Logika algebraiczna 4

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

2021

Plan na dziś:

- Kraty: definicja
- Kraty: przykłady
- Ideały, filtry, łańcuchy, atomy,...
- Kraty zupełne, algebraiczne, modularne, dystrybutywne

Następny wykład:

- Algebry Boole'a: definicja i przykłady
- Twierdzenie Stone'a o reprezentacji algebr Boole'a
- Algebry Heytinga: definicja i przykłady
- Algebry Boole'a z dodatkowymi operacjami

- *Definicja porządkowa*. Zbiór częściowo uporządkowany $(L, \leqslant)$ nazywamy *kratą*, gdy dla każdych $a, b \in L$ istnieją: kres dolny, oznaczany przez $\inf\{a, b\})$ oraz kres górny, oznaczany przez $\sup\{a, b\})$. Często używane oznaczenia dla $\inf\{a, b\}$: $a \wedge b$ (albo $a \cap b$); dla $\sup\{a, b\}$: $a \vee b$ (albo $a \cup b$).
- *Definicja algebraiczna*. Kratą nazywamy algebrę $(L, \wedge, \vee)$, spełniającą następujące warunki:

$$
\begin{array}{llll}
(L1) & a \wedge b = b \wedge a & (L1') & a \vee b = b \vee a \\
(L2) & a \wedge a = a & (L2') & a \vee a = a \\
(L3) & a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c & (L3') & a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \\
(L4) & a \wedge (a \vee b) = a & (L4') & a \vee (a \wedge b) = a
\end{array}
$$

A. Jeśli $(L, \leqslant)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym istnieją kres dolny $x \wedge y$ oraz górny $x \vee y$, to $\wedge$ i $\vee$ spełniają warunki $(L1)$–$(L4')$.
B. Jeśli $(L, \wedge, \vee)$ spełnia warunki $(L1)$–$(L4')$, to relacja $\leqslant$ określona waruniem $a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \wedge b = a$ jest częściowym porządkiem w L, w którym $a \wedge b$ jest kresem dolnym a i b, a $a \vee b$ jest kresem górnym a i b, a ponadto $a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \vee b = b$.

Dowód $A \to B$. Niech $(L, \leqslant)$ będzie kratą w sensie definicji porządkowej. Pokażemy, że kresy $\wedge$ i $\vee$ spełniają warunki $(L1)$–$(L4')$.

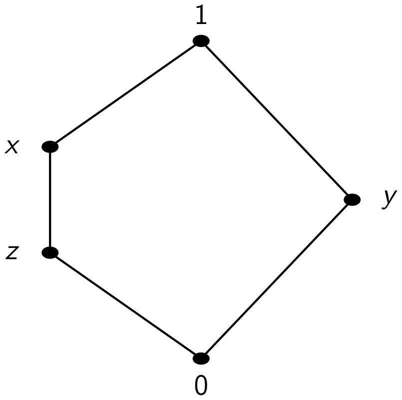
- Warunki $(L1)$, $(L2)$, $(L1')$, $(L2')$ są oczywiste.
- Łączność $\wedge$. Niech $d = a \wedge (b \wedge c)$. Wtedy $d \leqslant a$ i $d \leqslant b \wedge c$, a dalej $d \leqslant b$ i $d \leqslant c$. Skoro $d \leqslant a$ i $d \leqslant b$, to $d \leqslant a \wedge b$, a ponieważ $d \leqslant c$, więc $d \leqslant (a \wedge b) \wedge c$. Niech $e = (a \wedge b) \wedge c$. Wtedy kolejno: $e \leqslant c$, $e \leqslant a \wedge b$, $e \leqslant a$, $e \leqslant b$, $e \leqslant (b \wedge c)$, $e \leqslant a \wedge (b \wedge c)$.
- Podobnie dowodzimy łączności $\vee$.
- Na mocy definicji kresu dolnego: jeśli $a \leqslant b$, to $a \wedge b = a$, a jeśli $a \wedge b = a$, to $a \leqslant b$. Tak więc, $a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \wedge b = a$. Podobnie, $a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \vee b = b$, na mocy definicji kresu górnego.
- Warunki $(L4)$ i $(L4')$ są zatem spełnione, ponieważ $a \wedge b \leqslant a \leqslant a \vee b$.

Dowód $B \to A$. Niech $(L, \wedge, \vee)$ będzie kratą w sensie definicji algebraicznej. Pokażemy, że $(L, \leqslant)$ jest kratą w sensie definicji porządkowej, gdzie $a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \wedge b = a$.

- Relacja $\leqslant$ jest zwrotna na mocy $(L2)$. Jeśli $a \leqslant b$ i $b \leqslant c$, to $a \wedge b = a$ i $b \wedge c = b$. Mamy: $a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$, czyli $a \leqslant c$, a więc $\leqslant$ jest przechodnia. Jeśli $a \leqslant b$ i $b \leqslant a$, to $a \wedge b = a$ i $b \wedge a = b$, a zatem $\leqslant$ jest antysymetryczna.
- Pokażemy, że $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. Mamy: $(a \wedge b) \wedge a = a \wedge (b \wedge a) = a \wedge (a \wedge b) = (a \wedge a) \wedge b = a \wedge b$, czyli $a \wedge b \leqslant a$. Podobnie, $a \wedge b \leqslant b$. Jeśli $x \leqslant a$ i $x \leqslant b$, to $x \wedge a = x$ i $x \wedge b = x$. A zatem $x = x \wedge b = (x \wedge a) \wedge b = x \wedge (a \wedge b)$, co oznacza, że $x \leqslant (a \wedge b)$.
- Pokażemy, że $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Ponieważ $a = a \wedge (a \vee b)$, więc $a \leqslant a \vee b$ (podobnie, $b \leqslant a \vee b$). Jeśli $a \leqslant y$ i $b \leqslant y$, to $a \wedge y = a$ i $b \wedge y = b$. Mamy wtedy: $a \vee y = (a \wedge y) \vee y = y \vee (y \wedge a) = y$ (podobnie, $b \vee y = y$). Dalej: $(a \vee b) \wedge y = (a \vee b) \wedge (a \vee y) = (a \vee b) \wedge (a \vee (b \vee y)) = (a \vee b) \wedge ((a \vee b) \vee y) = a \vee b$, czyli $a \vee b \leqslant y$.

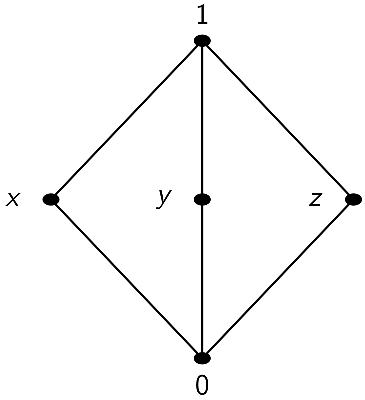
- Rodzina wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru, częściowo uporządkowana przez relację inkluzji jest kratą. Kresem dolnym jest iloczyn, a kresem górnym suma zbiorów.
- Rodzina wszystkich skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$, częściowo uporządkowana przez relację inkluzji jest kratą.
- Zbiór wszystkich dodatnich liczb naturalnych częściowo uporządkowany przez relację podzielności (bez reszty) jest kratą. Największy wspólny dzielnik jest tu kresem dolnym, a najmniejsza wspólna wielokrotność kresem górnym.
- Dowolny zbiór liniowo uporządkowany jest kratą.
- Rodzina $Eq(X)$ wszystkich relacji równoważności na zbiorze X jest kratą. Kresem dolnym jest iloczyn relacji, kresem górnym relacji $\theta, \psi \in Eq(X)$ jest $\theta \cup (\theta \circ \psi) \cup (\theta \circ \psi \circ \theta) \cup (\theta \circ \psi \circ \theta \circ \psi) \cup \ldots$.
- Rodzina $Con(\mathbf{A})$ wszystkich kongruencji algebry **A** jest kratą (patrz poprzedni wykład).

Krata N_5. Tę kratę nazywamy też pentagonem:



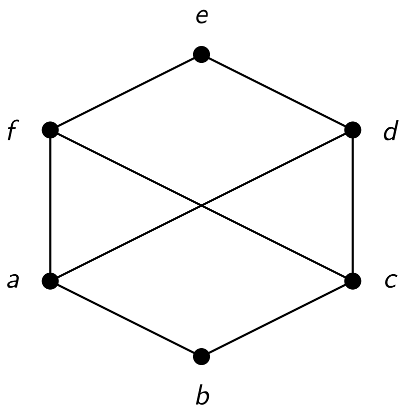
Mamy tutaj:
$x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = x$
$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = 0 \vee z = z$

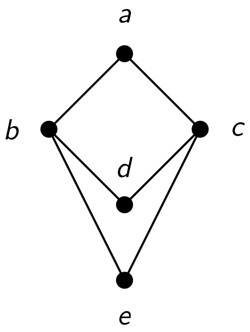
Krata M_3. Tę kratę nazywamy też diamentem:



Mamy tutaj:
$x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = x$
$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = 0 \vee 0 = 0$

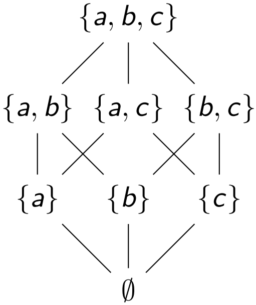
Diagramy Hassego dla struktur, które nie są kratami. Zauważmy, że nie są kratami następujące struktury:

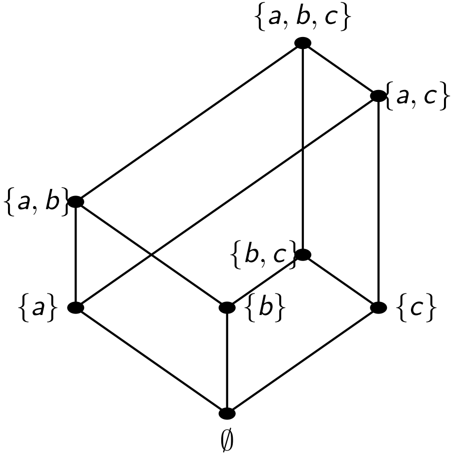


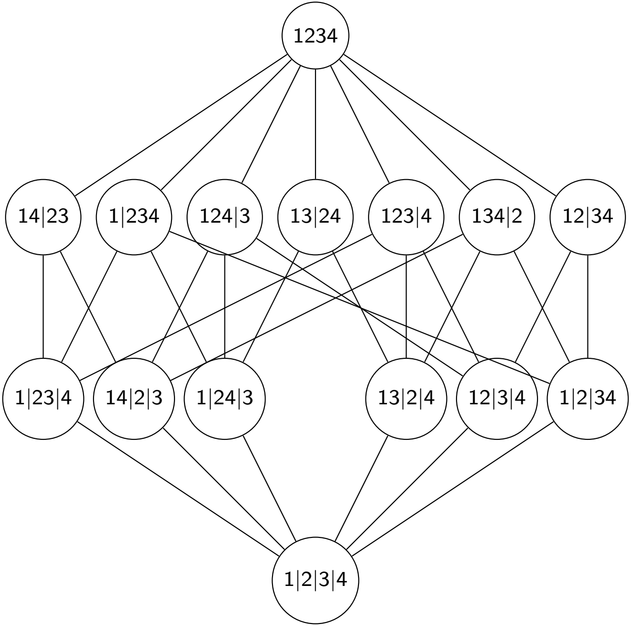


Po lewej: a i c nie mają kresu górnego; po prawej: b i c nie mają kresu dolnego.

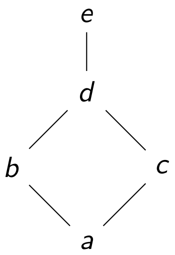
Krata podzbiorów zbioru trójelementowego. Zauważmy, że diagramy Hassego mogą z pozoru być różne, choć wyznaczają tę samą strukturę:






1234
14|23
1|234
124|3
13|24
123|4
134|2
12|34
1|23|4
14|2|3
1|24|3
13|2|4
12|3|4
1|2|34
1|2|3|4

Zauważmy, że podzbiór kraty sam może być kratą, ale nie być podkratą rozważanej kraty. Oto przykład takiej sytuacji:



Tutaj $\{a, b, c, d\}$ jest podkratą całej kraty, ale $\{a, b, c, e\}$, choć sam jest kratą, nie jest podkratą całej kraty.

- **Twierdzenie**. Dowolny homomorfizm f krat L_1 i L_2 jest przekształceniem monotonicznym, czyli dla wszystkich $x, y \in L_1$: jeśli $x \leqslant y$, to $f(x) \leqslant f(y)$.
- **Dowód**. Niech $x \leqslant y$. Wtedy $x \vee y = y$, a zatem $f(x \vee y) = f(y)$. Skoro f jest homomorfizmem, to $f(x) \vee f(y) = f(y)$, a to oznacza, że $f(x) \leqslant f(y)$.

$\square$

- Implikacja odwrotna nie zachodzi, co pokazuje następujący kontrprzykład:

$$
\begin{tikzcd}
& a \arrow[rr] \arrow[ddl, dash] \arrow[dr, dash] & & x \arrow[dd, dash] \\
& & c \arrow[dr] \arrow[ddl, dash] & \\
b \arrow[rrr] \arrow[dr, dash] & & & y \arrow[d, dash] \\
& d \arrow[rr] & & z
\end{tikzcd}
$$

- **Twierdzenie**. Surjekcja $f : L_1 \to L_2$ jest izomorfizmem krat wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $a, b \in L_1$: $(*)$ $a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \leqslant f(b)$.
- **Dowód**. Załóżmy, że f jest izomorfizmem. Wystarczy pokazać, że jeśli $f(a) \leqslant f(b)$, to $a \leqslant b$. Niech $f(a) \leqslant f(b)$. Wtedy $f(a) \vee f(b) = f(b)$, a zatem $f(a \vee b) = f(b)$. Ponieważ f jest bijekcją, więc $a \vee b = b$, a to oznacza, że $a \leqslant b$.
- Załóżmy, że zachodzi warunek $(*)$. Pokażemy najpierw, że f jest injekcją.
- Niech $f(a) = f(b)$. Wtedy $f(a) \leqslant f(b)$ i $f(b) \leqslant f(a)$. Na mocy $(*)$ mamy więc: $a \leqslant b$ i $b \leqslant a$, czyli $a = b$, a zatem f jest injekcją.

- Pokażemy, że f jest izomorfizmem.
- Niech $a, b \in L_1$. Ponieważ f jest surjekcją, więc istnieje $c \in L_1$ taki, że $f(a) \wedge f(b) = f(c)$. Stąd $f(c) \leqslant f(a)$ i $f(c) \leqslant f(b)$, a zatem $c \leqslant a$ i $c \leqslant b$, czyli $c \leqslant a \wedge b$.
- Ponieważ $a \wedge b \leqslant a$ i $a \wedge b \leqslant b$, więc $f(a \wedge b) \leqslant f(a)$ i $f(a \wedge b) \leqslant f(b)$. A zatem $f(a \wedge b) \leqslant f(a) \wedge f(b) = f(c)$. Na mocy $(*)$ mamy więc: $a \wedge b \leqslant c$. To łącznie z $c \leqslant a \wedge b$ daje $a \wedge b = c$.
- Pokazaliśmy więc, że $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b)$. Podobnie pokazujemy, że $f(a) \vee f(b) = f(a \vee b)$, co łącznie dowodzi, że f jest izomorfizmem.

$\square$

- Jeśli $(L, \leqslant)$ jest kratą, to $[a, b] = \{x \in L : a \leqslant x \leqslant b\}$ nazywamy przedziałem o końcach a i b.
- Jeśli $[a, b] = \{a, b\}$, to mówimy, że a bezpośrednio poprzedza b i piszemy wtedy $a \prec b$. Piszemy $a \preceq b$, jeśli $a \prec b$ lub $a = b$.
- Łańcuchem jest każdy liniowo uporządkowany podzbiór kraty.
- Antyłańcuchem jest każdy podzbiór kraty złożony wyłącznie z elementów nieporównywalnych względem porządku kraty.
- Element najmniejszy kraty nazywamy jej *zerem* ($\mathbf{0}$, o ile istnieje). Element największy kraty nazywamy jej *jedynką* ($\mathbf{1}$, o ile istnieje).
- Krata jest *ograniczona z góry (z dołu)* jeśli istnieje jej jedynka (zero). Krata jest ograniczona, jeśli jest ograniczona z góry i z dołu. W kratach ograniczonych $a \wedge \mathbf{1} = a$ i $a \vee \mathbf{0} = a$. W kratach ograniczonych możemy określić pojęcie uzupełnienia elementu kraty. Element b nazywamy uzupełnieniem elementu a, jeśli $a \wedge b = \mathbf{0}$ i $a \vee b = \mathbf{1}$.
- Kratą dualną do kraty $(L, \leqslant)$ nazywamy kratę $(L, \geqslant)$.

- Mówimy, że krata ma skończoną długość, jeśli istnieje liczba naturalna n taka, że każdy łańcuch w kracie ma długość niewiększą od n.
- Mówimy, że krata ma własność minimalności (maksymalności), jeśli dowolny jej niepusty podzbiór ma element minimalny (maksymalny).
- Krata ma własność DCC, jesli dla dowolnego ciągu jej elementów $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots$ istnieje liczba naturalna n taka, że $x_n = x_m$ dla wszystkich $m \geqslant n$. Własność DCC jest równoważna własności minimalności.
- Krata ma własność ACC, jesli dla dowolnego ciągu jej elementów $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots$ istnieje liczba naturalna n taka, że $x_n = x_m$ dla wszystkich $m \geqslant n$. Własność ACC jest równoważna własności maksymalności.

- Przez $J(L)$ oznaczamy zbiór wszystkich elementów kraty L, które są $\vee$-nierozkładalne: $x \in J(L)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a, b \in L$, jeśli $x = a \vee b$, to $x = a$ lub $x = b$. Jeśli krata ma własność DCC, to dowolny jej element jest sumą skończonej liczby elementów $\vee$-nierozkładalnych.
- Przez $M(L)$ oznaczamy zbiór wszystkich elementów kraty L, które są $\wedge$-nierozkładalne: $x \in M(L)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a, b \in L$, jeśli $x = a \wedge b$, to $x = a$ lub $x = b$. Jeśli krata ma własność ACC, to dowolny jej element jest iloczynem skończonej liczby elementów $\wedge$-nierozkładalnych.
- Podzbiór A kraty L nazywamy wypukłym, jeśli $a, b \in A$, $a \leqslant c \leqslant b$ implikuje, że $c \in A$. Każdy przedział kraty jest zbiorem wypukłym (i jednocześnie jest podkratą kraty L).

- Elementy minimalne w $(L - \{\mathbf{0}\}; \leqslant)$ nazywamy *atomami*.
- Elementy maksymalne w $(L - \{\mathbf{1}\}; \leqslant)$ nazywamy *koatomami*.
- Krata jest *atomowa*, jeśli każdy jej niezerowy element jest niemniejszy od pewnego atomu.
- Krata jest *bezatomowa*, jeśli nie ma atomów.
- Każda krata skończona jest atomowa.
- Dla dowolnego zbioru X krata $(\wp(X), \cap, \cup)$ jest atomowa.
- Niech elementami L będą sumy skończonej liczby przedziałów półdomkniętych (tj. $(-\infty, a), [b, c), [d, +\infty), (-\infty, +\infty)$) zbioru liczb rzeczywistych. Wtedy $(L, \cap, \cup)$ jest bezatomowa.
- Niech X będzie zbiorem nieskończonym i niech $\sim \subseteq \wp(X) \times \wp(X)$ będzie relacją taką, że $A \sim B$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $A \div B$ jest zbiorem skończonym. Wtedy $\sim$ jest kongruencją kraty $(\wp(X), \cap, \cup)$. Krata ilorazowa $(\wp(X)/_{\sim}, \cap/_{\sim}, \cup/_{\sim})$ jest bezatomowa.

- Niepusty podzbiór $\triangle$ kraty $(L; \leqslant)$ nazywamy *ideałem*, gdy:
  1. jeśli $x, y \in \triangle$, to $x \vee y \in \triangle$
  2. jeśli $x \in \triangle$ oraz $y \leqslant x$, to $y \in \triangle$.
- Ideał nazywamy właściwym, jeśli $\triangle \neq L$. Ideał właściwy $\triangle$ nazywamy ideałem pierwszym, jeśli $a \wedge b \in \triangle$ implikuje, że $a \in \triangle$ lub $b \in \triangle$. Jeśli krata L ma zero, to każdy jej ideał zawiera zero.
- Najmniejszy ideał, zawierający zbiór $X \subseteq L$ nazywamy ideałem generowanym przez X. Jeśli $X = \{a\}$, to ideał ten nazywamy ideałem głównym (generowanym przez a) i oznaczamy go przez $(a]$.
- Każdy ideał w L jest podkratą kraty L. Zbiór wszystkich ideałów kraty L jest kratą: kresem dolnym dwóch ideałów jest ich iloczyn teoriomnogościowy, a kresem górnym ideał generowany przez ich teoriomnogościową sumę. Przekształcenie $f(a) = (a]$ jest zanurzeniem kraty L w kratę jej ideałów.
- Ideałem maksymalnym nazywamy każdy ideał właściwy, który nie zawiera się w żadnym ideale różnym od niego. W kracie skończonej ideałami maksymalnymi są ideały główne generowane przez koatomy.

- Niepusty podzbiór ∇ kraty $(L; \leqslant)$ nazywamy *filtrem*, gdy:
  1. jeśli $x, y \in \nabla$, to $x \wedge y \in \nabla$
  2. jeśli $x \in \nabla$ oraz $x \leqslant y$, to $y \in \nabla$.
- Filtr w L jest właściwy, jeśli jest różny od L. Każdy filtr w L jest podkratą kraty L. Jeśli krata $(L, \leqslant)$ ma jedynkę $\mathbf{1}$, to zbiór $\{\mathbf{1}\}$ jest jej filtrem, nazywanym *filtrem jednostkowym*.
- Dla dowolnego $x \in L$ zbiór $\{y \in L : x \leqslant y\}$ jest filtrem, nazywanym *filtrem głównym generowanym przez* x. Filtr, który nie jest główny, nazywamy *niegłównym*. Filtr główny, generowany przez $\{a\}$ oznaczamy $[a)$.
- Zbiór wszystkich filtrów kraty L jest kratą: kresem dolnym dwóch filtrów jest tu ich iloczyn teoriomnogościowy, a kresem górnym filtr generowany przez ich teoriomnogościową sumę. Przekształcenie $f(a) = [a)$ jest zanurzeniem kraty L w kratę jej filtrów.
- Filtrem maksymalnym (ultrafiltrem) nazywamy każdy filtr właściwy, który nie jest zawarty w żadnym różnym od niego filtrze. W kracie skończonej filtrami maksymalnymi są filtry główne generowane przez atomy kraty.

- Krata jest *zupełna*, jeśli każdy jej podzbiór ma kres dolny oraz kres górny. Kres dolny zbioru A oznaczamy zwykle przez $\bigwedge A$, a kres górny przez $\bigvee A$. Każda krata zupełna L ma element największy $\mathbf{1} = \bigvee L$ oraz element najmniejszy $\mathbf{0} = \bigwedge L$.
  1. Krata $(\wp(X); \cap, \cup)$ wszystkich podzbiorów zbioru X jest zupełna. Kresem dolnym rodziny podzbiorów jest ich iloczyn, a kresem górnym ich suma.
  2. Krata $(\mathbb{N}_+, NWD, NWW)$ nie jest zupełna.
  3. Jeśli $\mathbf{A}$ jest dowolną algebrą, to zarówno rodzina wszystkich jej podalgebr, jak i rodzina wszystkich jej kongruencji jest kratą zupełną.
  4. Jeśli L jest kratą ograniczoną, to kraty jej ideałów i filtrów są zupełne.

- Operatorem domknięcia na zbiorze A nazywamy funkcję, $C : \wp(A) \to \wp(A)$ taką, że:
  1. $X \subseteq C(X)$
  2. $C(C(X)) = C(X)$
  3. jeśli $X \subseteq Y$, to $C(X) \subseteq C(Y)$.
- Jeśli C jest operatorem domknięcia na A, to każdy zbiór $X \subseteq A$ taki, że $X = C(X)$ nazywamy zbiorem C-domkniętym. Rodzina wszystkich zbiorów C-domkniętych jest zamknięta na iloczyny dowolnych swoich podrodzin. Ponadto, rodzina ta jest kratą zupełną. Kresem dolnym zbioru jej elementów jest ich iloczyn, a kresem górnym C-domknięcie ich sumy.
- **Twierdzenie** (o reprezentacji krat zupełnych). Dla dowolnej kraty zupełnej $(L, \leqslant)$ istnieje operator domknięcia C na zbiorze L taki, że $(L, \leqslant)$ jest izomorficzna z kratą wszystkich zbiorów C-domkniętych.
- **Dowód**. Dla $X \subseteq L$ niech $C(X) = (\bigvee X]$. Pokażemy, że C jest operatorem domknięcia.

- *Zwrotność*. Jeśli $a \in X$, to $a \leqslant \bigvee X$, a więc $a \in C(X)$.
- *Idempotencja*. Mamy $\bigvee X \leqslant \bigvee C(X)$. Jeśli $a \in C(X)$, to $a \leqslant \bigvee X$, a zatem $\bigvee C(X) \leqslant \bigvee X$. Mamy więc $\bigvee X = \bigvee C(X)$, a stąd $(\bigvee X] = (\bigvee C(X)]$.
- *Monotoniczność*. Jeśli $X \subseteq Y$, to $\bigvee X \subseteq \bigvee Y$, co implikuje, że $(\bigvee X] \subseteq (\bigvee X]$.
- *Izomorfizm*. Niech $F = \{C(X) : X \subseteq L\}$. Wtedy $(F, \subseteq)$ jest kratą zupełną. Niech $f : L \to F$ będzie funkcją taką, że $f(a) = (a]$ (czyli $f(a) = C(\{a\})$). Wtedy f jest homomorfizmem. Ponieważ $F = \{(a] : a \in L\}$, więc f jest surjekcją. Jeśli $f(a) = f(b)$, to $(a] = (b]$, a zatem $a = b$, czyli f jest injekcją. Pokazaliśmy więc, że $(L, \leqslant) \cong (F, \subseteq)$.

$\square$

- Niech L będzie kratą zupełną. Element $a \in L$ nazywamy zwartym, jeśli dla każdego podzbioru $X \subseteq L$: jeżeli $a \leqslant \bigvee X$, to $c \leqslant \bigvee Y$, dla pewnego skończonego $Y \subseteq X$.
- Mówimy, że krata $(L, \leqslant)$ jest *algebraiczna*, jeśli L jest kratą zupełną i dowolny jej element jest sumą elementów zwartych kraty L.

1. Każda krata skończona jest algebraiczna.
2. Krata wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru jest kratą algebraiczną. Elementami zwartymi tej kraty są skończone podzbiory zbioru X.
3. Jeśli operator domknięcia C na zbiorze X spełnia warunek: $C(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X \wedge |Y| < \aleph_0\}$, to krata wszystkich podzbiorów C-domknietych jest algebraiczna.
4. Kraty podalgebr i kongruencji dowolnej algebry są algebraiczne.

Element a kraty zupełnej L nazywamy zupełnie $\wedge$-nierozkładalnym (odpowiednio, zupełnie $\vee$-nierozkładalnym), jeśli dla dowolnego $X \subseteq L$: jeżeli $a = \bigwedge X$, to $a \in X$ (odpowiednio, jeżeli $a = \bigvee X$, to $a \in X$). Każdy element kraty algebraicznej można przedstawić w postaci iloczynu elementów zupełnie $\vee$-nierozkładalnych.

- Mówimy, że krata $(L, \leqslant)$ jest *modularna*, jeśli dla wszystkich $a, b, c \in L$: jeżeli $c \leqslant a$, to $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$.
  1. Krata M_3 (diament) jest modularna.
  2. Krata N_5 (pentagon) nie jest modularna.
  3. Dowolny łańcuch jest kratą modularną.
  4. Krata jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera jako podkraty kraty N_5.
  5. Krata jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy $((a \wedge c) \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

Udowodnimy niektóre z tych stwierdzeń, ale najpierw udowodnimy:

Twierdzenie. W dowolnej kracie $(L, \wedge, \vee)$:

1. $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leqslant a \wedge (b \vee c)$ oraz $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
2. Jeśli $c \leqslant a$, to $(a \wedge b) \vee c \leqslant a \wedge (b \vee c)$. Jeśli $a \leqslant c$, to $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c$.
3. $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leqslant (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

- **Dowód**. 1) Ponieważ $b \leqslant b \vee c$ oraz jeśli $y \leqslant x$, to $a \wedge y \leqslant a \wedge x$, więc $a \wedge b \leqslant a \wedge (b \vee c)$. Podobnie, ponieważ $c \leqslant b \vee c$ oraz jeśli $y \leqslant x$, to $a \wedge y \leqslant a \wedge x$, więc $a \wedge c \leqslant a \wedge (b \vee c)$. A zatem $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leqslant a \wedge (b \vee c)$.
- Dalej, mamy $a \vee (b \wedge c) \leqslant a \vee b$ oraz $a \vee (b \wedge c) \leqslant a \vee c$, a zatem $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
- 2) Niech $c \leqslant a$. Trzeba pokazać, że $a \wedge b \leqslant a \wedge (b \vee c)$ oraz $c \leqslant a \wedge (b \vee c)$. Skoro $b \leqslant b \vee c$, to $a \wedge b \leqslant a \wedge (b \vee c)$. Ponieważ $c \leqslant b \vee c$, więc $a \wedge c \leqslant a \wedge (b \vee c)$. Skoro $c \leqslant a$, to $a \wedge c = c$ oraz $c \leqslant a \wedge (b \vee c)$. A zatem $(a \wedge b) \vee c \leqslant (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Podobnie pokazujemy, że jeśli $a \leqslant c$, to $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c$.

- 3) Trzeba pokazać, że:
  $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leqslant a \vee b$
  $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leqslant b \vee c$
  $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leqslant c \vee a$.
- Mamy:
  $a \wedge b \leqslant b \leqslant a \vee b$, a więc $a \wedge b \leqslant a \vee b$
  $b \wedge c \leqslant b \leqslant a \vee b$, a więc $b \wedge c \leqslant a \vee b$
  $a \wedge c \leqslant a \leqslant a \vee b$, a więc $c \wedge a \leqslant a \vee b$
- A zatem $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leqslant a \vee b$. W podobny sposób pokazujemy, że $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leqslant b \vee c$ oraz $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leqslant c \vee a$.

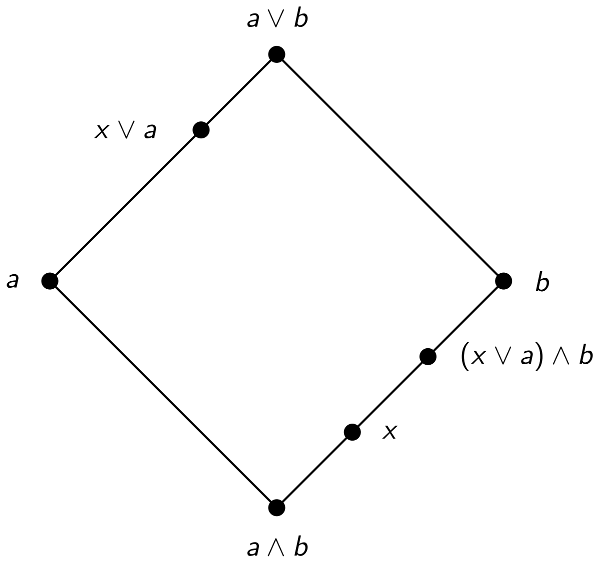
$\square$

Dwa następne twierdzenia charakteryzują kraty modularne.

- **Twierdzenie**. Niech $(L, \wedge, \vee)$ będzie kratą modularną. Dla $a, b \in L$ niech funkcje $f_b : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b]$ i $g_a : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b]$ będą określone wzorami $f_b(x) = x \wedge b$, $g_a(x) = x \vee a$. Wtedy f_b oraz g_a są izomorfizmami wymienionych przedziałów.
- **Dowód**. Pokażemy, że f_b jest surjekcją. Niech $t \in [a \wedge b, b]$. Wtedy $a \wedge b \leqslant t$ i $t \vee a \in [a, a \vee b]$.
- Ponieważ $t \leqslant b$, a rozważana krata jest modularna, więc $f_b(a \vee t) = (a \vee t) \wedge b = (a \wedge b) \vee t = t$.
- Oznacza to, że f_b-obrazem przedziału $[a, a \vee b]$ jest cały przedział $[a \wedge b, b]$.

- Pokażemy, że dla $x, y \in [a, a \vee b]$ mamy: $f_b(x) \leqslant f_b(y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leqslant y$.
- Jeśli $f_b(x) \leqslant f_b(y)$, to $x \wedge b \leqslant y \wedge b$, a zatem $a \vee (x \wedge b) \leqslant a \vee (y \wedge b)$.
- Ponieważ $a \leqslant x$, a rozważana krata jest modularna, więc $a \vee (x \wedge b) = x \wedge (a \vee b) = x$. Podobnie $a \vee (y \wedge b) = y \wedge (a \vee b) = y$. Mamy zatem $x \leqslant y$.
- Jeśli $x \leqslant y$, to oczywiście $f_b(x) \leqslant f_b(y)$.
- Na mocy udowodnionego wcześniej twierdzenia (podającego warunek konieczny i wystarczający, aby surjekcja krat była ich izomorfizmem), f_b jest izomorfizmem.
- Podobnie dowodzimy, że g_a jest izomorfizmem.

□



Twierdzenie nie zachodzi dla krat, które nie są modularne.

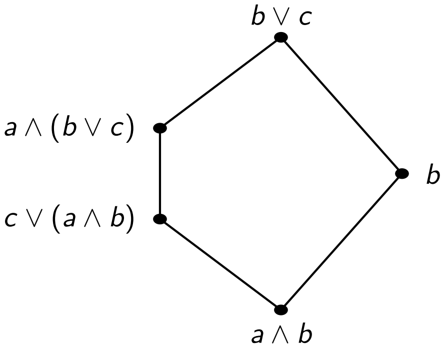
Twierdzenie (Dedekind). Następujące warunki są równoważne:

1. $(L, \wedge, \vee)$ jest modularna (jeżeli $c \leqslant a$, to $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$).
2. $(L, \wedge, \vee)$ spełnia warunek $((x \wedge z) \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.
3. $(L, \wedge, \vee)$ nie zawiera podkraty izomorficznej z N_5.

- **Dowód**. 1) $\rightarrow$ 2) Niech $x, y, z \in L$. Oznaczmy $a = z$, $b = y$, $c = x \wedge z$. Wtedy $c \leqslant a$. Na mocy warunku modularności, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$, co przy przyjętych oznaczeniach jest tym samym, co $((x \wedge z) \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.
- 2) $\rightarrow$ 3). Niech krata N_5 będzie zadana przez warunki: $0 < x < z < 1$ i $0 < y < 1$. Załóżmy, że $(L, \wedge, \vee)$ zawiera kopię tej kraty. Wtedy:
  1. $((x \wedge z) \vee y) \wedge z = (x \vee y) \wedge z = 1 \wedge z = z$
  2. $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) = x \vee 0 = x$.

  Nie zachodzi zatem warunek 2).

- 3) $\rightarrow$ 1). Przypuśćmy, że $(L, \wedge, \vee)$ nie jest modularna. Istnieją wtedy $a, b, c \in L$ takie, że $c \leqslant a$ oraz $a \wedge (b \vee c) > (a \wedge b) \vee c$.
- Wtedy $(L, \wedge, \vee)$ zawiera następującą podkratę:



Trzeba pokazać, że wszystkie te elementy są różne i uporządkowane w podany sposób.

- Mamy: $a \wedge b \leqslant b \leqslant b \vee c$ oraz $a \wedge b \leqslant c \vee (a \wedge b) < a \wedge (b \vee c) \leqslant b \vee c$. Nierówność ostra zachodzi na mocy przyjętego założenia.
- $b \vee (c \vee (a \wedge b)) = (b \vee c) \vee (a \wedge b) = b \vee c$
- $b \wedge (a \wedge (b \vee c)) = (a \wedge b) \wedge (b \vee c) = a \wedge b$.
- Ponadto, wszystkie powyższe nierówności są ostre, gdyż w przeciwnym przypadku mielibyśmy $c \vee (a \wedge b) = a \wedge (b \vee c)$, sprzecznie z poczynionym założeniem.

□

- Mówimy, że krata $(L, \leqslant)$ jest *dystrybutywna*, jeśli dla wszystkich $x, y, z \in X$:
  A. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
  B. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

  1. Warunki A i B są równoważne.
  2. Krata wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru X jest dystrybutywna.
  3. Krata M_3 (diament) nie jest dystrybutywna.
  4. Krata N_5 (pentagon) nie jest dystrybutywna.
  5. Każda krata dystrybutywna jest modularna.
  6. Każda krata, która ma mniej niż 5 elementów jest dystrybutywna.

- **Twierdzenie** (Birkhoff). Następujące warunki są równoważne:

  1. Krata $(L, \wedge, \vee)$ jest dystrybutywna.
  2. W kracie $(L, \wedge, \vee)$ spełniony jest warunek: $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.
  3. $(L, \wedge, \vee)$ nie zawiera, jako podkraty, ani N_5 ani M_3.

□

- **Twierdzenie**. Niech $(L, \wedge, \vee)$ będzie kratą dystrybutywną z zerem $\mathbf{0}$ i jedynką $\mathbf{1}$. Wtedy istnieje co najwyżej jedno uzupełnienie dowolnego jej elementu.
- **Dowód**. Przypuśćmy, że element a ma dwa różne uzupełnienia a_1 i a_2. Wtedy:
  1. $a_1 =$
  2. $\mathbf{1} \wedge a_1 =$
  3. $(a \vee a_2) \wedge a_1 =$
  4. $(a \wedge a_1) \vee (a_2 \wedge a_1) =$
  5. $\mathbf{0} \vee (a_2 \wedge a_1) =$
  6. $a_2 \wedge a_1$.
- Tak więc, $a_1 \leqslant a_2$. Zamieniając w powyższym rozumowaniu a_1 na a_2 oraz a_2 na a_1 otrzymamy $a_2 \leqslant a_1$.
- Ostatecznie więc $a_1 = a_2$.

$\square$

W kratach M_3 i N_5 pewne elementy mają więcej niż jedno uzupełnienie.

- Niech $(L, \wedge, \vee)$ będzie kratą, a $J(L)$ zbiorem wszystkich elementów $\vee$-nierozkładalnych tej kraty: $x \in J(L)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a, b \in L$, jeśli $x = a \vee b$, to $x = a$ lub $x = b$.
- Jeśli $(P, \leqslant)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to niech $H(P) = \{A \subseteq P : \forall x \forall y\ (x \in A \wedge y \leqslant x \rightarrow y \in A)\}$. Wtedy $(H(P), \cap, \cup)$ jest kratą dystrybutywną.
- **Twierdzenie**. Jeśli $(L, \wedge, \vee)$ jest skończoną kratą dystrybutywną, to odwzorowanie $f : L \rightarrow \wp(L)$ określone wzorem $f(a) = \{x \in L : x \leqslant a \wedge x \in J(L)\}$ jest izomorfizmem krat $(L, \wedge, \vee)$ i $(H(J(L)), \cap, \cup)$.
- **Dowód**. Pokażemy, że:
  1. f jest surjekcją.
  2. f jest injekcją.
  3. f jest homomorfizmem.

- 1) Niech $A \in H(J(L))$ i niech $a = \bigvee A$. Pokażemy, że $A = f(a)$.
- Jeśli $x \in A$, to $x \leqslant a$ i $x \in J(L)$, a zatem $x \in f(a)$.
- Jeśli $x \in f(a)$, to $x \leqslant a$, a więc $x = x \wedge a$, a skoro $a = \bigvee A$, to $x = x \wedge \bigvee A$.
- Ponieważ $(L, \wedge, \vee)$ jest kratą skończoną, więc $x = \bigvee\{x \wedge y : y \in A\}$.
- Skoro $x \in J(L)$, to $x = x \wedge y$ dla pewnego $y \in A$.
- Oznacza to, że $x \leqslant y$, a ponieważ $A \in H(J(L))$ i $y \in A$, to $x \in A$.
- Pokazaliśmy zatem, że $A = f(a)$.
- 2) Niech $f(a) = f(b)$. Wtedy $\bigvee f(a) = \bigvee f(b)$, ponieważ $(L, \wedge, \vee)$ jest kratą skończoną, więc każdy jej element jest supremum elementów $\vee$-nierozkładalnych poniżej tego elementu, czyli $\bigvee f(a) = a$ oraz $\bigvee f(b) = b$. A zatem $a = b$.

- 3) Pokażemy, że $f(a \vee b) = f(a) \cup f(b)$.
- Niech $x \in f(a \vee b)$. Wtedy $x = x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$. Ponieważ $x \in J(L)$, więc $x = x \wedge a$ lub $x = x \wedge b$. To oznacza, że $x \in f(a)$ lub $x \in f(b)$. Mamy więc $f(a \vee b) \subseteq f(a) \cup f(b)$.
- Niech $x \in f(a) \cup f(b)$, czyli $x \in f(a)$ lub $x \in f(b)$. Wtedy $x \leqslant a$ lub $x \leqslant b$, a zatem $x \leqslant a \vee b$, czyli $x \in f(a \vee b)$. Mamy więc $f(a) \cup f(b) \subseteq f(a \vee b)$.
- Pokażemy, że $f(a \wedge b) = f(a) \cap f(b)$.
- Niech $x \in f(a \wedge b)$. Wtedy $x \leqslant a \wedge b$, czyli $x \leqslant a$ i $x \leqslant b$, a stąd $x \in f(a)$ i $x \in f(b)$, a zatem $x \in f(a) \cap f(b)$. Mamy więc $f(a \wedge b) \subseteq f(a) \cap f(b)$.
- Niech $x \in f(a) \cap f(b)$. Wtedy $x \in f(a)$ i $x \in f(b)$, czyli $x \leqslant a$ i $x \leqslant b$, a stąd $x \leqslant a \wedge b$, co oznacza, że $x \in f(a \wedge b)$. Mamy więc $f(a) \cap f(b) \subseteq f(a \wedge b)$.

$\square$

- **Lemat Kuratowskiego-Zorna**. Niech $\mathcal{X} \subseteq \wp(A)$ będzie niepustą rodziną podzbiorów zbioru A. Jeśli dla każdego łańcucha $\mathcal{C}$ w $(\mathcal{X}, \subseteq)$ mamy $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{X}$, to w rodzinie $\mathcal{X}$ istnieje element maksymalny (względem inkluzji). □
- **Twierdzenie** (Stone). Niech $(L, \wedge, \vee)$ będzie kratą dystrybutywną, J ideałem, a D filtrem takimi, że $J \cap D = \emptyset$. Wtedy istnieje ideał pierwszy P taki, że $J \subseteq P$ i $P \cap D = \emptyset$.
- **Dowód**. Niech $\mathcal{X}$ będzie zbiorem wszystkich ideałów, zawierających J i rozłącznych z D. Wtedy $\mathcal{X} \neq \emptyset$, bo $J \in \mathcal{X}$. Niech $\mathcal{C} = (C_i)_{i \in I}$ będzie łańcuchem w $\mathcal{X}$ i niech $M = \bigcup \mathcal{C}$. Pokażemy, że:
    1. M jest ideałem.
    2. $J \subseteq M$.
    3. $M \cap D = \emptyset$.
    4. P (element maksymalny w $\mathcal{X}$) jest ideałem pierwszym.

- 1) Jeśli $a, b \in M$, to $a \in X$, $b \in Y$ dla $X, Y \in \mathcal{C}$, przy czym $X \subseteq Y$ lub $Y \subseteq X$. Niech $X \subseteq Y$, wtedy $a, b \in Y$. Ponieważ J jest ideałem, więc $a \vee b \in Y$, a zatem $a \vee b \in M$. Jeśli $b \leqslant a$, $a \in M$, to jeżeli $a \in X \in \mathcal{C}$, to $b \in X \subseteq M$. Zatem M jest ideałem.
- 2) Inkluzja $J \subseteq M$ jest oczywista.
- 3) Przypuśćmy, że istnieje $y \in M \cap D$. Wtedy $y \in C_i$ dla pewnego $i \in I$, a skoro $y \in D$, to $y \in C_i \cap D$, co jest sprzeczne z założeniem. A zatem $M \cap D = \emptyset$.
- 4) Na mocy Lematu Kuratowskiego-Zorna, w $\mathcal{X}$ istnieje element maksymalny P. Pokażemy, że P jest ideałem pierwszym, czyli że jeśli $a \wedge b \in P$, to $a \in P$ lub $b \in P$. Dla dowodu nie wprost, przypuśćmy, że P nie jest ideałem pierwszym. Istnieją wtedy $a \notin P$ i $b \notin P$ takie, że $a \wedge b \in P$.

- Rozważmy ideał $P \vee (a]$ (czyli najmniejszy ideał generowany przez $P \cup (a]$). Mamy $P \vee (a] \cap D \neq \emptyset$, na mocy maksymalności P.
- Tak więc, $P \vee (a] \cap D \neq \emptyset$ i $P \vee (b] \cap D \neq \emptyset$, czyli istnieją $p, q \in P$ takie, że $p \vee a \in D$ oraz $q \vee b \in D$.
- Ponieważ D jest filtrem, więc $x = (p \vee a) \wedge (q \vee b) \in D$.
- Z warunku dystrybutywności wynika, że: $x = ((p \vee a) \wedge q) \vee ((p \vee a) \wedge b) = (p \wedge q) \vee (a \wedge q) \vee (p \wedge b) \vee (a \wedge b)$.
- Ponieważ $p, q, a \wedge b \in P$, więc $x \in P$.
- To oznacza, że $x \in P \cap D$ i otrzymujemy sprzeczność. Pokazaliśmy zatem, że P jest ideałem pierwszym.

$\square$

- **Wniosek**. Jeśli $(L, \wedge, \vee)$ jest kratą dystrybutywną, J ideałem, $a \notin J$, to istnieje ideał pierwszy P taki, że $J \subseteq P$ oraz $a \notin P$.
- **Dowód**. Niech $a \in L - J$, $D = \{x \in L : a \leqslant x\}$. Wtedy $J \cap D = \emptyset$, bo jeśli $y \in D \cap J$, to $a \leqslant y$, a ponieważ J jest ideałem, więc $a \in J$, co daje sprzeczność.
- Na mocy poprzedniego twierdzenia istnieje ideał pierwszy P taki, że $J \subseteq P$, $P \cap D = \emptyset$, $a \notin P$.

$\square$

- **Wniosek**. Jeśli $(L, \wedge, \vee)$ jest kratą dystrybutywną i $a, b \in L$, $a \neq b$, to istnieje ideał pierwszy, zawierający dokładnie jeden z elementów a, b.
- **Dowód**. Załóżmy, że nie zachodzi $a \leqslant b$.
- Niech $D = \{x \in L : a \leqslant x\}$. Wtedy D jest filtrem, $a \in D$ i $b \notin D$.
- Niech $J = \{x \in L : x \leqslant b\}$. Wtedy J jest ideałem, $b \in J$ i $a \notin J$.
- Ponieważ $D \cap J = \emptyset$, więc istnieje ideał pierwszy P taki, że $J \subseteq P$ i $P \cap D = \emptyset$.
- Skoro $J \subseteq P$ i $b \in J$, to $b \in P$.
- Skoro $P \cap D = \emptyset$, $a \in D$, to $a \notin P$.
- Podobne rozumowanie przeprowadzamy przy założeniu, że nie zachodzi $b \leqslant a$.

□

- Pierścieniem zbiorów nazywamy dowolną rodzinę zbiorów zamknietą ze względu na teoriomnogościowe sumy i iloczyny. Każdy pierścień zbiorów jest oczywiście kratą dystrybutywną.
- Dla dowolnej kraty $(L, \wedge, \vee)$ niech $IP(L)$ oznacza zbiór wszystkich ideałów pierwszych tej kraty.
- **Twierdzenie** (o reprezentacji krat dystrybutywnych). Każda krata dystrybutywna jest izomorficzna z pierścieniem zbiorów.
- **Dowód**. Niech $(L, \wedge, \vee)$ będzie kratą dystrybutywną i niech $f(a) = \{P \in IP(L) : a \notin P\}$ dla $a \in L$.
- Jeśli $a \neq b$, to istnieje $P \in IP(L)$ taki, że $a \in P$ oraz $b \notin P$, co oznacza, że $P \in f(a)$ i $P \notin f(b)$. A zatem f jest injekcją. Trzeba pokazać, że f jest homomorfizmem, czyli że:
    1. $f(a \vee b) = f(a) \cup f(b)$
    2. $f(a \wedge b) = f(a) \cap f(b)$.

- 1) Niech $P \in IP(L)$. Trzeba pokazać, że $a \vee b \notin P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \notin P$ lub $b \notin P$. To jest równoznaczne z pokazaniem, że $a \vee b \in P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in P$ i $b \in P$.
- Jeśli $a \vee b \in P$, to skoro $a \leqslant a \vee b$, $b \leqslant a \vee b$, a P jest ideałem, więc $a \in P$ oraz $b \in P$.
- Jeśli $a \in P$ oraz $b \in P$, P jest ideałem, to $a \vee b \in P$.
- 2) Niech $P \in IP(L)$. Trzeba pokazać, że $a \wedge b \notin P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \notin P$ i $b \notin P$. To jest równoznaczne z pokazaniem, że $a \wedge b \in P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in P$ lub $b \in P$.
- Jeśli $a \wedge b \in P$, to $a \in P$ lub $b \in P$, gdyż P jest ideałem pierwszym.
- Jeśli $a \in P$ lub $b \in P$, $a \wedge b \leqslant a$, $a \wedge b \leqslant b$, a P jest ideałem, to $a \wedge b \in P$.

Pokazaliśmy zatem, że $(L, \wedge, \vee)$ jest izomorficzna z podkratą kraty $(\wp(IP(L)), \cap, \cup)$. $\square$

- Jeśli relacja równoważności θ na kracie L spełnia warunek: jeśli $a\theta b$, to dla wszystkich $c \in L$, $a \wedge c\theta b \wedge c$ oraz $a \vee c\theta b \vee c$, to θ jest kongruencją kraty L.
- Zbiór wszystkich kongruencji kraty L jest kratą. Kresem dolnym pary kongruencji jest ich iloczyn teoriomnogościowy, a kresem górnym najmniejsza kongruencja zawierająca ich teoriomnogościową sumę.
- Jeśli kongruencje α i β są przemienne (czyli $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$), to ich kresem górnym jest $\alpha \circ \beta$.
- Jeśli θ jest kongruencją kraty L, to każda jej klasa abstrakcji jest wypukłą podkratą kraty L.
- Jedynymi kongruencjami w kracie M_3 (diament) są: identyczność oraz pełna relacja równoważności na M_3.