Dowody założeniowe w KRZ

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

MDTiAR 24xi2015

Plan na dziś

- Podamy reguły pierwotne wykorzystywane w dowodach założeniowych w KRZ (w stylu Słupeckiego-Borkowskiego).
- Podamy przykłady dowodów wprost oraz nie wprost.
- Wskażemy niektóre reguły wtórne systemu.
- Rozważymy przykłady dowodów z dodatkowymi założeniami.
- Rozważymy przykłady dowodów rozgałęzionych.

- Podamy informacje o bardziej współczesnych ujęciach dedukcji naturalnej.

Ideologia

- Systemy dedukcji naturalnej pochodzą od Gerharda Gentzena (1909–1945) oraz Stanisława Jaśkowskiego (1906–1965).
- Systemy te miały m.in. reprezentować praktykę dowodową matematyków.

- Twierdzenia matematyczne składają się z założeń oraz tezy.
- Zakładamy, że zachodzą założenia i staramy się wyprowadzić z nich tezę. Tak więc, twierdzenie o założeniach $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ oraz tezie φ ma strukturę:

$$\psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \varphi) \ldots))$$

Reguła odrywania

Zbiór reguł pierwotnych systemu założeniowego oznaczymy przez *jas*. Należą doń:

- (RO) Reguła odrywania. Jeśli do dowodu należy implikacja oraz jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji.
- W zapisie symbolicznym:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi}$$

Ta reguła to zatem reguła *opuszczania implikacji*. Reguła *dołączania implikacji* ma w tym systemie dowodowym specjalny status: tradycyjnie mówi się przy tym o tzw. *dodatkowych założeniach dowodu* (o czym za chwilę).

Reguły pierwotne: koniunkcja

- (DK) Reguła dołączania koniunkcji. Do dowodu wolno dołączyć koniunkcję, o ile oba jej człony należą do dowodu.

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}$$

- (OK) Reguła opuszczania koniunkcji. Jeśli do dowodu należy koniunkcja, to wolno dołączyć do dowodu każdy z jej członów.

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

Reguły pierwotne: alternatywa

- (DA) Reguła dołączania alternatywy. Jeśli do dowodu należy jakaś formuła, to do dowodu wolno dołączyć alternatywę, której jednym z członów jest ta formuła.

$$\frac{\varphi}{\varphi \lor \psi} \qquad \frac{\psi}{\varphi \lor \psi}$$

- (OA) Reguła opuszczania alternatywy. Jeśli do dowodu należy alternatywa oraz negacja jednego z jej członów, to do dowodu dołączyć można pozostały człon tej alternatywy:

$$\frac{\varphi \lor \psi \quad \neg\varphi}{\psi} \qquad \frac{\varphi \lor \psi \quad \neg\psi}{\varphi}$$

Reguły pierwotne: równoważność

- (DR) Reguła dołączania równoważności. Do dowodu wolno dołączyć równoważność, o ile należy do dowodu implikacja, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikacja odwrotna.

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \psi \rightarrow \varphi}{\varphi \equiv \psi}$$

- (OR) Reguła opuszczania równoważności. Jeśli do dowodu należy równoważność, to wolno dołączyć do dowodu zarówno implikację, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikację odwrotną.

$$\frac{\varphi \equiv \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \qquad \frac{\varphi \equiv \psi}{\psi \rightarrow \varphi}$$

Oryginalny system Jaśkowskiego

W systemie zaproponowanym przez Jaśkowskiego nie zakładano reguły opuszczania alternatywy jako reguły pierwotnej, przyjmowano natomiast jeszcze następujące reguły pierwotne:

- (RK) Reguła kontrapozycji. Jeśli do dowodu należy implikacja, której poprzednikiem jest negacja jednej formuły, a następnikiem negacja drugiej formuły, to do dowodu można dołączyć implikację, której poprzednikiem jest druga formuła, a następnikiem pierwsza formuła.

$$\frac{\neg\varphi \rightarrow \neg\psi}{\psi \rightarrow \varphi}$$

Oryginalny system Jaśkowskiego

- (DP) Reguła dodawania poprzedników. Jeśli do dowodu należą dwie implikacje o takim samym następniku, to do dowodu wolno dołączyć implikację o tymże następniku i o poprzedniku będącym alternatywą poprzedników tych implikacji.

$$\frac{\varphi \to \chi \qquad \psi \to \chi}{(\varphi \lor \psi) \to \chi}$$

Korzystając z reguł pierwotnych z *jas* można wyprowadzić (RK) oraz (DP). Regułę (OA) można wyprowadzić w oryginalnym systemie Jaśkowskiego.

Dowody założeniowe: nieformalna charakterystyka

Dowodem założeniowym (wprost) formuły $(\psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots \to (\psi_n \to \varphi)\ldots))$ nazywamy każdy ciąg formuł taki, że:

1. pierwsze n elementów tego ciągu to formuły $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ (założenia dowodu)
2. wszystkie pozostałe elementy tego ciągu (kroki dowodowe) powstają z elementów wcześniejszych poprzez zastosowanie którejś z pierwotnych reguł dowodowych, reguł wtórnych lub tez wcześniej udowodnionych
3. ostatnim elementem tego ciągu jest formuła φ.

Piszemy $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\} \vdash_{jas} \varphi$, gdy formuła $(\psi_1 \to (\psi_2 \to \ldots \to (\psi_n \to \varphi)\ldots))$ ma dowód założeniowy.

Dowody założeniowe zapisujemy w postaci ciągów formuł, z komentarzami uzasadniającymi każdy krok dowodowy.

Indukcyjna definicja tezy

Przez indukcję określamy zbiór T_{jas} tez systemu założeniowego KRZ opartego na regułach *jas*:

- $\chi \in T^0_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna $n \geqslant 0$ oraz formuły $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \varphi$ takie, że: χ jest identyczna z $(\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\psi_n \rightarrow \varphi) \ldots))$ oraz $\varphi \in C_{jas}(\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\})$ (gdzie C_{jas} to operacja konsekwencji wyznaczona przez reguły z *jas*, zob. wykład drugi).
- $\alpha \in T^{k+1}_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi \in T^k_{jas}$ lub istnieją liczby naturalne $n \geqslant 0$, $i < n$ oraz formuły $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \varphi$ takie, że:
  - χ jest identyczna z $(\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\psi_i \rightarrow \varphi) \ldots))$
  - $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \ldots, \psi_n \in T^k_{jas}$
  - $\varphi \in C_{jas}(\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\})$.

$\chi \in T_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje m taka, że $\chi \in T^m_{jas}$.

Tezy systemu założeniowego KRZ: komentarz

- Jeśli $\chi \in T^{m}_{jas}$, to mówimy, że χ jest tezą stopnia m systemu założeniowego KRZ. Jeśli χ jest tezą stopnia m i $m \leqslant n$, to χ jest też oczywiście tezą stopnia n. Jeśli $\chi \in T_{jas}$, to mówimy, że χ jest **tezą** systemu założeniowego KRZ.
- Podaną tu indukcyjną definicję zbioru tez systemu założeniowego KRZ przytaczamy za: Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* PWN, Warszawa (strona 188).

- Zbiory tez i zbiory reguł wyprowadzalnych aksjomatycznego i założeniowego systemu KRZ są równe.

Prawo komutacji

$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$ (prawo komutacji)

Należy dowieść, że z założeń $\varphi \to (\psi \to \chi), \psi, \varphi$ można otrzymać χ, używając reguł ze zbioru *jas*.

1.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	założenie
2.	ψ	założenie
3.	φ	założenie
4.	$\psi \to \chi$	RO: 1,3
5.	χ	RO: 4,2.

Zauważmy, że ten dowód jest taki sam, jak dowód prawa komutacji w aksjomatycznym ujęciu KRZ, przy wykorzystaniu Twierdzenia o Dedukcji Wprost.

Prawo eksportacji

$((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$ prawo eksportacji

Trzeba pokazać, że z założeń $(\varphi \wedge \psi) \to \chi$, φ, ψ można otrzymać χ.

1.	$(\varphi \wedge \psi) \to \chi$	założenie
2.	φ	założenie
3.	ψ	założenie
4.	$\varphi \wedge \psi$	DK: 2,3
5.	χ	RO: 1,4.

Zauważ, że **planowanie** dowodu jest w tej metodzie prostsze, niż w metodzie aksjomatycznej.

Prawo importacji

$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$ prawo importacji

Trzeba pokazać, że z założeń $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$, $\varphi \wedge \psi$ można otrzymać χ.

1.	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	założenie
2.	$\varphi \wedge \psi$	założenie
3.	φ	OK: 2
4.	ψ	OK: 2
5.	$\psi \rightarrow \chi$	RO: 1,3
6.	χ	RO: 5,4.

Zwróć uwagę na różne możliwości kolejności wykonania poszczególnych kroków dowodu.

Prawo sylogizmu hipotetycznego

$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$ prawo sylogizmu hipotetycznego

Trzeba pokazać, że z założeń: $\varphi \to \psi$, $\psi \to \chi$ oraz φ można otrzymać χ.

1.	$\varphi \to \psi$	założenie
2.	$\psi \to \chi$	założenie
3.	φ	założenie
4.	ψ	RO: 1,3
5.	χ	RO: 2,3.

Prawo Fregego

$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$ prawo Fregego

Trzeba pokazać, że z założeń: $\varphi \to (\psi \to \chi)$, $\varphi \to \psi$ oraz φ można otrzymać χ.

1.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	założenie
2.	$\varphi \to \psi$	założenie
3.	φ	założenie
4.	ψ	RO: 2,3
5.	$\psi \to \chi$	RO: 1,3
6.	χ	RO: 5,4.

Reguła sylogizmu hipotetycznego

$$\frac{\varphi \to \psi \qquad \psi \to \chi}{\varphi \to \chi}$$

Trzeba pokazać, że z założeń: $\varphi \to \psi$ i $\psi \to \chi$ można otrzymać $\varphi \to \chi$.

1.	$\varphi \to \psi$	założenie
2.	$\psi \to \chi$	założenie
3.	$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	prawo sylogizmu hipotetycznego
4.	$(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	RO: 3,1
5.	$\varphi \to \chi$	RO: 4,2.

Reguła Fregego

$$\frac{\varphi \to (\psi \to \chi) \qquad\qquad \varphi \to \psi}{\varphi \to \chi}$$

Trzeba pokazać, że z założeń: $\varphi \to (\psi \to \chi)$ oraz $\varphi \to \psi$ można otrzymać $\varphi \to \chi$.

1.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	założenie
2.	$\varphi \to \psi$	założenie
3.	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	prawo Fregego
4.	$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	RO: 3,1
5.	$\varphi \to \chi$	RO: 4,2.

Dowody nie wprost

Zachodzi Twierdzenie o Dowodach Nie Wprost:

Jeśli $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\} \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{jas} \chi$ oraz $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\} \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{jas} \neg\chi$ dla pewnej formuły χ, to $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\} \vdash_{jas} \varphi$.

Twierdzenie to pozwala zatem na stosowanie w systemie założeniowym dowodów nie wprost: aby pokazać, że z założeń $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ można wyprowadzić φ, wystarczy pokazać, że z założeń $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \neg\varphi\}$ można wyprowadzić w systemie założeniowym KRZ parę formuł wzajem sprzecznych.
Nadto, z twierdzenia tego możemy korzystać również przy dowodzeniu wyprowadzalności reguł wtórnych systemu założeniowego KRZ.

Dowody nie wprost: przykłady

W dowodzie nie wprost formuły $\psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \varphi)\ldots))$ (czyli wyprowadzeniu φ z założeń $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ metodą nie wprost) dopisujemy do założeń $\neg\varphi$, czyli założenie dowodu nie wprost (w skrócie: z.d.n.) i staramy się wyprowadzić z tych założeń parę formuł wzajem sprzecznych. Gdy to się powiedzie, φ jest konsekwencją $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ w systemie założeniowym KRZ. Symbolu $\perp$ używamy tu na oznaczenie sprzeczności.

Dla przykładu, dowód nie wprost formuły $\neg\neg\varphi \to \varphi$ jest następujący:

1.	$\neg\neg\varphi$	założenie
2.	$\neg\varphi$	z.d.n.
3.	$\perp$	sprzeczność: 1, 2.

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę opuszczania negacji ON: $\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$.

Dowody nie wprost: przykłady

$\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

1.	φ	założenie
2.	$\neg\neg\neg\varphi$	z.d.n.
3.	$\neg\varphi$	ON: 2
4.	$\perp$	sprzeczność: 1, 3.

Z tez $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ i $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ otrzymujemy, na mocy reguły DR tezę: $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$.

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę dołączania negacji DN:

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}.$$

Dowody nie wprost: przykłady

$(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ prawo kontrapozycji

1.	$\varphi \to \psi$	założenie
2.	$\neg\psi$	założenie
3.	$\neg\neg\varphi$	z.d.n.
4.	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	prawo podwójnej negacji
5.	φ	RO: 4,3
6.	ψ	RO: 1,5
7.	$\perp$	sprzeczność: 2, 6.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 2 i 6.

Dowody nie wprost: przykłady

$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\} \vdash_{jas} \neg\varphi$

1.	$\varphi \rightarrow \psi$	założenie
2.	$\neg\psi$	założenie
3.	$\neg\neg\varphi$	z.d.n.
4.	φ	ON: 3
5.	ψ	RO: 1,4
6.	$\perp$	sprzeczność: 2, 5.

Pokazaliśmy więc, że regułą wtórną jest reguła *modus tollendo tollens* MT:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi}{\neg\varphi}.$$

Dodatkowe założenia dowodu

Kolejna wielce użyteczna technika dowodowa w systemie założeniowym KRZ polega na korzystaniu z tzw. dodatkowych założeń dowodu. Jest to procedura następująca:

- Czynimy w dowodzie dodatkowe założenie φ.
- Jeśli z założenia φ (oraz wcześniejszych kroków dowodu) możemy wyprowadzić formułę ψ, to do dowodu wolno włączyć formułę $\varphi \rightarrow \psi$.
- Z kroków wyprowadzenia ψ z φ **nie wolno** korzystać poza tym wyprowadzeniem. Zwykle stosuje się stosowną numerację: jeśli dodatkowe założenie φ ma numer n.1., a wyprowadzona z niego formuła ma numer $n.m.$, to z kroków o numerach od n.1. do $n.m.$ **nie** korzystamy w dowodzie głównym.

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 1

$((\varphi \vee \psi) \to (\chi \wedge \vartheta)) \to ((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \vartheta))$

1.	$(\varphi \vee \psi) \to (\chi \wedge \vartheta)$	założenie
1.1.	φ	założenie dodatkowe
1.2.	$\varphi \vee \psi$	DA: 1.1.
1.3.	$\chi \wedge \vartheta$	RO: 1,1.2.
1.4.	χ	OK: 1.3.
2.	$\varphi \to \chi$	1.1.$\Rightarrow$1.4.
2.1.	ψ	założenie dodatkowe
2.2.	$\varphi \vee \psi$	DA: 2.1.
2.3.	$\chi \wedge \vartheta$	RO: 1,2.2.
2.4.	ϑ	OK: 2.3.
3.	$\psi \to \vartheta$	2.1.$\Rightarrow$2.4.
4.	$(\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \vartheta)$	DK: 2,3.

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

$(\varphi \to \psi) \to ((\chi \to \vartheta) \to (\neg(\psi \vee \vartheta) \to \neg(\varphi \vee \chi)))$

1.	$\varphi \to \psi$	założenie
2.	$\chi \to \vartheta$	założenie
3.	$\neg(\psi \vee \vartheta)$	założenie
4.	$\neg\neg(\varphi \vee \chi)$	z.d.n.
5.	$\varphi \vee \chi$	ON: 4
5.1.	φ	założenie dodatkowe
5.2.	ψ	RO: 1,5.1.
5.3.	$\psi \vee \vartheta$	DA: 5.2.
6.	$\varphi \to (\psi \vee \vartheta)$	5.1.$\Rightarrow$5.3.
7.	$\neg\varphi$	MT: 6,3
8.	χ	OA: 5,7
9.	ϑ	RO: 2,8
10.	$\psi \vee \vartheta$	DA: 9
11.	$\perp$	sprzeczność: 3, 10.

Dowody dalszych tez

Pokażemy, że wyprowadzalna jest reguła $\frac{\varphi, \neg\varphi}{\psi}$.

1.	φ	założenie
2.	$\neg\varphi$	założenie
3.	$\varphi \vee \psi$	DA: 1
4.	ψ	OA: 3,2.

Regułę $\frac{\varphi, \neg\varphi}{\psi}$ nazywamy regułą Dunsa Scotusa (RDS).

Dowody dalszych tez

$\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$

1.	φ	założenie
2.	$\neg\varphi$	założenie
3.	ψ	RDS: 1,2.

Dowody dalszych tez

$\neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

1.	$\neg(\varphi \vee \psi)$	założenie
1.1.	φ	założenie dodatkowe
1.2.	$\varphi \vee \psi$	DA: 1.1.
2.	$\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	1.1.$\Rightarrow$1.2.
3.	$\neg\varphi$	MT: 2,1
3.1.	ψ	założenie dodatkowe
3.2.	$\varphi \vee \psi$	DA: 3.1.
4.	$\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	3.1.$\Rightarrow$3.2.
5.	$\neg\psi$	MT: 4,1
5.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	DK: 3,5.

Dowody dalszych tez

$(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$.

1.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	założenie
2.	$\neg\neg(\varphi \vee \psi)$	z.d.n.
3.	$\varphi \vee \psi$	ON: 2
4.	$\neg\varphi$	OK: 1
5.	$\neg\psi$	OK: 1
6.	ψ	OA: 3,4
7.	$\perp$	sprzeczność: 5, 6.

Dwie udowodnione wyżej tezy dają łącznie prawo negowania alternatywy $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$. Regułą wtórną jest zatem reguła negowania alternatywy NA: $\frac{\neg(\varphi\vee\psi)}{\neg\varphi\wedge\neg\psi}$.

Dowody dalszych tez

$\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$.

1.	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	założenie
2.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	z.d.n.
3.	$\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$	NA: 2
4.	$\neg\neg\varphi$	OK: 3
5.	$\neg\neg\psi$	OK: 3
6.	φ	ON: 4
7.	ψ	ON: 5
8.	$\varphi \wedge \psi$	DK: 6,7.
9.	$\perp$	sprzeczność: 1, 8.

Dowody dalszych tez

$(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$.

1.	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	założenie
2.	$\neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	z.d.n.
3.	$\varphi \wedge \psi$	ON: 2
4.	φ	OK: 3
5.	ψ	OK: 3
6.	$\neg\neg\varphi$	DN: 4
7.	$\neg\psi$	OA: 1,6.
8.	$\perp$	sprzeczność: 5, 7.

Dwie udowodnione wyżej tezy dają łącznie prawo negowania koniunkcji $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$. Regułą wtórną jest zatem reguła negowania koniunkcji NK: $\frac{\neg(\varphi\wedge\psi)}{\neg\varphi\vee\neg\psi}$.

Dygresja: Teodycea i kule w płocie

Pokażemy, że następujące wnioskowanie jest dedukcyjne:

Bóg jest miłosierny, o ile jest doskonały. Jeśli Bóg jest doskonały i stworzył Świat, to w Świecie nie ma Zła. Jednak w Świecie jest Zło. Ponadto, Bóg przecież stworzył Świat. Zatem Bóg nie jest doskonały lub nie jest miłosierny.

- p — Bóg jest doskonały.
- q — Bóg jest miłosierny.
- r — Bóg stworzył Świat.
- s — W Świecie jest Zło.

Dygresja: Teodycea i kule w płocie

$\{p \rightarrow q, (p \wedge r) \rightarrow \neg s, s, r\} \vdash_{jas} \neg p \vee \neg q$.

1.	$p \rightarrow q$	założenie
2.	$(p \wedge r) \rightarrow \neg s$	założenie
3.	s	założenie
4.	r	założenie
5.	$\neg\neg s$	DN: 3
6.	$\neg(p \wedge r)$	MT: 2,5
7.	$\neg p \vee \neg r$	NK: 6
8.	$\neg\neg r$	DN: 4
9.	$\neg p$	OA: 7,8
10.	$\neg p \vee \neg q$	DA: 9.

Zauważmy, że w dowodzie nie korzystano z pierwszego założenia.

Sprzeczne zbiory formuł

Zbiór formuł X jest (syntaktycznie) sprzeczny, jeśli istnieje formuła φ taka, że $X \vdash_{jas} \varphi$ oraz $X \vdash_{jas} \neg\varphi$. Jeśli X nie jest sprzeczny, to mówimy, że X jest (syntaktycznie) niesprzeczny.

Na mocy Twierdzenia o Zwartości wykazanie syntaktycznej sprzeczności zbioru formuł X polega na zbudowaniu dowodu założeniowego, którego przesłankami są elementy jakiegoś skończonego podzbioru zbioru X i w którego wierszach znajduje się para formuł wzajem sprzecznych.

Sprzeczne zbiory formuł: przykłady

Pokażemy, że $\{\varphi \vee \neg\psi, \chi \to \psi, \neg(\vartheta \wedge \neg\chi), \vartheta \wedge \neg\varphi\}$ jest sprzecznym zbiorem formuł.

1.	$\varphi \vee \neg\psi$	założenie
2.	$\chi \to \psi$	założenie
3.	$\neg(\vartheta \wedge \neg\chi)$	założenie
4.	$\vartheta \wedge \neg\varphi$	założenie
5.	ϑ	OK: 4
6.	$\neg\varphi$	OK: 4
7.	$\neg\psi$	OA: 1,6
8.	$\neg\chi$	MT: 2,7
9.	$\vartheta \wedge \neg\chi$	DK: 5,8
10.	$\perp$	sprzeczność: 3, 9.

Sprzeczne zbiory formuł: przykłady

Pokażemy, że $\{\neg\chi \wedge \psi, \ \varphi \to (\psi \to (\chi \vee \neg\vartheta)), \ \varphi, \ \vartheta \wedge (\psi \to \chi)\}$ jest sprzeczny.

1.	$\neg\chi \wedge \psi$	założenie
2.	$\varphi \to (\psi \to (\chi \vee \neg\vartheta))$	założenie
3.	φ	założenie
4.	$\vartheta \wedge (\psi \to \chi)$	założenie
5.	$\neg\chi$	OK: 1
6.	ψ	OK: 1
7.	$\psi \to (\chi \vee \neg\vartheta)$	RO: 2,3
8.	$\chi \vee \neg\vartheta$	RO: 7,6
9.	$\neg\vartheta$	OA: 8,5
10.	$\psi \to \chi$	OK: 4
11.	χ	RO: 10,6
12.	$\perp$	sprzeczność: 5, 11.

Dowody rozgałęzione wprost

Podamy jeszcze parę przykładów dowodów rozgałęzionych (dowodów przez rozważenie przypadków).

Dowód rozgałęziony wprost formuły $(\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \ldots (\psi_n \rightarrow \chi) \ldots))$ uważamy za zakończony, jeśli:

- (a) istnieje wyprowadzenie χ z **każdego** z dodatkowych założeń $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$
- (b) alternatywa $\chi_1 \vee \chi_2 \vee \ldots \vee \chi_m$ jest jednym z wierszy wyprowadzenia formuły χ.

Uzasadnienie. Jeśli (a), to do dowodu χ można dołączyć wszystkie implikacje $\chi_i \rightarrow \chi$, dla $1 \leqslant i \leqslant m$. Na mocy reguły dodawania poprzedników, można też dołączyć formułę: $(\chi_1 \vee \chi_2 \vee \ldots \vee \chi_m) \rightarrow \chi$. Na mocy (b) i reguły odrywania otrzymujemy χ.

Dowody rozgałęzione wprost: przykłady

$(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \to (\varphi \vee \psi)$

1.	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$	założenie
1.1.	φ	założenie dodatkowe
1.2.	$\varphi \vee \psi$	DA: 1.1.
2.1.	$\psi \wedge \chi$	założenie dodatkowe
2.2.	ψ	OK: 2.1.
2.3.	$\varphi \vee \psi$	DA: 2.2.
3.	$\varphi \vee \psi$	1; 1.1.$\Rightarrow$1.2.; 2.1.$\Rightarrow$2.3.

Komentarz w ostatnim wierszu czytamy: mamy alternatywę 1, wyprowadzenie 1.1.$\Rightarrow$1.2. formuły $\varphi \vee \psi$ z pierwszego członu alternatywy 1 oraz wyprowadzenie 2.1.$\Rightarrow$2.3. formuły $\varphi \vee \psi$ z drugiego członu alternatywy 1, czyli dowód rozgałęziony formuły $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \to (\varphi \vee \psi)$ jest zakończony.

Dowody rozgałęzione wprost: przykłady

$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \lor \chi) \to (\psi \lor \chi))$

1.	$\varphi \to \psi$	założenie
2.	$\varphi \lor \chi$	założenie
2.1.	φ	założenie dodatkowe
2.2.	ψ	RO: 1,2.1.
2.3.	$\psi \lor \chi$	DA: 2.2.
3.	$\psi \to (\psi \lor \chi)$	2.1.$\Rightarrow$2.3.
3.1.	χ	założenie dodatkowe
3.2.	$\psi \lor \chi$	DA: 3.1.
4.	$\chi \to (\psi \lor \chi)$	3.1.$\Rightarrow$3.2.
5.	$\psi \lor \chi$	2; 3; 4

Inny (bardziej skrupulatny) zapis dowodu rozgałęzionego.

Dowody rozgałęzione wprost: przykłady

$((\varphi \to \psi) \wedge (\chi \to \vartheta)) \to ((\varphi \vee \chi) \to (\psi \vee \vartheta))$

1.	$(\varphi \to \psi) \wedge (\chi \to \vartheta)$	założenie
2.	$\varphi \vee \chi$	założenie
3.	$\varphi \to \psi$	OK: 1
4.	$\chi \to \vartheta$	OK: 1
4.1.	φ	założenie dodatkowe
4.2.	ψ	RO: 3,4.1.
4.3.	$\psi \vee \vartheta$	DA: 4.2.
5.	$\varphi \to (\psi \vee \vartheta)$	4.1.$\Rightarrow$4.3.
5.1.	χ	założenie dodatkowe
5.2.	ϑ	RO: 4,5.1.
5.3.	$\psi \vee \vartheta$	DA: 5.2.
6.	$\chi \to (\psi \vee \vartheta)$	5.1.$\Rightarrow$5.3.
7.	$\psi \vee \vartheta$	2; 5; 6

Propozycja w Fitting 1990

- Reguła wprowadzania implikacji: $\frac{[\varphi \ldots \psi]}{\varphi \rightarrow \psi}$
- Reguły dla stałych: $\frac{\bot}{\varphi}$, $\frac{}{\top}$
- Reguły dla negacji: $\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}$, $\frac{[\varphi \ldots \bot]}{\neg\varphi}$, $\frac{[\neg\varphi \ldots \bot]}{\varphi}$

- Reguły dla α-formuł: $\frac{\alpha}{\alpha_1}$, $\frac{\alpha}{\alpha_2}$, $\frac{\alpha_1 \quad \alpha_2}{\alpha}$
- Reguły dla β-formuł: $\frac{\neg\beta_1 \quad \beta}{\beta_2}$, $\frac{\neg\beta_2 \quad \beta}{\beta_1}$, $\frac{[\neg\beta_1 \ldots \beta_2]}{\beta}$, $\frac{[\neg\beta_2 \ldots \beta_1]}{\beta}$

Zapis $[\varphi \ldots \psi]$ należy tu rozumieć tak samo, jak w omówionych wyżej przypadkach dowodów z dodatkowymi założeniami: oznacza on, że mamy wyprowadzenie ψ z założenia φ. Stosowane bywają różne kaligrafie: pudełka otaczające wyprowadzenia, kreski pionowe wyróżniające poddowody, drzewa, itd.

Dowody założeniowe

- Borkowski, L. 1991. *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe KUL, Lublin.
- Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary formal logic.* McGraw-Hill Book Company.
- Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* PWN, Warszawa.
- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej.* Białystok.
- Słupecki, J., Borkowski, L. 1962. *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Słupecki, J., Hałkowska, K, Piróg-Rzepecka, K. 1999. *Logika matematyczna.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Surma, S. 1967. Twierdzenia o dedukcji niewprost. *Studia Logica* **XX**, 151–166.

Ujęcia bardziej nowoczesne

- Fitting, M. 1996. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*. Springer, Berlin.
- Negri, S., von Plato, J. 2001. *Structural Proof Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Troelstra, A.S., Schwichtenberg, H. 2000. *Basic Proof Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.