ZAGADKI

WYKŁAD 7: ALGORYTMY I OBLICZENIA

KOGNITYWISTYKA UAM (III, IV, V)

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

Wyobrażasz sobie świat *bez* komputerów, internetu, telewizji? Oraz *bez* wszelakich dalszych gadżetów elektronicznych, którymi się zabawiasz lub które służą ci do ochrony zdrowia, zapewnienia bezpieczeństwa, itd.? Cóż, taki *był* kiedyś świat. Natomiast obecna jego postać, naszpikowana elektronicznymi urządzeniami przetwarzającymi informację nigdy by nie powstała, gdyby matematycy nie zajęli się tym, czym jest informacja, jak ją przetwarzać, na czym polegają obliczenia, itd. Aby powstał pracujący komputer, potrzebna była wprzódy matematyczna wizja tego, czym jest obliczanie. Czy potrafisz – choćby intuicyjnie – powiedzieć, w pełnej ogólności, co to znaczy, iż coś *można obliczyć*? Czy *wszystko* można obliczyć, czy też istnieje *Nieobliczalne*? Z bolesnych doświadczeń szkolnych wiesz, że łatwiej jest dodawać niż mnożyć, łatwiej mnożyć niż dzielić. Cóż miałoby znaczyć, że coś jest *trudno* obliczalne? W tym dziale także umieszczamy zagadki kombinatoryczne.

1 Notacja strzałkowa Knutha

W szkole poznałaś takie operacje arytmetyczne jak: dodawanie, mnożenie, odejmowanie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie oraz logarytmowanie. Frapowało cię być może pytanie, czy są to już wszystkie operacje na liczbach, które rozważa się w matematyce. Może zastanawiałaś się również nad tym, jak szybko zwiększają się wartości funkcji wykorzystujących te operacje.

Mnożenie to iterowane dodawanie, a potęgowanie to iterowane mnożenie. Czy to już kres możliwości otrzymania coraz to szybciej rosnących funkcji? Przekonamy się, że tak nie jest. Pomocna będzie przy tym sprytna notacja, wymyślona przez Knutha.

Pisząc dalej a^{b^c} mamy na myśli funkcję $a^{(b^c)}$ (a nie funkcję $(a^b)^c$ — sprawdź, że to różne funkcje!). Podobnie, $a^{b^{c^d}}$ to $a^{(b^{(c^d)})}$, itd.

Zdefiniujemy teraz funkcję ${}^b a$ przez warunki:

1. ${}^0 a = 1$
2. ${}^{(b+1)} a = a^{({}^b a)}$.

Wtedy, jak widać z definicji:

- ${}^1 a = a^{({}^0 a)} = a^1 = a$
- ${}^2 a = a^{({}^1 a)} = a^a$
- ${}^3 a = a^{({}^2 a)} = a^{a^a}$
- ${}^n a = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ (a występuje n razy).

Porównajmy:

- $a \cdot b = a + a + \ldots + a$ (a występuje b razy)
- $a^b = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (a występuje b razy)
- ${}^b a = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ (a występuje b razy).

W literaturze wprowadza się oznaczenia (notacja strzałkowa Knutha):

- $a \uparrow b = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (a występuje b razy)
- $a \uparrow\uparrow b = a \uparrow (a \uparrow (\ldots \uparrow a) \ldots)$ (a występuje b razy)
- a zatem $a \uparrow\uparrow b = {}^b a = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ (a występuje b razy)
- $a \uparrow\uparrow\uparrow b = a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\ldots (a \uparrow\uparrow a) \ldots))$ (a występuje b razy)
- $a \uparrow^m b = a \uparrow^{m-1} (a \uparrow^{m-1} \ldots (a \uparrow^{m-1} a) \ldots)$ (a występuje b razy).

Czy potrafisz obliczyć np.:

1. $2 \uparrow^2 3$
2. $2 \uparrow^3 3$
3. $3 \uparrow^3 2$

2 Nieskończona wieża pierwiastków

Pytanie egzaminacyjne w jednej ze szkół amerykańskich w 1960 roku brzmiało: jeśli $x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = 2$, to ile wynosi x? Czy potrafisz odpowiedzieć?

3 Funkcja Ackermanna

Dla dowolnych $m > 0$ oraz $n > 0$ niech:

1. $Ack(0, n) = n + 1$
2. $Ack(m, 0) = Ack(m - 1, 1)$
3. $Ack(m, n) = Ack(m - 1, Ack(m, n - 1))$.

Wprowadźmy też oznaczenia:

1. $A_m(n) = A(m, n)$
2. $A(n) = A_n(n)$ (czyli $A(n) = Ack(n, n)$).

Czy potrafisz obliczyć kilka pierwszych wartości funkcji A?

4 Muszkieterzy na moście

Czterech muszkieterów chce przeprawić się przez most nocą. Mają tylko jedną świeczkę. Choć nie przystoi to dzielnym muszkieterom, to boją się iść bez niej. Potrzebują na przejście mostu odpowiednio: Atos 1 minutę, Aramis 2 minuty, D'Artagnan 5 minut, a Portos 10 minut. Most jest w kiepskim stanie: jednocześnie mogą przejść po nim tylko dwie osoby, przy czym kiedy idą w parze, to szybszy idzie z prędkością wolniejszego. Jaki jest najkrótszy czas przeprawy (pamiętaj, że świeczka musi towarzyszyć każdemu przejściu mostu)?

5 Dzielenie wina

Dwóch studentów wybrało się do winiarni, aby uczcić zdany egzamin. Zamówili po 4 litry wina każdy. Podano im wino w jednym pełnym dzbanie o pojemności 8 litrów. Poprosili o drugi dzban, aby każdy mógł pić ze swojego. Barman dał im dwa puste dzbany: jeden o pojemności 3 litrów, a drugi o pojemności 5 litrów. W jaki sposób przy pomocy tych trzech dzbanów studenci podzielili wino na dwie równe części?

6 Kulka biskupa

Biskup Oresme rozwiązał metodą geometryczną następujący problem. Prędkość kulki równa jest jednostce w czasie pierwszej połowy odcinka czasu AB, dwóm jednostkom w czasie jednej czwartej tego odcinka, trzem jednostkom w czasie jednej ósmej tego odcinka, itd. Obliczyć całkowitą drogę przebytą przez kulkę.

Całkowita droga wyraża się w tym przypadku sumą szeregu nieskończonego:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \ldots + \frac{1}{2^n} \cdot n + \ldots$$

Czy potrafisz obliczyć tę sumę w sposób elementarny?

7 Wieże Hanoi

To klasyczna zagadka, która ma długą historię. Mamy trzy pionowe pręty oraz pewną liczbę dysków różnej wielkości, które można nawlekać na te pręty. W początkowej sytuacji wszystkie dyski nawleczone są na pierwszy z prętów, w kolejności od największego (na spodzie) do najmniejszego. Zadanie polega na przeniesieniu wszystkich dysków z tego pręta na jeden z pozostałych w taki sposób, iż:

1. za każdym razem przenosimy tylko jeden dysk
2. dysk większy nie może zostać położony na dysku mniejszym
3. można oczywiście wykorzystywać każdy z trzech prętów.

Jak wykonać to zadanie w minimalnej liczbie kroków?

8 Walec w kuli

W kulę o danym promieniu wpisać walec o maksymalnej objętości.

9 Kameleony

Na wyspie mieszkają trzy typy kameleonów: 10 jest brązowych, 14 szarych, a 15 czarnych. Gdy spotkają się dwa kameleony różnych kolorów, to oba zmieniają barwę na trzeci kolor. Czy jest możliwe, aby wszystkie kameleony uzyskały jeden kolor?

10 Szklanki

Na stole stoi n szklanek, wszystkie denkami do góry. W jednym ruchu możesz odwrócić $n-1$ z nich. Wyznacz wszystkie liczby n, dla których możliwe jest uzyskanie stanu, w którym wszystkie szklanki będą stały otworami ku górze.

Rozwiązania zagadek podane zostaną na wykładzie.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl