest operacją konsekwencji w sensie Tarskiego. *Tezą* systemu $(L_\heartsuit, C_\heartsuit)$ jest każda formuła α taka, że istnieje dowód α z aksjomatów $(L_\heartsuit, C_\heartsuit)$.

Formuły języka $L_\heartsuit$ zapisywane były w *notacji polskiej* (*prefiksowej*): symbol funktora przed symbolami jego argumentów. W *notacji infiksowej* symbol funktora dwuargumentowego występuje między symbolami swoich argumentów (podobnie jak czynimy to np. w zapisach arytmetycznych). Notacja infiksowa wymaga dodania do alfabetu *symboli pomocniczych*: nawiasu lewego (oraz nawiasu prawego). W notacji infiksowej formuła $\S\S\heartsuit_1\heartsuit_2\S\bigstar\heartsuit_2\bigstar\heartsuit_1$ przyjmuje następującą postać: $(\heartsuit_1\S\heartsuit_2)\S((\bigstar\heartsuit_2)\S(\bigstar\heartsuit_1))$, a podane wyżej aksjomaty mają postać:

1. $(\alpha\S\beta)\S((\beta\S\gamma)\S(\alpha\S\gamma))$
2. $((\bigstar\alpha)\S\alpha)\S\alpha$
3. $\alpha\S((\bigstar\alpha)\S\beta)$.

Semantyka języka $L_\heartsuit$ opisana jest w sposób następujący. Niech dane będą dowolne dwa różne przedmioty: 0 oraz 1. *Wartościowaniem* (zmiennych zdaniowych) nazywamy dowolny nieskończony (przeliczalny) ciąg tych przedmiotów. Wartościowania to zatem ciągi o postaci $w = (w_1, w_2, \ldots)$, gdzie każdy element w_i jest równy 0 bądź 1. *Wartość* $val(\alpha, w)$ *formuły* α *przy wartościowaniu* w definiujemy indukcyjnie:

1. $val(\heartsuit_i, w) = w_i$;
2. jeśli $val(\alpha, w) = 0$, to $val(\bigstar\alpha, w) = 1$,
   a jeśli $val(\alpha, w) = 1$, to $val(\bigstar\alpha, w) = 0$;
3. $val(\S\alpha\beta, w) = 0$ tylko wtedy, gdy $val(\alpha, w) = 1$ oraz $val(\beta, w) = 0$; natomiast w pozostałych (trzech) przypadkach $val(\S\alpha\beta, w) = 1$.

Formuła α jest *prawem* (*tautologią*) tego systemu logicznego, gdy $val(\alpha, w) = 1$ dla wszystkich wartościowań w. Formuła β *wynika logicznie* ze zbioru formuł X, gdy: dla wszystkich wartościowań w, jeśli $val(\alpha, w) = 1$ dla każdej $\alpha \in X$, to $val(\beta, w) = 1$. Rozważany system ma własność *rozstrzygalności*: istnieją algorytmy, pozwalające rozstrzygnąć o dowolnej formule, czy jest ona prawem, czy też nie jest. Podstawowy związek między składnią a semantyką wyraża *twierdzenie o pełności*: dla dowolnego $X \subseteq F_\heartsuit$ oraz $\alpha \in F_\heartsuit$ zachodzi równoważność

$\alpha \in C_{\heartsuit}(X)$ (czyli α ma dowód z X) wtedy i tylko wtedy, gdy α wynika logicznie z X.

Gdy w tej równoważności za X weźmiemy pusty zbiór formuł, to otrzymujemy:

α jest tezą (rozważanego systemu) dokładnie wtedy, gdy α jest tautologią (tego systemu).

2 Klasyczna logika pierwszego rzędu FOL

Klasyczna logika pierwszego rzędu (FOL – *first order logic*) to współczesny *elementarz logiczny*. Jego początki sięgają drugiej połowy XIX wieku, a inspiracje do jego rozwoju były natury zarówno matematycznej, jak i filozoficznej oraz lingwistycznej. Poniżej wysłowimy niektóre najważniejsze definicje oraz przytoczymy (bez dowodów) pewne podstawowe twierdzenia dotyczące FOL. Notatka niniejsza nie jest, rzecz jasna, żadnym podręcznikiem FOL; listę wybranych podręczników podano na końcu tekstu.

2.1 Składnia

Niech I, J, K będą dowolnymi zbiorami. Rozpatrzmy alfabet $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \Sigma_5 \cup \Sigma_6$, gdzie:

$\Sigma_1 = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ — *zmienne indywiduowe*,

$\Sigma_2 = \{P_i^{n_i}\}_{i \in I}$ $(n_i \in \mathbb{N})$ — *predykaty*,

$\Sigma_3 = \{f_j^{n_j}\}_{j \in J}$ $(n_j \in \mathbb{N})$ — *symbole funkcyjne*,

$\Sigma_4 = \{a_k\}_{k \in K}$ — *stałe indywiduowe*,

$\Sigma_5 = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \equiv, \forall, \exists\}$ — *stałe logiczne*,

$\Sigma_6 = \{\ ,\ ,\ (\ ,\ )\}$ — *symbole pomocnicze*.

Stosujemy następującą terminologię:

1. $P_i^{n_i}$ nazywamy n_i*-argumentowym predykatem*,
2. $f_j^{n_j}$ nazywamy n_j*-argumentowym symbolem funkcyjnym*,

3. symbol $\forall$ nazywamy *kwantyfikatorem generalnym*,

4. symbol $\exists$ nazywamy *kwantyfikatorem egzystencjalnym*,

5. symbole: $\wedge$ (*koniunkcja*), $\vee$ (*alternatywa*), $\rightarrow$ (*implikacja*), $\neg$ (*negacja*) i $\equiv$ (*równoważność*) to znane słuchaczom funktory prawdziwościowe,

6. symbole pomocnicze to: przecinek oraz lewy i prawy nawias.

Zbiór $\sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ nazwiemy *sygnaturą*. W dalszym ciągu mówić będziemy o pewnej ustalonej sygnaturze σ. Zwykle rozważa się przypadek, gdy $I = J = K = \mathbb{N}$ (= zbiór wszystkich liczb naturalnych).

Wyrażeniem języka FOL nazywamy każdy skończony ciąg symboli alfabetu tego języka. Interesują nas jednak nie dowolne ciągi symboli języka FOL, lecz jedynie niektóre, o budowie składniowej dopuszczającej sensowne interpretacje, a mianowicie termy oraz formuły.

Definicja *termu* języka FOL jest indukcyjna:

1. wszystkie zmienne indywiduowe x_n oraz wszystkie stałe indywiduowe a_k są termami;

2. jeśli $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są dowolnymi termami, to wyrażenie $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ jest termem;

3. nie ma innych termów (języka FOL) prócz zmiennych indywiduowych, stałych indywiduowych oraz tych termów, które można skonstruować wedle reguły 2.

Termy, w których nie występują żadne zmienne nazywamy *termami bazowymi*.

Formułą atomową języka FOL nazywamy każde wyrażenie tego języka o postaci $P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_i}$ są dowolnymi termami. Definicja *formuły* języka FOL jest indukcyjna:

1. każda formuła atomowa jest formułą;

2. jeśli α jest dowolną formułą, to wyrażenia $\neg(\alpha)$, $\forall x_n\ (\alpha)$, $\exists x_n\ (\alpha)$ są formułami;

3. jeśli α i β są dowolnymi formułami, to wyrażenia $(\alpha) \wedge (\beta)$, $(\alpha) \vee (\beta)$, $(\alpha) \rightarrow (\beta)$, $(\alpha) \equiv (\beta)$ są formułami;

4. nie ma innych formuł (języka FOL) prócz tych, które można utworzyć wedle reguł 1–3.

W praktyce stosujemy zwykle pewne konwencje, które pozwalają pomijać niektóre nawiasy, zwiększając czytelność – zwłaszcza długich – formuł.

Wyrażenie α w dowolnej formule o postaci $\forall x_n\ (\alpha)$ lub o postaci $\exists x_n\ (\alpha)$ nazywamy *zasięgiem* odpowiedniego kwantyfikatora.

Zmienna x_n występująca na danym miejscu w formule α jest *na tym miejscu związana*, jeżeli jest ona podpisana pod którymś z kwantyfikatorów lub też znajduje się w zasięgu jakiegoś kwantyfikatora, pod którym podpisana jest również zmienna x_n. Jeżeli zmienna x_n, występująca na danym miejscu w formule α, nie jest na tym miejscu związana, to mówimy, że jest ona *na tym miejscu wolna w* α. Mówimy, że x_n jest *zmienną wolną w* α wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej na jednym miejscu zmienna ta jest wolna w α.

Mówimy, że term t jest *podstawialny* za zmienną x_i do formuły α wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna x_i nie znajduje się w α jako zmienna wolna w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego którąś ze zmiennych występujących w t. Jeśli term t jest podstawialny za x_i do α, to żadna zmienna występująca w t nie stanie się związana po podstawieniu t za wszystkie wolne wystąpienia x_i w formule α. W szczególności, zmienna x_j jest podstawialna za zmienną x_i w α, jeżeli po podstawieniu x_j w miejscach wolnych wystąpień x_i w α, zmienna x_j nie stanie się na tych miejscach związana w α. Tak więc, zmienna x_j jest podstawialna za zmienną x_i do formuły α wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna x_j nie znajduje się w α jako zmienna wolna w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego zmienną x_i.

Formuły nie zawierające żadnych zmiennych wolnych nazywamy *zdaniami* (języka FOL).

Definicja operacji $S(t, x, A)$ *podstawiania termu* t *za zmienną* x_i (w dowolnym termie A lub formule A języka FOL) ma postać indukcyjną (poniżej t jest termem, x_i jest zmienną, a_j jest stałą, α i β są formułami, a reszta oznaczeń jest oczywista):

1. $S(t, x_i, x_j)$ jest termem x_j, gdy $i \neq j$
2. $S(t, x_i, x_j)$ jest termem t, gdy $i = j$
3. $S(t, x_i, a_j)$ jest termem a_j
4. $S(t, x_i, f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j}))$ jest termem $f_j^{n_j}(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_{n_j}))$
5. $S(t, x_i, P_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j}))$ jest formułą $P_j^{n_j}(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_{n_j}))$
6. $S(t, x_i, \neg(\alpha))$ jest formułą $\neg S(t, x_i, \alpha)$
7. $S(t, x_i, \forall x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ S(t, x_i, \alpha)$, gdy $i \neq j$
8. $S(t, x_i, \forall x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ (\alpha)$, gdy $i = j$

9. $S(t, x_i, \exists x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\exists x_j\ S(t, x_i, \alpha)$, gdy $i \neq j$

10. $S(t, x_i, \exists x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\exists x_j\ (\alpha)$, gdy $i = j$

11. $S(t, x_i, \alpha \wedge \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \wedge S(t, x_i, \beta)$

12. $S(t, x_i, \alpha \vee \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \vee S(t, x_i, \beta)$

13. $S(t, x_i, \alpha \rightarrow \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \rightarrow S(t, x_i, \beta)$

14. $S(t, x_i, \alpha \equiv \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \equiv S(t, x_i, \beta)$.

2.2 Semantyka

W odróżnieniu od semantyki klasycznego rachunku zdań, którego semantyka jest stosunkowo uboga (dwa przedmioty i dwadzieścia funkcji prawdziwościowych), semantyka FOL jest znacznie bogatsza. Rozważa się w niej całkiem dowolne uniwersa (zbiory) całkiem dowolnych przedmiotów, które mogą być wzajem powiązane całkiem dowolnymi relacjami.

Nazwiemy *interpretacją języka o sygnaturze* σ dowolny układ $(M, \sigma, \triangle)$, gdzie M jest niepustym zbiorem, a $\triangle$ funkcją (*funkcją denotacji*) o dziedzinie σ, która przyporządkowuje:

1. każdej stałej indywiduowej a_k element

$$\triangle(a_k) \in M;$$

2. każdemu predykatowi $P_i^{n_i}$ relację n_i-argumentową

$$\triangle(P_i^{n_i}) \subseteq M^{n_i};$$

3. każdemu symbolowi funkcyjnemu $f_j^{n_j}$ funkcję n_j-argumentową

$$\triangle(f_j^{n_j}) : M^{n_j} \rightarrow M.$$

Wtedy *strukturami relacyjnymi sygnatury* σ są dowolne układy $(M, \triangle[\sigma])$, gdzie $\triangle$ jest funkcją denotacji, a $\triangle[\sigma]$ oznacza ciąg (indeksowany elementami zbioru $I \cup J \cup K$) wszystkich wartości funkcji σ. Jeśli $\mathfrak{M} = (M, \triangle[\sigma])$ jest strukturą relacyjną, to M nazywamy *uniwersum* $\mathfrak{M}$.

Dla $\mathfrak{M} = (M, \triangle[\sigma])$ jest czasem wygodnie używać następujących oznaczeń:

1. $|\mathfrak{M}|$ dla oznaczenia uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, czyli dla oznaczenia zbioru M;

2. $\triangle^{\mathfrak{M}}$ dla oznaczenia funkcji denotacji struktury $\mathfrak{M}$.

Wartościowaniem zmiennych w uniwersum M nazywamy dowolny nieskończony przeliczalny ciąg $w = (w_n)$ elementów zbioru M. Gdy

$$w = (w_n) = (w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots)$$

jest wartościowaniem w M oraz $m \in M$, to przez w_i^m oznaczamy wartościowanie:

$$(w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, m, w_{i+1}, \ldots).$$

Jeśli t jest termem sygnatury σ, a $(M, \triangle[\sigma])$ strukturą relacyjną sygnatury σ oraz $w = (w_i)$ jest wartościowaniem zmiennych w M, to *wartość termu* t *w strukturze* $(M, \triangle[\sigma])$ *przy wartościowaniu* w, oznaczana przez $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t)$ określona jest indukcyjnie:

1. gdy t jest zmienną x_i, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = w_i$;
2. gdy t jest stałą a_k, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(a_k)$;
3. gdy t jest termem złożonym postaci $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są termami, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(f_j^{n_j})(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_{n_j}))$.

Można pokazać, że wartość termu przy danym wartościowaniu zmiennych zależy jedynie od wartości nadanych przy tym wartościowaniu zmiennym występującym w rozważanym termie.

Niech $\mathfrak{M} = (M, \triangle[\sigma])$ będzie strukturą relacyjną sygnatury σ, w wartościowaniem w M, a α formułą sygnatury σ. Definicja relacji $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ *spełniania formuły* α *w strukturze* $\mathfrak{M}$ *przez wartościowanie* w ma następującą postać indukcyjną:

1. $\mathfrak{M} \models_w P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi
$$\triangle(P_i^{n_i})(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_{n_i}));$$
2. $\mathfrak{M} \models_w \alpha \wedge \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
3. $\mathfrak{M} \models_w \alpha \vee \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
4. $\mathfrak{M} \models_w \alpha \rightarrow \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
5. $\mathfrak{M} \models_w \alpha \equiv \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy bądź $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$, bądź nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ ani nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \beta$;

6. $\mathfrak{M} \models_w \neg\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$;

7. $\mathfrak{M} \models_w \forall x_i\ \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla każdego $m \in M$;

8. $\mathfrak{M} \models_w \exists x_i\ \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla pewnego $m \in M$.

Jeśli $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla każdego wartościowania w, to mówimy, że formuła α jest *prawdziwa w* $\mathfrak{M}$ i piszemy wtedy $\mathfrak{M} \models \alpha$. Piszemy $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models \alpha$. Mówimy, że formuła α jest *fałszywa* w $\mathfrak{M}$, gdy nie jest ona prawdziwa w $\mathfrak{M}$.

Prawem (*Tautologią*) FOL (sygnatury σ) nazywamy każdą formułę (sygnatury σ), która jest prawdziwa we wszystkich strukturach relacyjnych (sygnatury σ).

Jeśli $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich α ze zbioru X, to mówimy, że $\mathfrak{M}$ jest *modelem* X i piszemy $\mathfrak{M} \models X$. Mówimy, że α *wynika logicznie* z X wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem $\{\alpha\}$. Piszemy wtedy $X \models_{fol} \alpha$. Ogólniej, mówimy, że ze zbioru X *wynika logicznie* (na gruncie FOL) zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem zbioru Y. Piszemy wtedy $X \models_{fol} Y$. Jeśli nie zachodzi $X \models_{fol} Y$, to piszemy $X \not\models_{fol} Y$. Podobnie, jeśli nie zachodzi $X \models_{fol} \alpha$, to piszemy $X \not\models_{fol} \alpha$.

Można pokazać, że:

1. wartość termu w ustalonej interpretacji zależy tylko od wartościowań zmiennych wolnych tego termu;

2. spełnianie formuły w ustalonej interpretacji zależy jedynie od wartościowań zmiennych wolnych tej formuły (w szczególności zatem zdania – formuły bez zmiennych wolnych – albo spełnione są w danej interpretacji przez wszystkie wartościowania, albo nie sa spełnione przez żadne wartościowanie).

Definicje powyższych pojęć semantycznych pochodzą od Alfreda Tarskiego. Są formalizacją klasycznego pojęcia prawdy, wywodzącego się od Arystotelesa. Rozważa się również inne propozycje definiowania prawdziwości (koherencyjna, pragmatyczna), ale dominujące jest przedstawione wyżej ujęcie.

Warto może przypomnieć, że Tarski pokazał również, iż nie jest możliwe podanie trafnej merytorycznie oraz poprawnej formalnie definicji pojęcia prawdy dla języków etnicznych (języka naturalnego, potocznego). Każdy język etniczny zawiera swój własny *metajęzyk*. Jest to konsekwencją *uniwersalności* języków etnicznych: w każdym z nich można mówić o nich samych (w każdym takim języku można mówić o jego wyrażeniach). Ma to jednak również i tę konsekwencję, że w języku etnicznym sformułować można *antynomię kłamcy*, co – jak właśnie wykazał Tarski – blokuje możliwość podania dla takiego języka definicji prawdy spełniającej wymogi merytorycznej trafności i formalnej poprawności.

2.3 Operacje konsekwencji

Współcześnie rozważa się wiele różnych operacji konsekwencji w języku FOL. Do najbardziej popularnych należą:

1. konsekwencje *aksjomatyczne* (w stylu Hilberta)
2. konsekwencje bazujące na *dedukcji naturalnej* (w stylu Gentzena lub Jaśkowskiego)
3. konsekwencje bazujące na *tablicach analitycznych* (w stylu Smullyana)
4. konsekwencje bazujące na *rezolucji* (wraz z procedurami *unifikacji*)
5. konsekwencje bazujące na *rachunkach sekwentów* Gentzena.

Wszystkie wymienione operacje konsekwencji są *równoważne*, w tym sensie, że wyznaczone przez nie zbiory tez pokrywają się. W zależności od celu, stosuje się w praktyce tę lub inną operację konsekwencji. Niektóre zalecają się szczególnie ze względów dydaktycznych (jak np. dedukcja naturalna), inne mają pożyteczne zastosowania w automatycznym dowodzeniu twierdzeń (jak np. rezolucja lub tablice analityczne).

Dla przykładu, podamy (bardzo tradycyjną) konsekwencję aksjomatyczną dla FOL. Niech α, β i γ będą dowolnymi formułami języka FOL. *Schematami aksjomatów* dla FOL są wszystkie formuły następującej postaci:

- (A1) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
- (A2) $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$
- (A3) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- (A4) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
- (A5) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
- (A6) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$
- (A7) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
- (A8) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
- (A9) $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \beta) \to ((\alpha \vee \gamma) \to \beta))$
- (A10) $(\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta)$

- (A11) $(\alpha \equiv \beta) \to (\beta \to \alpha)$
- (A12) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta))$
- (A13) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
- (A14) $\forall x_n\ \alpha \to S(t, x_n, \alpha)$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A15) $S(t, x_n, \alpha) \to \exists x_n\ \alpha$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A16) $\forall x_n\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x_n\ \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w α
- (A17) $\forall x_n\ (\alpha \to \beta) \to (\exists x_n\ \alpha \to \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w β.

Można sprawdzić, że wszystkie te schematy są tautologiczne – są prawami FOL.

Podobnie jak aksjomaty, również reguły wnioskowania dobierać można na różnorakie sposoby. W tym wykładzie przyjmiemy, że *regułami pierwotnymi* (aksjomatycznego ujęcia) FOL są:

Reguła odrywania:

$$\text{(RO)} \quad \frac{\alpha \to \beta,\ \ \alpha}{\beta}$$

Reguła generalizacji:

$$\text{(RG)} \quad \frac{\alpha}{\forall x_n\ \alpha}.$$

Zauważmy, że szczególnymi przypadkami schematów (A14) oraz (A15) są, odpowiednio:

- (A14*) $\forall x_n\ \alpha \to \alpha$
- (A15*) $\alpha \to \exists x_n\ \alpha$.

Jest tak oczywiście dlatego, że dowolna zmienna x_n jest podstawialna sama za siebie w dowolnej formule.

Mówimy, że:

- Formuła α jest *tezą* FOL wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, którego ostatnim elementem jest formuła α (tj. α jest formułą β_n), a każdy z elementów tego ciągu jest albo aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A17), albo powstaje ze wcześniejszych wyrazów tego ciągu jako wniosek reguły odrywania bądź reguły generalizacji. Każdy taki ciąg $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ nazywamy *dowodem* formuły α.

- Formuła α jest *wyprowadzalna* w FOL ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, którego ostatnim elementem jest formuła α (tj. α jest formułą β_n), a każdy z elementów tego ciągu jest albo elementem zbioru X, albo aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A17), albo powstaje ze wcześniejszych wyrazów tego ciągu jako wniosek reguły odrywania bądź reguły generalizacji. Jeśli α jest wyprowadzalna z X, to piszemy $X \vdash_{fol} \alpha$. W przeciwnym przypadku piszemy $X \nvdash_{fol} \alpha$.

- Zbiór formuł Y jest *wyprowadzalny* ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash_{fol} \alpha$ dla każdej formuły α ze zbioru Y. Jeśli Y jest wyprowadzalny z X, to piszemy $X \vdash_{fol} Y$. W przeciwnym przypadku piszemy $X \nvdash_{fol} Y$.

- Reguła $\mathcal{R}$ jest *wyprowadzalna* (*wtórna*) w FOL, jeśli $X \vdash_{fol} \alpha$ dla każdego sekwentu (X, α) należącego do $\mathcal{R}$.

Operacja C_{fol} *konsekwencji aksjomatycznej* w FOL jest zdefiniowana następująco dla dowolnego zbioru formuł X języka FOL:

$$C_{fol}(X) = \{\alpha : X \vdash_{fol} \alpha\}.$$

Tak zdefiniowana operacja C_{fol} spełnia warunki z definicji ogólnej operacji konsekwencji.

Następujące reguły są wyprowadzalne w FOL:

- (R14)
$$\frac{\forall x_n\ \alpha}{S(t, x_n, \alpha)},$$
o ile term t jest podstawialny za x_n w α.

- (R15)
$$\frac{S(t, x_n, \alpha)}{\exists x_n\ \alpha},$$
o ile term t jest podstawialny za x_n w α.

- (R16)
$$\frac{\forall x_n\ (\alpha \to \beta)}{\alpha \to \forall x_n\ \beta},$$
o ile x_n nie jest wolna w α.

- (R17)
$$\frac{\forall x_n\ (\alpha \to \beta)}{\exists x_n\ \alpha \to \beta},$$
o ile x_n nie jest wolna w β.

- Reguła opuszczania kwantyfikatora generalnego RO$\forall$:
$$\frac{\alpha \to \forall x_n\ \beta}{\alpha \to \beta}.$$

- Reguła opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego RO$\exists$:
$$\frac{\exists x_n\ \alpha \to \beta}{\alpha \to \beta}.$$

- Reguła dołączania kwantyfikatora generalnego RD$\forall$:
$$\frac{\alpha \to \beta}{\alpha \to \forall x_n\ \beta},$$
o ile x_n nie jest wolna w α.

- Reguła dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego RD$\exists$:
$$\frac{\alpha \to \beta}{\exists x_n\ \alpha \to \beta},$$
o ile x_n nie jest wolna w β.

Można pokazać, że formuła α jest wyprowadzalna ze zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, którego ostatnim elementem jest formuła α (tj. α jest formułą β_n), a każdy z elementów tego ciągu jest albo elementem zbioru X, albo tezą FOL, albo powstaje ze wcześniejszych wyrazów tego ciągu jako wniosek reguły odrywania bądź reguły generalizacji bądź jakiejkolwiek reguły wyprowadzalnej w FOL.

Zauważmy, że z każdej tezy klasycznego rachunku zdań można otrzymać tezę FOL, poprzez konsekwentne zastąpienie zmiennych zdaniowych dowolnymi formułami języka FOL. Czasami mówi się krótko, choć nie całkiem precyzyjnie (gdyż mówimy o tezach w różnych językach), że każda teza klasycznego rachunku zdań jest także tezą FOL.

Następujące formuły są tezami FOL, dla dowolnych formuł α oraz β (stosujemy tu zwyczajową konwencję – piszemy np. x, y, z zamiast x_n, x_m, x_k, itp. gdy nie prowadzi to do nieporozumień; zapis $\alpha(x/t)$ oznacza wynik podstawienia termu t za zmienną x w formule α):

1. $\forall x\ \alpha \to \alpha$.
2. $\forall x\ \alpha \to \alpha(x/t)$, o ile term t jest podstawialny za x w α.
3. $\alpha \to \exists x\ \alpha$.
4. $\alpha(x/t) \to \exists x\ \alpha$, o ile term t jest podstawialny za x w α.
5. $\forall x\ \alpha \to \exists x\ \alpha$.
6. $\forall x\ \alpha \equiv \forall y\ \alpha(x/y)$, o ile zmienna y nie jest wolna w α oraz y jest podstawialna za zmienną x w α.
7. $\exists x\ \alpha \equiv \exists y\ \alpha(x/y)$, o ile zmienna y nie jest wolna w α oraz y jest podstawialna za zmienną x w α.
8. $\forall x\ \alpha \equiv \alpha$, o ile α nie zawiera x jako zmiennej wolnej.
9. $\exists x\ \alpha \equiv \alpha$, o ile α nie zawiera x jako zmiennej wolnej.
10. $\forall x \forall y\ \alpha \equiv \forall y \forall x\ \alpha$.
11. $\exists x \exists y\ \alpha \equiv \exists y \exists x\ \alpha$.
12. $\exists x \forall y\ \alpha \to \forall y \exists x\ \alpha$.
13. $\forall x \forall y\ \alpha \to \forall x\ \alpha(x/y)$, o ile x jest podstawialna za y w α.
14. $\exists x\ \alpha(x/y) \to \exists x \exists y\ \alpha$, o ile x jest podstawialna za y w α.
15. $\neg \forall x\ \alpha \equiv \exists x\ \neg \alpha$.
16. $\neg \exists x\ \alpha \equiv \forall x\ \neg \alpha$.
17. $\forall x\ \alpha \equiv \neg \exists x\ \neg \alpha$.
18. $\exists x\ \alpha \equiv \neg \forall x\ \neg \alpha$.
19. $(\forall x\ (\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$.
20. $(\forall x\ (\alpha \to \beta) \wedge \alpha(x/t)) \to \beta(x/t)$, o ile t jest podstawialny za x do α i do β.
21. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \beta)$.
22. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \forall x\ \beta)$.
23. $(\forall x\ (\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \exists x\ \beta$.

24. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \exists x\ \beta)$.

25. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\exists x\ \alpha \to \exists x\ \beta)$.

26. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \to \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.

27. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \equiv (\alpha \to \forall x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.

28. $\exists x\ (\alpha \to \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \to \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.

29. $\exists x\ (\alpha \to \beta) \equiv (\alpha \to \exists x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.

30. $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \wedge \forall x\ \beta)$.

31. $\exists x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta)$.

32. $(\forall x\ \alpha \vee \forall x\ \beta) \to (\forall x\ \alpha \vee \forall x\ \beta)$.

33. $\exists x\ (\alpha \wedge \beta) \to (\exists x\ \alpha \wedge \exists x\ \beta)$.

34. $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \wedge \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.

35. $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\alpha \wedge \forall x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.

36. $\forall x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.

37. $\forall x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\alpha \vee \forall x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.

38. $\exists x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \wedge \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.

39. $\exists x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\alpha \wedge \exists x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.

40. $\exists x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.

41. $\exists x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\alpha \vee \exists x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.

42. $\forall x\ (\alpha \equiv \beta) \to (\forall x\ (\alpha \to \beta) \wedge \forall x\ (\beta \to \alpha))$.

43. $\forall x\ (\alpha \equiv \beta) \to (\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta)$.

44. $\forall x\ (\alpha \equiv \beta) \to (\exists x\ \alpha \equiv \exists x\ \beta)$.

Podamy, dla przykładu, dowód jednej z tez. Stosujemy przy tym zwykle używaną konwencję: kroki dowodowe są numerowane z lewej strony, komentarze wskazujące, jak powstaje dany krok dowodowy podane są z prawej strony. Komentarz o postaci: (An) α/β oznacza, że w schemacie aksjomatów o numerze n

piszemy formułę β w miejsce występującej w nim formuły α. Warto może pamiętać, że każdy dowód ma także strukturę *drzewa*, w którego korzeniu znajduje się dowodzona formuła, którego liście są aksjomatami, a pozostałe wierzchołki odpowiadają krokom dowodowym.

DOWÓD TEZY 5. $\forall x\ \alpha \to \exists x\ \alpha$.

1.	$\forall x\ \alpha \to \alpha$	(A14*)
2.	$\alpha \to \exists x\ \alpha$	(A15*)
3.	$(\forall x\ \alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \exists x\ \alpha) \to (\forall x\ \alpha \to \exists x\ \alpha))$	(A1): $\alpha/\forall x\ \alpha$, β/α, $\gamma/\exists x\ \alpha$
4.	$(\alpha \to \exists x\ \alpha) \to (\forall x\ \alpha \to \exists x\ \alpha)$	RO: 3, 1
5.	$\forall x\ \alpha \to \exists x\ \alpha$	RO: 4, 2.

Dowody w aksjomatycznym ujęciu FOL mogą być kłopotliwe dla osób bez należytej wprawy (od jakich aksjomatów zacząć dowód?). Ułatwieniem jest m.in. możliwość korzystania z twierdzenia o dedukcji w wersji syntaktycznej (patrz niżej).

2.4 Kilka własności

Mówimy, że zbiór formuł X jest (syntaktycznie) *niesprzeczny* wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{fol} \alpha$ oraz $X \vdash_{fol} \neg\alpha$. W przeciwnym przypadku mówimy, że X jest (syntaktycznie) *sprzeczny*.

Inną ważną własnością metalogiczną jest zupełność. Mówimy, że zbiór formuł języka FOL (o sygnaturze σ) jest *zupełny* (ze względu na tę sygnaturę) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zdania α (w języku sygnatury σ) bądź α jest elementem $C_{fol}(X)$, bądź $\neg\alpha$ jest elementem $C_{fol}(X)$.

Punkty stałe operacji C_{fol}, czyli takie zbiory X formuł, dla których $C_{fol}(X) = X$ nazywamy *teoriami* lub *systemami dedukcyjnymi*.

Do najważniejszych *metatwierdzeń* dotyczących aksjomatycznego (w stylu Hilberta) ujęcia FOL należą m.in.:

1. *Lemat Lindenbauma*. Jeśli X jest zbiorem niesprzecznym, to istnieje niesprzeczna i zupełna teoria Y taka, że $X \subseteq Y$.

2. *Twierdzenie o pełności*. Formuła α jest wyprowadzalna ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy α wynika logicznie z X. W szczególności, tezy FOL pokrywają się z tautologiami FOL.

3. *Twierdzenie o istnieniu modelu*. Zbiór formuł jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy ma model.

4. *Twierdzenie o zwartości (w wersji semantycznej)*. Zbiór formuł X ma model wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór ma model. Tak więc, X nie ma modelu dokładnie wtedy, gdy co najmniej jeden jego skończony podzbiór nie ma modelu.

5. *Twierdzenie o niesprzeczności*. Zbiór wszystkich tez FOL jest niesprzeczny.

6. *Twierdzenie Löwenheima-Skolema*. Jeśli X jest niesprzecznym zbiorem formuł, to X ma model *przeliczalny* (czyli o uniwersum równolicznym ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych).

7. *Twierdzenie o dedukcji wprost (wersja syntaktyczna)*. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β, przy założeniu, że α jest zdaniem (formułą bez zmiennych wolnych) języka FOL zachodzi następująca równoważność:

   - $X \cup \{\alpha\} \vdash_{fol} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash_{fol} \alpha \to \beta$.

8. *Twierdzenie o dedukcji nie wprost (wersja syntaktyczna)*. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α, przy założeniu, że α jest zdaniem (formułą bez zmiennych wolnych) języka FOL zachodzą następujące równoważności:

   - (1) $X \vdash_{fol} \neg\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\alpha\} \vdash_{fol} \{\beta, \neg\beta\}$.
   - (2) $X \vdash_{fol} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{fol} \{\beta, \neg\beta\}$.

9. *Twierdzenie o dedukcji wprost (wersja semantyczna)*. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β zachodzi następująca równoważność:

$$X \cup \{\alpha\} \models_{fol} \beta \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } X \models_{fol} \alpha \to \beta.$$

10. *Twierdzenie o dedukcji nie wprost (wersja semantyczna)*. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β zachodzą następujące równoważności:

    - (a) $X \cup \{\alpha\} \models_{fol} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{fol} \neg\alpha$.
    - (b) $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{fol} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{fol} \alpha$.

11. *Twierdzenie Churcha*. Zbiór wszystkich praw FOL nie jest rozstrzygalny.

Podręczniki podają dziesiątki dalszych twierdzeń, ustalających własności FOL – nie wymieniamy ich tutaj, gdyż w wielu przypadkach dla ich sformułowania potrzeba najpierw wprowadzić szereg dodatkowych pojęć. Zainteresowani słuchacze zechcą zwrócić uwagę np. na twierdzenia: Herbranda, Betha, Craiga, twierdzenie o prefiksowych postaciach normalnych, twierdzenie o neutralności logiki wobec stałych indywiduowych, predykatów oraz symboli funkcyjnych – każde z nich wyraża fundamentalne własności FOL.

Niektóre zestawy powyższych własności charakteryzują jednoznacznie logikę FOL, w tym sensie, że jest ona maksymalną logiką o tychże własnościach. Dla przykładu, I twierdzenie Lindströma ustala, że każda logika, która ma własność zwartości i w której zachodzi twierdzenie Löwenheima-Skolema jest równoważna z FOL. Trzeba oczywiście nadać tu precyzyjny sens takim terminom jak *równoważność* logik (i kilku innym). Powiemy o tym więcej na trzecim wykładzie.

2.5 Teorie elementarne

W języku FOL formułować można tzw. *teorie elementarne*. Gdy wyróżnimy pewien zbiór *stałych pozalogicznych* (predykatów, symboli funkcyjnych, stałych indywidualnych) S oraz zbiór Ax zdań, zwanych *aksjomatami* rozważanej teorii elementarnej T, to sama formalna definicja T jest następująca.

Teorią elementarną w języku FOL o sygnaturze S oraz zbiorze aksjomatów Ax nazywamy zbiór wszystkich formuł wyprowadzalnych na gruncie FOL ze zbioru aksjomatów Ax. Tak więc, T jest teorią elementarną, gdy

$$T = \{\alpha : Ax \vdash_{fol} \alpha\}.$$

Jeśli T jest teorią elementarną, to $C_{fol}(T) = T$, co wynika wprost z powyższej definicji. Przypomnijmy, że w przypadku dowolnego operatora konsekwencji C, *teoriami* (tego operatora) nazywamy jego punkty stałe, tj. takie zbiory X, dla których $X = C(X)$.

Dla przykładu, ważnymi teoriami elementarnymi są:

1. teoria mnogości Zermelo-Fraenkla (z aksjomatem wyboru) ZFC
2. arytmetyka Peana PA
3. teoria algebr Boole'a
4. teoria grup
5. teoria gęstych liniowych porządków bez elementu pierwszego i ostatniego
6. geometria elementarna.

2.5.1 Teoria mnogości Zermelo-Fraenkla

Jest to teoria w języku FOL z identycznością. Jedyną stałą pozalogiczną tej teorii jest dwuargumentowy predykat $\in$. Formułę $x \in y$ czytamy: x jest elementem y.
AKSJOMATY TEORII MNOGOŚCI ZF.
Aksjomat ekstensjonalności:

$\forall x \forall y\ (\forall z\ (z \in x \equiv z \in y) \rightarrow x = y)$

Ten aksjomat stwierdza, że każdy zbiór jest jednoznacznie wyznaczony poprzez swoje elementy.
Aksjomat pary:

$\forall x \forall y \exists z \forall u\ (u \in z \equiv u = x \vee u = y)$

To aksjomat gwarantujący istnienie pary nieuporządkowanej.
Aksjomat sumy:

$\forall x \exists y \forall z\ (z \in y \equiv \exists u\ (z \in u \wedge u \in x))$

Aksjomat ten gwarantuje istnienie sumy dowolnej rodziny zbiorów.
Aksjomat zbioru potęgowego:

$\forall x \exists y \forall z\ (z \in y \equiv \forall u (u \in z \rightarrow u \in x))$

Na mocy tego aksjomatu, dla dowolnego zbioru istnieje zbiór złożony dokładnie ze wszystkich jego podzbiorów.
Schemat wyróżniania:

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y \exists u\ (u \in z \equiv u \in y \wedge \varphi(u, x_1, x_2, \ldots, x_n))$

gdzie φ jest formułą języka teorii mnogości ZF taką, że z nie jest zmienną wolną w φ, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zmiennymi wolnymi formuły φ innymi niż u.

Schemat wyróżniania pozwala z elementów danego wprzódy zbioru utworzyć jego podzbiór, złożony z tych elementów, które mają jakąś własność, wyrażalną w języku (pierwszego rzędu) teorii mnogości.

Mamy tu do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale właśnie ze *schematem* nieskończenie wielu aksjomatów.
Aksjomat nieskończoności:

$\exists x\ (\exists y\ (y \in x \wedge \neg \exists z\ (z \in y)) \wedge \forall y\ (y \in x \rightarrow \forall z (\forall u\ (u \in z \equiv u = y) \rightarrow z \in x)))$

Ten aksjomat stwierdza istnienie (co najmniej jednego) zbioru nieskończonego. Uwaga: to jedyny aksjomat egzystencjalny w tej teorii mnogości.
Schemat zastępowania:

$\forall u (\forall x \forall y \forall z\ (x \in u \wedge \varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \exists w \forall v\ (v \in w \equiv \exists x\ (x \in u \wedge \varphi(x, v))))$

Schemat ten gwarantuje, intuicyjnie mówiąc, że obraz dowolnego zbioru względem jakiejkolwiek funkcji (opisywalnej formułą języka teorii mnogości) także jest zbiorem.

Tu również mamy do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale ze *schematem* nieskończenie wielu aksjomatów.
Aksjomat ufundowania:

$\forall x(\exists u\ (u \in x) \to \exists y(y \in x \wedge \forall z\ (z \in y \to \neg z \in x)))$

Aksjomat ufundowania wyklucza istnienie nieskończonych $\in$-zstępujących ciągów zbiorów, tj. takich ciągów $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$, że:

$$x_2 \in x_1,\ x_3 \in x_2,\ x_4 \in x_3, \ldots$$

Gdy do tego systemu dołączyć *Aksjomat wyboru*:

$\forall x((\forall y\ (y \in x \to \exists z\ (z \in y)) \wedge \forall y \forall u\ (y \in x \wedge u \in x \to y = u \vee \neg \exists v\ (v \in y \wedge v \in u))) \to \exists w(\forall y\ (y \in x \to \exists z\ (z \in y \wedge z \in w \wedge \forall v\ (v \in y \wedge v \in w \to v = z)))))$

to otrzymamy system teorii mnogości nazywany ZFC.
Uwaga. Do aksjomatyki teorii ZF należą także *aksjomaty dla identyczności*:

- $\forall x\ (x = x)$
- $\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \wedge y = z \to x = z)$
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \wedge x \in z \to y \in z))$
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \wedge z \in x \to z \in y))$.

Uwaga. Używane tu (np. w schematach wyróżniania i zastępowania) terminy: *nieskończony* i *przeliczalny* należą do *metajęzyka*.

Fundamentalne znaczenie teorii mnogości dla współczesnej matematyki polega m.in. na tym, że wszystkie konstrukcje matematyczne wyrazić można za pomocą pojęcia zbioru oraz relacji należenia elementu do zbioru.

* * *

Oczywistym wymogiem, któremu sprostać powinna teoria jest jej niesprzeczność. Teorie sprzeczne nie są interesujące (z formalnego punktu widzenia), gdyż wszystko (każda formuła języka FOL) daje się w nich udowodnić. Na mocy twierdzenia o pełności, teoria jest niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy ma model. Jednak czysto *syntaktyczne* dowody niesprzeczności teorii są, w ogólności, trudne do uzyskania. Stosuje się w nich np. takie techniki, jak: metoda interpretacji syntaktycznej, metoda relatywizacji kwantyfikatorów. Odnotujmy kilka faktów dotyczących niesprzeczności:

1. Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $C_{fol}(X)$ jest niesprzeczny.

2. Podzbiór zbioru niesprzecznego jest niesprzeczny. Nadzbiór zbioru sprzecznego jest sprzeczny.

3. Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła α taka, że α nie jest elementem zbioru $C_{fol}(X)$.

4. Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór jest niesprzeczny. W konsekwencji, zbiór X jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden jego skończony podzbiór jest sprzeczny. [To także jedna z postaci twierdzenia o zwartości.]

5. Jeżeli $(X_1, X_2, X_3, \ldots)$ jest nieskończonym ciągiem niesprzecznych zbiorów formuł oraz
$$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots,$$
to zbiór $\bigcup_i X_i$ jest niesprzeczny.

6. Jeśli α jest zdaniem (nie zawiera zmiennych wolnych) oraz $\neg\alpha$ nie należy do zbioru $C_{fol}(X)$, to zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest niesprzeczny.

Gdy X jest zbiorem aksjomatów jakiejś teorii T (w języku o określonej sygnaturze), a α zdaniem (tego języka) takim, że ani α, ani $\neg\alpha$ nie należy do $C_{fol}(X)$, to mówimy, że α jest zdaniem *nierozstrzygalnym* na gruncie aksjomatów X (lub: w teorii T). Jeśli teoria jest zupełna, to nie istnieją w niej zdania nierozstrzygalne. Oznacza to, że w teorii zupełnej każdy problem sformułowany w jej języku znajduje rozstrzygnięcie na gruncie tej teorii.

Większość ważnych, interesujących teorii matematycznych to teorie, które nie są zupełne. Należy przy tym pamiętać, że nie zawsze zupełność jest pożądaną własnością teorii: dla przykładu teoria algebr Boole'a (niezupełna) została zbudowana z myślą o wielu bardzo różnych interpretacjach. Zupełność jest natomiast własnością pożądaną, gdy budujemy teorię z myślą o jakiejś jednej, ustalonej interpretacji (jak np. w przypadku arytmetyki Peana). Jednak właśnie w przypadku arytmetyki Peana (oraz, ogólniej, w przypadku wszelkich teorii zawierających stosowną część tej arytmetyki) mamy do czynienia z brakiem zupełności.

Teorią zupełną jest natomiast wymieniona powyżej elementarna teoria liniowego gęstego porządku bez elementu pierwszego i ostatniego. Fakt ten może zostać udowodniony przy pomocy techniki zwanej *eliminacją kwantyfikatorów*. Oto kilka faktów dotyczących pojęcia zupełności (pomijamy wszędzie określenie: „ze względu na dany język"):

1. Zbiór X jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{fol}(X)$ jest zupełny.

2. Zbiór X jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej formuły α nie należącej do $C_{fol}(X)$ zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest sprzeczny.

2.6 Pożytki z FOL

Wymogiem, który stawia się współczesnym teoriom matematycznym jest przedstawienie ich w postaci *aksjomatycznej*. Każda teoria matematyczna ma pewien zestaw pojęć *pierwotnych*, charakteryzowanych przez *aksjomaty*. Pamiętamy, że teorie, które formułujemy w języku FOL nazywamy *elementarnymi*. Tak się akurat obecnie składa, że bodaj wszystkie rozważania matematyczne można w ostatecznym rozrachunku sprowadzić do *teorii mnogości*. Najczęściej używana jest teoria mnogości Zermelo-Fraenkla (z aksjomatem wyboru), która jest teorią elementarną. Tak więc, pierwszy pożytek z FOL jest wyraźnie widoczny: można w jej języku sformułować teorię mnogości, która z kolei stanowi podstawę dla prawie wszystkich rozważań matematycznych.

Dalej, FOL ma wiele własności, które uważamy za „porządne" własności logiczne, jest bardzo zgrabnym systemem logicznym pod względem *dedukcyjnym*. Stanowi to poważny argument na rzecz tzw. *tezy pierwszego rzędu*, która głosi, iż to właśnie FOL jest *właściwą* logiką – *the logic*. Istnieją też argumenty przeciw tej tezie – o niektórych ograniczeniach FOL piszemy niżej.

FOL jest powszechnie używanym standardem, jeśli chodzi o *logiczne rekonstrukcje* teorii naukowych, w tym także teorii lingwistycznych, którymi może najbardziej zainteresowani są słuchacze tego cyklu wykładów. Ponadto – a jest to bardzo ważki argument – we wszelkich rozważaniach *metateoretycznych*, a więc gdy mówimy o teoriach, używamy przy tym FOL, raczej niż jakiejś logiki nieklasycznej. Tak więc, FOL króluje w rozważaniach prowadzonych w *ogólnej metodologii nauk*, której poświęcony będzie ostatni z wykładów tego kursu.

2.7 Ograniczenia FOL

Jednym z ważnych ograniczeń FOL jest nikczemnie mała – jak na potrzeby np. matematyki – „moc wyrażania" jej języka. W samym języku FOL (nie mówimy tu o językach teorii formułowanych w języku FOL) nie można wyrazić wielu pojęć, które są podstawowe dla uprawiania matematyki. Dla przykładu:

1. *Pojęcie nieskończoności*. Przypominamy, że zbiór jest *nieskończony* (w sensie Dedekinda), gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. W przeciwnym razie jest *skończony*. Pojęcia nieskończoności (a więc także pojęcia skończoności) nie można zatem wyrazić w języku FOL, gdyż

w języku tym możemy kwantyfikować jedynie zmienne indywiduowe, a nie symbole funkcyjne (ani też predykaty).

2. *Pojęcie ciągłości*. Każdy zbiór liczb rzeczywistych, który ma ograniczenie górne, ma też kres górny (czyli najmniejsze ograniczenie górne). Również tego faktu nie można wyrazić w języku FOL, gdyż mowa w nim o dowolnych *zbiorach*, a w języku FOL możemy kwantyfikować jedynie zmienne indywiduowe.

Matematycy badają struktury „z dokładnością do izomorfizmu". Bez przytaczania precyzyjnych definicji można powiedzieć, że istotna jest tu wewnętrzna budowa rozważanych struktur, cała sieć powiązań miedzy elementami uniwersum. Tak więc, dla matematyka nieodróżnialne (izomorficzne) są struktury o „takiej samej" wewnętrznej budowie, niezależnie od natury elementów uniwersum. Struktury izomorficzne muszą mieć równoliczne uniwersa.

Jeśli wszystkie modele danej teorii są izomorficzne, to mówimy, że teoria jest *kategoryczna*. Ta własność jest jednak zbyt rygorystyczna – nie ma interesujących teorii (w języku FOL), które byłyby kategoryczne. Nieco ciekawszą jest własność związana z mocą uniwersum rozważanej teorii. Mówimy mianowicie, że teoria T jest *kategoryczna w mocy* κ, gdzie κ jest (nieskończoną) liczbą kardynalną, gdy wszystkie modele teorii T, których uniwersa mają moc κ są izomorficzne. Kategoryczność w ustalonej mocy oznacza zatem, że wszystkie modele tej mocy branej pod uwagę teorii są strukturalnie nieodróżnialne, są „tak samo zbudowane".

Przykładem teorii kategorycznej w mocy $\aleph_0$ jest podana powyżej elementarna teoria liniowego gęstego porządku bez elementu pierwszego i ostatniego. Nie jest natomiast kategoryczna w mocy $\aleph_0$ arytmetyka Peana. A zatem aksjomaty tej arytmetyki nie charakteryzują *dokładnie jednej* (z dokładnością do izomorfizmu) struktury.

Porównuje się jednak również modele pod względem semantycznym, ze względu na to, co *prawdziwie* można o nich powiedzieć w języku ustalonej teorii. Tak więc, modele *elementarnie równoważne* danej teorii to te, w których prawdziwe są dokładnie te same zdania (języka owej teorii). Teoria T jest *zupełna*, jeśli wszystkie jej modele są elementarnie równoważne, czyli nieodróżnialne pod względem semantycznym. Ta definicja zupełności zgodna jest z podaną poprzednio. Jeśli dwa modele są izomorficzne, to są też elementarnie równoważne, ale nie na odwrót.

Ponieważ większość ważnych, interesujących teorii matematycznych nie jest zupełna, więc nie posiadają one też jakiegoś wyróżnionego jednego „z dokładnością do elementarnej równoważności" modelu. Dla przykładu, arytmetyka Peana ma kontinuum przeliczalnych, wzajemnie elementarnie nierównoważnych modeli.

Z pewnego twierdzenia udowodnionego przez Alfreda Tarskiego (tzw. *górnego twierdzenia Löwenheima-Skolema*) wynika, że jeśli teoria w języku FOL jest nie-

sprzeczna (i nie ma modeli skończonych), to ma modele *dowolnych* mocy. Widać zatem, że język FOL nie nadaje się do *odróżniania* modeli teorii niesprzecznych, które interesuje matematyków, czyli do odróżniania „z dokładnością do izomorfizmu".

W wielu zastosowaniach filozoficznych – np. w analizie *przekonań* i *wiedzy*, podstawowych dla epistemologii – musimy wyjść poza logikę klasyczną. Takie funktory jak np.: *jest konieczne*, *jest możliwe*, *jest nakazane*, *jest dozwolone*, *wierzę, że*, *wiem, że* oraz wiele innych są wszystkie *intensjonalne* – ustalenie prawdziwości zdań zawierających te wyrażenia wymaga uwzględnienia czegoś więcej niż tylko wartości logiczne zdań opatrzonych tymi funktorami. Powiemy o tym więcej na następnym wykładzie.

Wreszcie, FOL ma także ograniczenia, jeśli chodzi o jej aplikacje lingwistyczne. Niewątpliwie, jakaś część rozumowań przeprowadzanych w językach etnicznych daje się dobrze reprezentować w języku FOL. Z pewnością FOL bardziej precyzyjnie oddaje „strukturę logiczną" wielu konstrukcji w językach etnicznych niż tradycyjna sylogistyka Arystotelesa. Niemniej jednak pogląd, że FOL w ostatecznym rozrachunku wystarcza do reprezentacji owej struktury języków etnicznych wydaje się wątpliwy.

Czy „przekłady" z języka FOL na języki etniczne (oraz na odwrót) są możliwe? A jeśli niemożliwe są wierne, „globalne" przekłady, to jaka część języka etnicznego ma swój przekład na język FOL? Poniżej ograniczymy się tylko do bardzo ogólnych uwag dotyczących zależności między językiem FOL a językami etnicznymi. Będą to przy tym uwagi raczej dogmatyczne.

Języki etniczne są uniwersalnymi systemami semiotycznymi. Wszystko, co daje się wyrazić, jest wyrażalne w językach etnicznych. Pomijając niuanse gramatyczne oraz zasoby słownikowe (które zawsze można uzupełniać), wszystkie języki etniczne są zasadniczo *równoważne*, jeśli chodzi o treści w nich wyrażalne.

Język klasycznego rachunku zdań jest tworem o wiele młodszym niż poszczególne języki etniczne — liczy sobie zaledwie dwa i pół tysiąca lat. Z kolei, język FOL (klasycznego rachunku predykatów, klasycznego rachunku kwantyfikatorów) liczy sobie niewiele więcej niż sto lat. Inspiracje do zbudowania języka FOL były po części logiczne, po części matematyczne.

Czasami podkreśla się fakt, że formalizacja klasycznego pojęcia prawdy (podana przez Tarskiego, w terminach relacji spełniania omówionej wyżej) nie jest adekwatna np. dla zdań z różnego rodzaju modalnościami (aletycznymi, deontycznymi, epistemicznymi, itd.). Tak oczywiście jest, należy jednak zwrócić uwagę, że dla każdej z odpowiednich logik nieklasycznych (np. modalnych) formułuje się dobrze określone pojęcie spełniania i prawdy. Przy tym, w metajęzyku opisu korzysta się z teorii mnogości, a więc także z FOL. Podobne uwagi można sformułować pod adresem innych logik: np. wielowartościowych, temporalnych, itd.

Zwraca się również uwagę, że wiele fenomenów języków etnicznych (np. okazjonalność, wyrażenia abstrakcyjne wymagające kwantyfikacji wyższych rzędów, elipsa, metafory, idiomy, presupozycje, implikatury, performatywy, konstrukcje intensjonalne w ogólności, akty mowy, mowa zależna, itd.) wymyka się opisowi z bezpośrednim zastosowaniem semantyki FOL. Także w tych przypadkach, stosowne ujęcia metalogiczne korzystają jednak, w ostatecznym rozrachunku, z teorii mnogości oraz FOL.

Wreszcie, podkreśla się zasadniczą różnicę między językami etnicznymi a językami sztucznymi: w językach etnicznych nie występują w sposób wyraźny *zmienne* (zdaniowe lub nazwowe). Ten fakt jednak nie przesądza, iż *przekłady* z języków etnicznych na języki sztuczne (i na odwrót), zachowujące własności znaczeniowe, są niemożliwe. W istocie, istnieje wiele rozbudowanych systemów formalnych, w których takie przekłady się proponuje.

Czyżby więc, mimo wszystkich tych (i ewentualnie dalszych) zastrzeżeń, istnienie *globalnego* „przekładu" wszelkich wyrażeń dowolnego języka etnicznego na język FOL, z zachowaniem wszystkich własności semantycznych, było przesądzone? Sądzimy, że nie. Tylko wybrane rodzaje wyrażeń (zdań) języków etnicznych można „rozumnie" przekładać na język FOL. Aby taki przekład był sensowny, muszą być spełnione, m.in. następujące warunki:

1. rozważane wyrażenia muszą mieć porządnie określone *kategorie syntaktyczne* (odpowiadające predykatom, nazwom, funktorom różnych rodzajów);

2. trzeba się ograniczyć jedynie do funkcji *informacyjnej* (deskryptywnej) wyrażeń, pomijając (pierwszorzędowe w przypadku języków etnicznych) funkcje *pragmatyczne*, np. funkcję *perswazyjną*;

3. należy się ograniczyć do wyrażeń, a nie *wypowiedzi*, w przypadku tych drugich istotną rolę odgrywają ich *konteksty*, a to zmusza do wykroczenia poza klasyczne (w terminach relacji spełniania dla FOL) rozumienie prawdziwości.

„Przekłady" w drugą stronę (tj. z języka FOL na języki etniczne) są oczywiście o wiele łatwiejsze. Jednak również w tym przypadku napotykamy na pewne trudności („przekłady" pewnych konstrukcji logicznych źle „współżyją" gramatycznie, jeśli użyć tej niejasnej metafory).

Tak więc, dla przykładu, nie sprawia najmniejszych trudności dokonanie „przekładu" z języka polskiego na język FOL zdań poniższej postaci, w których jest jasne, co przełoży się na predykat, co na nazwę, z jakimi rodzajami kwantyfikacji mamy do czynienia, itd.:

1. Jan zdradził Klaudię z Cecylią.
2. Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii.
3. Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie.
4. Kto śpi, nie grzeszy.

Podobnie, zarówno językoznawca, jak i zwykły użytkownik języka polskiego łatwo znajdzie różnice znaczeniowe w podanych niżej parach wyrażeń:

1.	Umarł i dostał jakiś order.	Dostał jakiś order i umarł.
2.	Umarł bo dostał jakiś order.	Dostał jakiś order bo umarł.
3.	Umarł więc dostał jakiś order.	Dostał jakiś order więc umarł.
4.	Umarł chociaż dostał jakiś order.	Dostał jakiś order chociaż umarł.
5.	Umarł gdy dostał jakiś order.	Dostał jakiś order gdy umarł.
6.	Umarł mimo że dostał jakiś order.	Dostał jakiś order mimo że umarł.
7.	Nie dość, że umarł, to dostał jakiś order.	Nie dość, że dostał jakiś order, to umarł.

Drobnym problemem może okazać się oddanie tych różnic znaczeniowych w „przekładach” tych wyrażeń na język FOL – to, że są to wszystko koniunkcje zdań w różnym szyku nie oddaje przecież owych różnic znaczeń.

Pozwólmy sobie, dla relaksu, przywołać w tym miejscu garść wyrażeń o wymowie (w naszym mniemaniu) zabawnej. Komizm jest tu wynikiem różnorakich czynników, np.: błędów składniowych i semantycznych, elipsy, wieloznaczności, obecności różnego rodzaju implikatur, itd. Można, dla rozrywki, próbować znaleźć „przekłady” podanych wyrażeń na język FOL.

1. Uwaga żołnierze! Zbiórka przed kościołem — za kościołem, po kościele — przed kościołem.
2. Nad rzeką dziewczę doiło krowę, a w wodzie odbijało się odwrotnie.
3. Jan zakopał skarb razem z teściową.
4. Mimo starań lekarzy pacjent wyzdrowiał.
5. Po wielu staraniach lekarzy pacjent zmarł.
6. Popieramy program partii (tu wPiSz nazwę partii), oparty na przeświadczeniu o własnej słuszności.
7. Przez uderzenia pędzlem malarz uzyskuje smutek na twarzy modelki.

8. Całymi dniami pił po nocach.

9. Nie ulegaj przesądom, bo to przynosi pecha.

10. Będzie tak dobrze, że gorzej już nie będzie.

11. Wszyscy nie zapłacili.

12. Doprowadzimy do tego, że każdy w tym kraju będzie robił to, na co ma ochotę. A jeśli nie, to go do tego zmusimy.

13. Potrafię się oprzeć wszystkiemu, z wyjątkiem pokusy.

14. *Panie doktorze, cierpię na chroniczne niezdecydowanie, ale pewna tego nie jestem.*

15. Co ma zrobić ateistka, poproszona o odmówienie modlitwy? Odmówić i nie odmówić, czy też nie odmówić i odmówić?

Inną – poważną – sprawą jest to, czy same języki etniczne wyposażone są w jakieś własne, wewnętrzne mechanizmy inferencyjne. Czy istnieje coś takiego jak *logika języków etnicznych* (*logika języka naturalnego*)? Z odpowiedzią na to pytanie zmierzymy się na czwartym z tej serii wykładów.

Zalecana literatura

Adamowicz, Z., Zbierski, P. 1991. *Logika matematyczna*. PWN, Warszawa.

Batóg, T. 1999. *Podstawy logiki*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Cori, R., Lascar, D. 2000. *Mathematical Logic. A Course with Exercises*. Oxford University Press, Oxford. Part I: *Propositional Calculus, Boolean Algebras, Predicate Calculus, Completeness Theorems*. Part II: *Recursion Theory, Gödel's Theorems, Set Theory, Model Theory*.

Grzegorczyk, A. 1975. *Zarys logiki matematycznej*. PWN, Warszawa.

Hedman, S. 2004. *A First Course in Logic. An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity*. Oxford University Press, Oxford.

Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of Mathematical Logic*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts.

Hunter, G. 1982. *Metalogika*. PWN, Warszawa.

Ławrow, I.A., Maksimowa, Ł.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Marciszewski, W. 1987. *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny.* PWN, Warszawa.

Marek, I. 2002. *Elementy logiki formalnej*. Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.

Mendelson, E. 1964. *Introduction to mathematical logic*. Princeton, N.J.

Mostowski, A. 1948. *Logika matematyczna*. Warszawa-Wrocław.

Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii*. PWN, Warszawa.

Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek predykatów. Zarys teorii*. PWN, Warszawa.

Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej*. Uniwersytet Warszawski, Filia w Białymstoku, Białystok.

Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*. PWN, Warszawa.

Shoenfield, J. 1967. *Mathematical logic*. Reading, Massachusetts.

Smullyan, R. 1968. *First-Order Logic.* Springer Verlag, Berlin.

Stanosz, B. 2005. *Ćwiczenia z logiki.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Surma, S. (ed.) 1973. *Studies in the history of mathematical logic*. Zakład Narodowy imienia Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk.

Tarski, A. 1965. *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences.* Oxford University Press.

Woleński, J. 1993. *Metamatematyka a epistemologia*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.