Matematyka jest logiką nieskończonego

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Wrocław, 27 VI 2008

Wprowadzenie

Odczyt dotyczy przygotowywanej edycji tłumaczeń prac Ernsta Zermela z podstaw matematyki:

„Matematyka jest logiką nieskończonego."
Prace Ernsta Zermela z podstaw matematyki.

Zamierzenie to jest realizowane z inspiracji oraz przy współpracy Pana Profesora **Jana Zygmunta**.

Pierwsza wersja tłumaczenia została wykonana wiosną 2008 roku. Obecnie tłumaczenie jest skrupulatnie sprawdzane oraz przygotowywane są komentarze do poszczególnych prac.

Ernst Zermelo i Wrocław

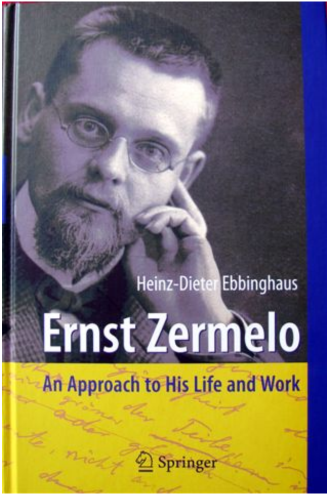
Zermelo dwukrotnie był rozważany (i odrzucony) jako kandydat do objęcia stanowiska profesora matematyki we Wrocławiu (wówczas Breslau):

- w 1903 roku, na Uniwersytecie Wrocławskim
- w 1913 roku, na Politechnice Wrocławskiej.

Mamy nadzieję, że dzisiejszy, trzeci Wrocławski Incydent Zermelowski, będzie owocował bardziej korzystnie dla jego bohatera, kończąc się opublikowaniem polskiego tłumaczenia jego prac z podstaw matematyki.

Ernst Zermelo: biografia

Wydawnictwo Springer przygotowuje dwutomową, dwujęzyczną edycję dzieł zebranych Zermela. Polecamy znakomity tekst przedstawiający biografię oraz dokonania naukowe Ernsta Zermela:



Ernst Zermelo i piastowskie Opole

Wykorzystujemy też następujące źródła:

- Niepublikowaną monografię: ***Infinitarna Logika Ernsta Zermela*** (Praca wykonana w latach 2004–2006 w ramach projektu badawczego KBN 2H01A 00725 *Metody nieskończonościowe w teorii definicji*, kierowanego przez Pana Profesora **Janusza Czelakowskiego** w Instytucie Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Opolskiego, 181 stron.), spis treści dostępny: http://www.logic.amu.edu.pl/images/c/cc/2H01A00725.pdf
- Artykuł: ***Projekt logiki infinitarnej Ernsta Zermela*** opublikowany w 2006 roku w *Investigationes Linguisticae* **XIV**, 18–49: http://www.inveling.amu.edu.pl/ index.php?page=issues&vol=14&cat=0&article=119 Tekst dostępny także na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM: http://www.logic.amu.edu.pl/images/f/fc/Art04.pdf

Zermelo i matematycy warszawscy

Siedzą (od lewej): Sierpiński, Zermelo, Dickstein, Przeborski.
Stoją (od lewej): Łukasiewicz, Leśniewski, Knaster, Spława-Neyman, Leja.

Spotkanie we Lwowie

Kuratowski (1), Knaster (2), Banach (3), Stożek (4), Żyliński (5), Ruziewicz (6), Steinhaus (7), Zermelo, Mazurkiewicz (8).

Sesja Zermelowska w Warszawie, 2008

Podczas VIII Polskiego Zjazdu Filozoficznego w Warszawie (16 września 2008) planowana jest dyskusja w Sekcji Logiki: **Zermelo a Szkoła Warszawska. 100 lat aksjomatycznej teorii mnogości.** Przewiduje się wystąpienia:

- Jan Zygmunt: Zermelo a polscy matematycy.
- Roman Murawski: Warszawska Szkoła Matematyczna.
- Stanisław Krajewski: O metodzie aksjomatycznej.
- Zofia Adamowicz: Forcing.
- Janusz Czelakowski: Kategoryczność teorii mnogości.
- Krzysztof Wójtowicz: Realizm teoriomnogościowy.

Osobno wygłoszony zostanie odczyt o logice infinitarnej Ernsta Zermela.

Aksjomat wyboru i twierdzenie o dobrym uporządkowaniu

Jak wiadomo, aksjomat wyboru uzyskał wizę wjazdową do Królestwa Matematyki dzięki pracom Zermela:

- Dowód, że każdy zbiór może zostać dobrze uporządkowany (1904)
- Nowy dowód możliwości dobrego uporządkowania (1908)
- Badania nad podstawami teorii mnogości. I. (1908)

Pierwsza praca to fragment listu do Davida Hilberta.
W drugiej Zermelo rozprawia się z zarzutami wobec: stosowania aksjomatu wyboru oraz dowodu twierdzenia o dobrym uporządkowaniu.
Ostatnia z tych prac zawiera pierwszą aksjomatykę teorii mnogości (oraz dowody kilku podstawowych twierdzeń o liczbach kardynalnych).

Aksjomat wyboru i twierdzenie o dobrym uporządkowaniu

Twierdzenie o dobrym uporządkowaniu oddaje intuicje Cantorowskiej teorii mnogości.

- Twierdzenie o dobrym uporządkowaniu nie może zostać udowodnione bez aksjomatu wyboru.
- Dowód Zermela z 1908 roku korzysta jedynie z elementarnych pojęć teorii mnogości.
- Aksjomat wyboru jest dla Zermela (w jego pracach z 1904 roku oraz obu z 1908 roku) aksjomatem egzystencjalnym. Stylistyka jego wysławiania respektuje uzus językowy.
- W pracy z 1930 roku Zermelo usuwa aksjomat wyboru z aksjomatyki, uważając go za „ogólną zasadę logiczną”.

Polecamy rozprawę Pana Profesora Jerzego Perzanowskiego, dotyczącą kształtowania się pojęcia zbioru.

Zbiory skończone

Zbiorom skończonym oraz zasadzie indukcji zupełnej poświęcone są dwie prace Zermela:

- O zbiorach skończonych i zasadzie indukcji zupełnej (1909)
- O podstawach arytmetyki (1909).

- Zermelo podaje definicję zbioru skończonego jako tzw. łańcucha prostego.
- Pokazuje, że tak zdefiniowane zbiory skończone to dokładnie zbiory podwójnie dobrze uporządkowane.
- W pracach tych Zermelo nie korzysta z aksjomatu istnienia zbiorów nieskończonych.

Niektóre zastosowania

Kilka prac w dorobku Zermela wyraźnie podkreśla istotne zastosowanie twierdzenia o dobrym uporządkowaniu (oraz aksjomatu wyboru):

- O zastosowaniu teorii mnogości w teorii gry w szachy (1913). Jest to pierwsza praca teoretyczna z teorii gier.
- O całkowitych liczbach przestępnych (1914). Pokazuje się istnienie pierścieni maksymalnych w ciałach liczb rzeczywistych i zespolonych.
- Liczby graniczne i dziedziny mnogościowe. Nowe badania nad podstawami teorii mnogości. (1930) Podaje się konstrukcję kumulatywnej hierarchii zbiorów.
- Podstawy ogólnej teorii systemów zdaniowych (1935) Zdania (także nieskończone), systemy zdaniowe oraz dowody są wszystkie traktowane jako zbiory (dobrze) ufundowane.

Infinitarna logika Ernsta Zermela

Wydaje się, że wśród inspiracji dla projektu logiki infinitarnej Zermela jako istotne wymienić można następujące czynniki:

- poglądy Zermela na naturę nieskończoności; przekonanie, że *matematyka jest logiką nieskończoności*;
- przekonanie Zermela o fundamentalnej dla całości matematyki roli (jego systemu) teorii mnogości; w szczególności, traktowanie formuł oraz dowodów jako (dobrze ufundowanych) tworów z hierarchii kumulatywnej zbiorów (przedstawionej w artykule z 1930 roku);
- odrzucenie *skolemizmu*; przekonanie, że ani przedmiotu badań teorii mnogości nie można zredukować do pojedynczego jej modelu, ani nie można zaakceptować *finitystycznego* punktu widzenia w procedurze dowodzenia twierdzeń matematycznych;
- przekonanie, że nie należy nakładać ograniczeń na postać formuł w aksjomacie wyróżniania (w szczególności, nie ograniczać się do języka pierwszego rzędu).

Infinitarna logika Ernsta Zermela

Etapy tworzenia projektu logiki infinitarnej Zermela:

- Zermelo a Skolem: spór o rozumienie pojęcia *Definitheit*
- wykłady w Warszawie: Tezy o nieskończoności
- druga aksjomatyka teorii mnogości: Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Fundamenta Mathematicae* **16** (1930), 29–47
- Zermelo a Gödel: spór o rozumienie pojęcia dowodu
- ostatnia opublikowana praca: Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme. Erste Mitteilung. *Fundamenta Mathematicae* **25** (1935), 136–146.

Tezy o nieskończonym w matematyce

Ernst Zermelo 17 lipca 1921

- I. Każde autentyczne [w oryginale: „echte", co tłumacz angielski oddaje przez: „genuine"] zdanie matematyczne ma charakter „infinitarny", tj. odnosi się do [jakiejś] *nieskończonej* dziedziny i powinno być rozpatrywane jako kombinacja nieskończenie wielu „zdań elementarnych".
- II. Nieskończone nie jest nam dane w rzeczywistości ani fizycznie, ani psychicznie, musi być pojmowane i „usytuowane" jako „idea" w sensie Platońskim.
- III. Ponieważ zdania infinitarne nigdy nie mogą zostać wyprowadzone z finitarnych, więc także „aksjomaty" każdej teorii matematycznej muszą być infinitarne, a „niesprzeczności" takiej teorii nie można „dowieść" inaczej, jak przez wskazanie odpowiedniego niesprzecznego systemu nieskończenie wielu zdań elementarnych.

Tezy o nieskończonym w matematyce

- IV. Tradycyjna logika „Arystotelesowska" jest ze swojej natury finitarna i stąd nieprzystosowana do ugruntowania nauk matematycznych. Powstaje zatem konieczność rozszerzonej logiki „infinitarnej" lub „Platońskiej", która opiera się na pewnego rodzaju infinitarnym „oglądzie" [w oryginale: „Anschauung", co tłumacz angielski oddaje przez: „intuition".] — jak np. w przypadku „aksjomatu wyboru" — która jednak, paradoksalnie, odrzucana jest przez „intuicjonistów", z powodu przyzwyczajeń.
- V. Każde zdanie matematyczne powinno być rozpatrywane jako połączenie (nieskończenie wielu) zdań elementarnych, poprzez koniunkcję, alternatywę i negację, a każde wyprowadzenie jakiegoś zdania z innych zdań, w szczególności każdy „dowód", jest niczym innym, jak „przegrupowaniem" leżących u podstaw zdań elementarnych.

Zermelo mówił o tej problematyce podczas swoich wykładów w Warszawie w 1929 roku.

Polemika ze Skolemem

Spory Zermela ze Skolemem dotyczyły dwóch spraw:

- kształtu aksjomatu wyróżniania (Zermelo dopuszczał dowolne funkcje zdaniowe, Skolem proponował ograniczenie do funkcji zdaniowych logiki pierwszego rzędu);
- istnienia modeli teorii mnogości (Zermelo nie mógł pogodzić się ze stosowaniem twierdzenia Löwenheima-Skolema w teorii mnogości; wykluczał sprowadzanie **całej** teorii mnogości do jej przeliczalnego modelu; uważał, że dopiero cała hierarchia dziedzin normalnych opisuje teorię mnogości).

W sporze tym zwyciężyła teoria mnogości formułowana w języku pierwszego rzędu.

Druga (1930) aksjomatyka teorii mnogości

W artykule z 1930 roku dodane zostają aksjomaty: zastępowania oraz ufundowania.
Zermelo opuszcza natomiast aksjomaty: nieskończoności (jako „nie należący do ogólnej teorii mnogości") oraz wyboru (przyjęty jako „ogólna zasada logiczna").

Ponadto, praca ta przynosi:

- konstrukcję kumulatywnej hierarchii dziedzin normalnych;
- twierdzenia o izomorfizmie dziedzin normalnych (względem dwóch parametrów: mocy bazy oraz charakterystyki);
- rozważania dotyczące liczb kardynalnych mocno nieosiągalnych.

Polemika z Gödlem

Polemika Zermela z Gödlem dotyczyła spraw następujących:

- możliwości reprezentowania matematyki w ramach finitarnego systemu symboli i reguł;
- rozumienia pojęcia „dowodu matematycznego”.

W sporze tym zwyciężyła wówczas logika pierwszego rzędu, jako zaczynający obowiązywać paradygmat logiki matematycznej.

Projekt logiki infinitarnej

Podstawowe założenia projektu logiki infinitarnej Zermela sprowadzają się do następujących:

- Nie ma ograniczeń na długość formuł; dopuszcza się dowolne koniunkcje oraz alternatywy formuł.
- Jedynym ograniczeniem jest to, aby formuły były tworami (dobrze) ufundowanymi.
- Również dowody mogą być, w ogólności, nieskończone. Muszą być jednak (dobrze) ufundowane.
- Zermelo operuje **semantycznym** pojęciem dowodu.
- **Wszystkie** zdania matematyczne są rozstrzygalne (w stosownym, nieskończonym systemie).

Dalsze dzieje logiki infinitarnej

W latach trzydziestych XX wieku projekt Zermela nie był rozwijany. Systematyczne badania nad logikami infinitarnymi zostały podjęte dopiero dwie dekady później:

- Tarski, Henkin, Robinson, Karp, Scott: logiki infinitarne;
- Mostowski: uogólnione kwantyfikatory (potem: Lindström, Barwise).

W ciągu ostatniego półwiecza logiki infinitarne uzyskały pełną legitymizację, opracowano ich metalogikę, wskazano na ich zastosowania w badaniach matematycznych. Zob. np.:

- Barwise, J., Feferman, S. (eds.) 1985. *Model-Theoretic Logics.* Springer-Verlag, New York et al.

„Matematyka jest logiką nieskończonego”

„Matematyka jest logiką nieskończonego"

„Matematyka jest logiką nieskończonego"