MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

WYKŁAD 8: GRANICE I CIĄGŁOŚĆ

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Na dzisiejszym wykładzie (oraz trzech następnych) zajmować będziemy się funkcjami rzeczywistymi (jednej zmiennej), czyli funkcjami $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rozważania te (a także problematyka poprzedniego wykładu) należą do działu matematyki nazywanego *analizą matematyczną*. Początki analizy matematycznej znajdujemy w pracach Fermata, Newtona, Leibniza, Eulera. W wieku XIX podstawy analizy zostały opracowane (Lagrange, Cauchy, Dedekind, Weierstrass, i inni) w takiej postaci matematycznej, która jest wykorzystywana do dzisiaj. Rozwinięto też *analizę zespoloną*, w której wyjściowym ciałem liczbowym jest ciało liczb zespolonych i która zajmuje się badaniem funkcji o argumentach oraz wartościach będących liczbami zespolonymi – ta problematyka jest niezwykle istotna we współczesnych zastosowaniach matematyki, jej omówienie pozostaje jednak poza ramami niniejszego usługowego kursu.

Ciało $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych uporządkowane w sposób zupełny (z metryką) stanowi podstawę analizy rzeczywistej. Pamiętamy, że w $\mathbb{R}$ istnieją struktury:

1. *algebraiczna*, wyznaczona przez operacje arytmetyczne na liczbach rzeczywistych;

2. *porządkowa*, wyznaczona przez ciągły porządek liczb rzeczywistych;

3. *topologiczna*, wyznaczona przez metrykę (funkcję odległości), definiowaną w sposób charakterystyczny dla przestrzeni euklidesowych.

Wszystkie te struktury zostaną teraz wykorzystane w badaniu funkcji rzeczywistych, a więc np. w ustalaniu rodzajów monotoniczności, osiągania wartości ekstremalnych (minimalnych lub maksymalnych), przebiegu zmienności funkcji, itd. Dzisiaj omówimy dwa pojęcia: *granicy* funkcji w punkcie oraz *ciągłości funkcji w punkcie.* Słuchaczy zachęcamy do śledzenia roli *aksjomatu ciągłości* w rozważanych konstrukcjach.

1 Funkcje jednej zmiennej rzeczywistej

Zakładamy, że słuchacze pamiętają treść wykładu trzeciego, w którym omówiono pojęcie *funkcji* oraz pojęcia z nim związane, np.: *dziedzina*, *przeciwdziedzina*, *obrazy* i *przeciwobrazy* zbioru względem funkcji, itp.
UWAGA. Będziemy rozważali funkcje $f : X \to Y$, gdzie X oraz Y są podzbiorami zbioru $\mathbb{R}$.

Niech $f : X \to Y$. Mówimy, że f jest *ograniczona*, gdy jej przeciwdziedzina (czyli zbiór jej wartości) jest ograniczony w $\mathbb{R}$. Oznacza to zatem, że f jest ograniczona, gdy istnieje liczba rzeczywista M taka, że $|f(x)| \leqslant M$ dla wszystkich $x \in X$. Funkcję, która nie jest ograniczona, nazywamy *nieograniczoną*. Warto wyróżnić dwa rodzaje ograniczenie funkcji:

1. $f : X \to Y$ jest *ograniczona z góry*, gdy $f[X]$ jest ograniczony z góry.
2. $f : X \to Y$ jest *ograniczona z dołu*, gdy $f[X]$ jest ograniczony z dołu.

Wprowadzone pojęcie powinno być znane słuchaczom ze szkoły.
PRZYKŁADY.

1. Funkcje $f(x) = \sin x$ oraz $f(x) = \cos x$ są ograniczone.
2. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ograniczona z dołu, ale nie jest ograniczona z góry w przedziale niewłaściwym $(0, \infty)$.
3. Żadna funkcja liniowa $f(x) = a \cdot x + b$, gdzie $a \neq 0$ nie jest ograniczona ani z dołu ani z góry.

Podobnie jak w przypadku ciągów, rozważamy różne rodzaje monotoniczności funkcji. Niech $f :\to \mathbb{R}$, gdzie $X \neq \emptyset$ oraz $X \subseteq \mathbb{R}$ Mówimy, że:

1. f jest *rosnąca* w X, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$;
2. f jest *malejąca* w X, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$;
3. f jest *niemalejąca* w X, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
4. f jest *nierosnąca* w X, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \geqslant f(x_2)$;

Niech X będzie przedziałem w $\mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest:

1. *wypukła* w X, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ oraz dowolnych $a, b \geqslant 0$ takich, że $a + b = 1$ zachodzi nierówność:

$$f(a \cdot x_1 + b \cdot x_2) \leqslant a \cdot f(x_1) + b \cdot f(x_2)$$

2. *wklęsła* w X, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ oraz dowolnych $a, b \geqslant 0$ takich, że $a + b = 1$ zachodzi nierówność:

$$f(a \cdot x_1 + b \cdot x_2) \geqslant a \cdot f(x_1) + b \cdot f(x_2)$$

Wszystkie powyżej wprowadzone pojęcia mają proste interpretacje geometryczne związane z wykresami funkcji.
PRZYKŁADY.

1. Funkcja $f(x) = x^2$ jest wypukła w dowolnym przedziale zbioru $\mathbb{R}$.
2. Funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest wklęsła w $[0, \infty)$.
3. Każda funkcja liniowa jest jednocześnie wypukła i wklęsła.

Pewne funkcje nazywa się *elementarnymi*. W tym wykładzie za takie funkcje uznamy:

1. *Funkcje stałe*. Niech $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ oraz $f : X \to \mathbb{R}$ Jeśli $f(x) = c$ dla wszystkich $x \in X$, to f nazywamy funkcją stałą.

2. *Funkcje liniowe*. Funkcje $f(x) = a \cdot x + b$, gdzie a oraz b są liczbami rzeczywistymi.

3. *Funkcje schodkowe*. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ oraz $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$. Jeśli f jest stała w każdym z przedziałów (x_{i-1}, x_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$, to f nazywamy funkcją schodkową.

4. *Funkcje łamane*. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ oraz $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$. Jeśli f jest liniowa w każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, to f nazywamy funkcją łamaną.

5. *Funkcje wielomianowe*. Wielomianem stopnia n nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o postaci:

$$f(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n,$$

gdzie $n \geqslant 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $a_0 \neq 0$.

6. *Funkcje wymierne*. Funkcją wymierną nazywamy funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ o postaci:

$$f(x) = \frac{a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n}{b_0 \cdot x^m + b_1 \cdot x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} \cdot x + b_m},$$

   gdzie $m, n \geqslant 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ oraz $a_0 \neq 0$ i $b_0 \neq 0$. W tym przypadku X jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, które nie są pierwiastkami wielomianu w mianowniku rozważanej funkcji (o ile licznik i mianownik nie mają wspólnych pierwiastków).

7. *Funkcje potęgowe*. Dla dowolnej liczby całkowitej α funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = x^\alpha$ jest nazywana funkcją potęgową. Jak pamiętamy z poprzedniego wykładu, można też określić funkcję potęgową dla dowolnego wykładnika rzeczywistego, przy czym wtedy jej dziedzina i przeciwdziedzina jest przedziałem niewłaściwym $[0, \infty)$. Dla każdej liczby rzeczywistej $\alpha \neq 0$ funkcją odwrotną do funkcji potęgowej $f(x) = x^\alpha$ jest funkcja $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$

8. *Funkcje wykładnicze*. Dla $a > 0$ funkcja $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ określona wzorem $f(x) = a^x$ jest nazywana funkcją wykładniczą. Słuchacze pamiętają ze szkoły, że dla $a > 1$ funkcja wykładnicza jest ściśle rosnąca, a dla $0 < a < 1$ jest ściśle malejąca. Szczególnie ważna dla dalszych rozważań jest funkcja wykładnicza e^x.

9. *Funkcje logarytmiczne*. Funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ nazywamy funkcją logarytmiczną. Stosujemy dla niej oznaczenie $\log_a x$ (gdzie liczbę a nazywamy podstawą logarytmu). Jej dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}_+$. Szczególnie ważna dla dalszych rozważań jest funkcja logarytmiczna o podstawie e: stosuje się dla niej oznaczenie $\ln x$.

10. *Funkcje trygonometryczne*. Znane słuchaczom ze szkoły funkcje: $\sin x$, $\cos x$, tg$x$, $\cot x$. Zakładamy, że słuchacze pamiętają, jakie są dziedziny i przeciwdziedziny tych funkcji, wiedzą, że są to funkcje *okresowe*, pamiętają wykresy tych funkcji.

Wykresy niektórych z wyżej wymienionych funkcji pokazano w wykładzie trzecim. W sieci dostępnych jest wiele programów edukacyjnych z matematyki, zawierających m.in. narzędzia do rysowania wykresów funkcji. Dla przykładu:

1. https://www.geogebra.org/

2. https://www.medianauka.pl/portal:matematyka

3. http://www.matemaks.pl/index.html
4. http://www.scilab.org/
5. http://fooplot.com/
6. https://rechneronline.de/function-graphs/

Niektóre własności funkcji elementarnych będą istotne dla dalszych rozważań. Dla przykładu, będziemy wykorzystywali fakt, że funkcja wykładnicza e^x oraz funkcja logarytmiczna $\ln x$ spełniają następujące nierówności (które otrzymują prostą interpretację graficzną i uzasadnione są np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, str. 134–135):

1. $e^x \geqslant 1 + x$ dla $x \in \mathbb{R}$
2. $e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$ dla $x < 1$
3. $\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$ dla $x > -1$.

Często wykorzystuje się również (łatwe do uzasadnienia) nierówności dotyczące funkcji trygonometrycznych, np. dla miary łukowej kąta $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$:

$$|x| \cdot \cos x \leqslant |\sin x| \leqslant |x|.$$

Wszystkie wyżej wymienione rodzaje funkcji elementarnych słuchacze znają z edukacji szkolnej. Zauważmy, że każda z tych funkcji podana jest wyraźnym wzorem, który określa, jakie operacje wykonać trzeba na argumencie funkcji, aby otrzymać jej wartość dla tego argumentu. Pamiętamy, że funkcje określać można również np. przez warunki rekurencyjne. Określenie funkcji determinuje jej dziedzinę oraz przeciwdziedzinę. Z samego określenia funkcji nie jest jednak bezpośrednio widoczne, jaki jest *przebieg zmienności* funkcji, czyli np. jak „szybko rośnie" (bądź: jak „szybko maleje") owa funkcja, czy pewne jej wartości są w jakiś sposób wyróżnione względem innych, itp. Badanie funkcji polega właśnie n.in. na odpowiedzi na tego typu pytania. Interesuje nas także np. to, czy zbieżność ciągu argumentów funkcji pociąga za sobą zbieżność ciągu wartości funkcji dla tych argumentów. Ponadto, ważnym zagadnieniem jest np. to, jak funkcja „zachowuje się" przy rozważeniu szczególnego rodzaju podzbiorów jej dziedziny (np. przedziałów domkniętych).

Omówimy za chwilę pojęcia: *granicy* (funkcji w punkcie) oraz *ciągłości* (funkcji w punkcie) w przypadku funkcji jednej zmiennej rzeczywistej i o wartościach rzeczywistych. Należy jednak podkreślić, że pojęcia te zdefiniować można, w całkiem podobny sposób, dla funkcji określonych w dowolnej przestrzeni euklidesowej, dowolnej przestrzeni metrycznej, a nawet w przypadku jeszcze ogólniejszych przestrzeni topologicznych. Jest tak ponieważ te właśnie pojęcia – *granicy* oraz *ciągłości* – to pojęcia *topologiczne*, które charakteryzowane są przez *otoczenia*, *bliskość*, itp.

2 Granica funkcji

Rozważmy następujący problem poznawczy: czy jeśli ciąg argumentów funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest zbieżny do swojej granicy, to ciąg odpowiadających im wartości funkcji jest zbieżny?

Inaczej sformułować można ten problem następująco: czy dla argumentów *dostatecznie bliskich* wybranemu punktowi $x_0 \in \mathbb{R}$ ciąg wartości funkcji f dla tych argumentów jest zbieżny do jakiejś liczby, czyli wartości te są *dostatecznie bliskie* tej liczbie?

Zauważmy dwie rzeczy:

1. Rozważany problem dotyczy własności *lokalnych*: pytamy o „zachowanie się” funkcji w pewnym *otoczeniu* interesującego nas punktu.

2. Nie pytamy – na razie – o to, jaka jest wartość funkcji dla argumentu, będącego granicą rozważanego ciągu argumentów. Funkcja może nawet być nieokreślona dla tego punktu granicznego, interesuje nas jedynie, jak „zachowują się” wartości funkcji w otoczeniu tego punktu.

Jedną z możliwości formalnego wyrażenia powyższych intuicji jest definicja Cauchy'ego:

DEFINICJA GRANICY FUNKCJI W PUNKCIE (CAUCHY). Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie

$$X = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < a \text{ dla pewnej } a > 0\}.$$

Mówimy, że liczba g jest *granicą funkcji f w punkcie* x_0, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że: jeśli $0 < |x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. W takim przypadku piszemy: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$. Czasem używa się też zapisu: $f(x) \to g$ dla $x \to x_0$.

Inną z możliwości formalnego wyrażenia powyższych intuicji jest definicja Heinego:

DEFINICJA GRANICY FUNKCJI W PUNKCIE (HEINE). Liczbę g nazywamy *granicą funkcji f w punkcie* x_0, gdy dla każdego ciągu (x_n) takiego, że $x_n \neq x_0$ dla wszystkich $n \geqslant 1$: jeśli $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, to $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$.

Jak zobaczymy za chwilę, obie te propozycje są równoważne, czyli udało się scharakteryzować omawiane pojęcie na różne sposoby, ukazując niejako różne jego aspekty, otrzymując jednak w wyniku to samo. Tego typu sytuacja zawsze cieszy kognitywistę.

Ponieważ słuchacze deklarowali ostatnio *głód rachunków* podamy przykładowe obliczenia granic niektórych funkcji w wybranych punktach, wykorzystując zarówno definicję Heinego, jak i definicję Cauchy'ego. Rozważane w tym wykładzie przykłady rachunkowe pochodzą z podanych na końcu pozycji bibliograficznych.

PRZYKŁADY.

1. Obliczymy $\lim\limits_{x\to 0} \sin x$. Pamiętamy nierówność $|\sin x| \leqslant |x|$ dla $|x| < \frac{\pi}{2}$. Niech $\varepsilon > 0$. Jeśli przyjmiemy $\delta = \varepsilon$, to dla $|x| < \delta$ mamy $|\sin x| \leqslant \delta = \varepsilon$. Tak więc, $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

2. Pokażemy, że funkcja $f(x) = x^2$ ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę równą 0. Weźmy bowiem dowolny ciąg liczb rzeczywistych (x_n) dążący do zera, czyli taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Mamy wtedy (na mocy własności granic ciągów rzeczywistych):

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = (\lim_{n\to\infty} x_n)^2 = 0^2 = 0.$$

3. Rozważmy funkcję $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$. Pokażemy, że $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$. Trzeba zatem wykazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich $x \neq 4$: jeśli $|x-4| < \delta$, to $|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$. Wykonajmy proste rachunki:

$$|\sqrt{x} - 2| = |(\sqrt{x} - 2) \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}| = \frac{|(\sqrt{x})^2 - 2^2|}{|\sqrt{x}+2|} = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}.$$

Ponieważ $x \geqslant 0$, więc $\frac{1}{\sqrt{x}+2} \leqslant \frac{1}{2}$. Mamy zatem:

$$|\sqrt{x} - 2| \leqslant \frac{1}{2} \cdot |x-4|.$$

Niech $\delta = 2 \cdot \varepsilon$. Wtedy, jeśli $|x-4| < \delta$, to:

$$|\sqrt{x} - 2| \leqslant \frac{1}{2} \cdot |x-4| < \frac{1}{2} \cdot \delta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Tak więc, na mocy definicji Cauchy'ego: $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$.

4. Pokażemy, że funkcja $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ (zdefiniowana dla $x \neq 0$) nie ma granicy w w punkcie $x_0 = 0$. Wystarczy w tym celu znaleźć dwa ciągi (x_n) oraz (y_n), oba zbieżne do 0 takie, że ciągi wartości $(f(x_n))$ oraz $(f(y_n))$ są zbieżne do różnych granic. Niech: $x_n = \frac{1}{n\cdot\pi}$ oraz $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\cdot n\cdot\pi}$. Wtedy oczywiście: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Mamy jednak:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n\cdot\pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\cdot n\cdot\pi) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Tak więc, nie istnieje granica funkcji $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ w w punkcie $x_0 = 0$.

Oto niektóre ważne własności granic funkcji (dowody tych faktów znajdą słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, na stronach 141–149):
WYBRANE WŁASNOŚCI.

1. Funkcja ma w danym punkcie co najwyżej jedną granicę.

2. Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 granicę, to f jest ograniczona w zbiorze $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) - \{x_0\}$ dla pewnej liczby $\delta_0 > 0$.

3. Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0 oraz istnieje liczba $a > 0$ taka, że $f(x) \leqslant g(x)$ dla wszystkich x spełniających nierówności $0 < |x - x_0| < a$, to $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

4. Jeśli funkcje f i g mają tę samą granicę γ w punkcie x_0 oraz istnieje liczba $a > 0$ taka, że $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ dla wszystkich x spełniających nierówności $0 < |x - x_0| < a$, to również funkcja h ma w punkcie x_0 granicę γ.

5. Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0, to funkcje $f + g$, $f - g$ oraz $f \cdot g$ także mają granice w tym punkcie i zachodzą równości:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

6. Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g, to dla dowolnej liczby rzeczywistej c, funkcja $c \cdot f$ ma w punkcie x_0 granicę $c \cdot g$.

7. Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ oraz istnieje liczba $a > 0$ taka, że funkcja g jest ograniczona w zbiorze wszystkich x spełniających nierówności $0 < |x - x_0| < a$, to $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

8. Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 granicę różną od zera, to funkcja $\frac{1}{f}$ również ma w punkcie x_0 granicę i zachodzi równość:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}.$$

9. Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0 oraz $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ również ma w punkcie x_0 granicę i zachodzi równość:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Udowodnimy teraz, że obie podane na początku tego punktu definicje granicy funkcji w punkcie (czyli definicje Cauchy'ego i Heinego) są równoważne.
TWIERDZENIE. *Załóżmy, że funkcja f jest określona dla wszystkich x takich, iż $0 < |x - x_0| < a$ dla pewnej liczby $a > 0$. Istnienie granicy funkcji f w punkcie x_0 w sensie definicji Cauchy'ego jest równoważne istnieniu granicy funkcji f w punkcie x_0 w sensie definicji Heinego.*
DOWÓD. Trzeba pokazać, że: 1) warunek istnienia granicy funkcji w punkcie x_0 w sensie Cauchy'ego pociąga za sobą istnienie granicy funkcji w punkcie x_0 w sensie Heinego oraz 2) warunek istnienia granicy funkcji w punkcie x_0 w sensie Heinego pociąga za sobą istnienie granicy funkcji w punkcie x_0 w sensie Cauchy'ego.

1. Załóżmy, że funkcja f ma granicę w punkcie x_0 w sensie definicji Cauchy'ego: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$. Rozważmy dowolny ciąg (x_n) zbieżny do x_0 taki, że $x_n \neq x_0$. Na mocy zbieżności ciągu (x_n) możemy założyć, że $0 < |x_n - x_0| < a$ dla pewnej liczby $a > 0$. Niech $\varepsilon > 0$. Z założenia (definicja Cauchy'ego) istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że: jeśli $0 < |x_n - x_0| < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$ oraz $\delta < a$. Ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, więc istnieje liczba N taka, że $|x_n - x_0| < \delta$ dla wszystkich $n > N$. Wynika z tego, że $|f(x_n) - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $n > N$, a to oznacza, że $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$ (definicja Heinego).

2. Drugą część dowodu przeprowadzimy metodą nie wprost. Załóżmy mianowicie, że (definicja Heinego): jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ oraz $x_n \neq x_0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$ i *przypuśćmy*, że funkcja f nie ma granicy w punkcie x_0 w sensie definicji Cauchy'ego. Istnieje więc $\varepsilon > 0$ taka, że dla każdej liczby $\delta > 0$ istnieje liczba x, która spełnia warunki: $0 < |x_n - x_0| < \delta$ oraz $|f(x_n) - g| \geqslant \varepsilon$. Pokażemy, że istnieje ciąg (x_n) taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ oraz $x_n \neq x_0$, ale nie zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$:

   (a) Dla $\delta = 1$ istnieje liczba x_1 taka, że:
   $0 < |x_1 - x_0| < 1$ oraz $|f(x_1) - g| \geqslant \varepsilon$.

   (b) Dla $\delta = \frac{1}{2}$ istnieje liczba x_2 taka, że:
   $0 < |x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$ oraz $|f(x_2) - g| \geqslant \varepsilon$, przy czym można założyć, że $x_2 \neq x_1$.

   (c) Postępując w ten sposób dalej, otrzymujemy ciąg różnowartościowy (x_n) taki, że $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ oraz $|f(x_n) - g| \geqslant \varepsilon$ dla wszystkich $n \geqslant 1$.

   (d) To oznacza jednak, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ oraz $x_n \neq x_0$, ale nie zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$, co jest sprzeczne z założeniem (definicja Heinego).

   (e) Przypuszczenie dowodu nie wprost musimy zatem odrzucić, co oznacza, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g w sensie Cauchy'ego.

Jak widzieliśmy w niektórych z rozważanych wyżej przykładów, niektóre funkcje nie mają granicy w pewnych punktach. Może tak być z różnych powodów. Pewnych wyjaśnień w tej sprawie dostarcza określenie tzw. *granic jednostronnych* oraz *granic niewłaściwych* funkcji.

1. Niech f będzie określona w pewnym przedziale $(x_0, x_0 + a)$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że *funkcja f ma w punkcie x_0 granicę prawostronną równą g*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że: jeśli $0 < x - x_0 < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. Stosujemy wtedy zapis: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$.

2. Niech f będzie określona w pewnym przedziale $(x_0 - a, x_0)$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że *funkcja f ma w punkcie x_0 granicę lewostronną równą g*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że: jeśli $0 < x_0 - x < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. Stosujemy wtedy zapis: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g$.

3. Niech f będzie określona dla x takich, że $0 < |x - x_0| < a$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że *funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą* $+\infty$, gdy dla każdej liczby $M > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż: jeśli $0 < |x - x_0| < \delta$, to $f(x) > M$. Piszemy wtedy: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

4. Niech f będzie określona dla x takich, że $0 < |x - x_0| < a$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że *funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą* $-\infty$, gdy dla każdej liczby $M > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż: jeśli $0 < |x - x_0| < \delta$, to $f(x) < -M$. Piszemy wtedy: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

5. Niech f będzie określona dla $x \in [a, \infty)$ dla pewnego $a > 0$. Mówimy, że *liczba g jest granicą funkcji f przy x dążącym do* ∞, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $M > a$ taka, że: jeśli $x > M$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. Piszemy wtedy: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$.

6. Niech f będzie określona dla $x \in (-\infty, a]$ dla pewnego $a > 0$. Mówimy, że *liczba g jest granicą funkcji f przy x dążącym do* $-\infty$, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $M > 0$ taka, że: jeśli $x > -M$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. Piszemy wtedy: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = g$.

7. Mówimy, że *funkcja f ma granicę $+\infty$ przy x dążącym do* $+\infty$, gdy f jest określona w pewnym przedziale $[a, +\infty)$ oraz gdy dla każdej liczby $M > 0$ istnieje liczba $A > a$ taka, że: jeśli $x > A$, to $f(x) > M$. Podobnie dla pozostałych przypadków granic niewłaściwych funkcji przy x dążącym do $+\infty$ lub $-\infty$.

Powyższe definicje podane zostały w stylizacji Cauchy'ego. Jak słuchacze zapewne domyślają się, można też określić powyższe pojęcia w stylizacji Heinego. Zachęcamy do samodzielnego zmierzenia się z tym wyzwaniem.
PRZYKŁADY.

1. Niech funkcja f będzie określona warunkami:

   (a) $f(x) = x$ dla $x \leqslant 0$

   (b) $f(x) = x^2 + 1$ dla $x > 0$.

   Zbadamy, czy funkcja ta ma granicę w punkcie $x_0 = 0$. Zachęcamy słuchaczy do naszkicowania wykresu tej funkcji.

Granica lewostronna funkcji w $x_0 = 0$. Dla dowolnego ciągu (x_n) takiego, że $x_n < 0$ dla wszystkich n oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 = 0$ mamy:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Tak więc, mamy:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Granica prawostronna funkcji w $x_0 = 0$. Dla dowolnego ciągu (x_n) takiego, że $x_n > 0$ dla wszystkich n oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 = 0$ mamy:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + 1) = 0^2 + 1 = 1.$$

Tak więc, mamy:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

Widzimy, że granica lewostronna funkcji w punkcie $x_0 = 0$ jest różna od granicy prawostronnej funkcji w tym punkcie, a więc granica funkcji nie istnieje w punkcie $x_0 = 0$.

2. Pokażemy, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę niewłaściwą $+\infty$. Pokażemy zatem, że dla każdej liczby $M > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż: jeśli $|x - 0| < \delta$, to $\frac{1}{x^2} > M$. Niech $M > 0$. Liczba $\delta > 0$ ma być taka, że $|x| < \delta$, czyli $\frac{1}{|x|} > \frac{1}{\delta}$, a w konsekwencji $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2}$. Jeśli przyjmiemy $\frac{1}{\delta^2} = M$, czyli $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, to $\delta > 0$ oraz zachodzi $\frac{1}{x^2} > M$. To oznacza, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

3. Pokażemy jeszcze raz, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę niewłaściwą $+\infty$, tym razem korzystając ze stylizacji Heinego. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach różnych od 0 takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Ponieważ mamy wtedy $(x_n)^2 \neq 0$ dla wszystkich n oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 0$, więc:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2} = \infty,$$

otrzymujemy ostatecznie, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

4. Funkcje trygonometryczne nie posiadają granic dla ich argumentów dążących do $+\infty$ lub $-\infty$.

Zakładamy, że na konwersatorium słuchacze będą mieli możliwość policzenia dalszych przykładów, wraz z poznaniem pewnych typowych procedur, wykorzystywanych przy obliczaniu granic.

Niektóre własności wprowadzonych przed chwilą pojęć zawiera poniższe ich wyliczenie (dowody znajdą słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, strony 150–152):

WYBRANE WŁASNOŚCI.

1. Funkcja monotoniczna w pewnym otoczeniu punktu x_0 ma w tym punkcie zarówno granicę prawostronna, jak i lewostronną.

2. Załóżmy, że funkcja f jest określona dla wszystkich x takich, że $0 < |x - x_0| < a$, gdzie $a > 0$. Funkcja f ma granicę g w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy f ma w x_0 zarówno granicę prawostronną, jak i lewostronną i obie te granice są równe g.

3. Jeśli funkcja f jest monotoniczna w przedziale otwartym (a, b), to istnieje co najwyżej przeliczalnie wiele punktów w (a, b), w których f nie ma granicy.

4. Załóżmy, że funkcja f jest określona w przedziale niewłaściwym $[a, \infty)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Jeśli f jest monotoniczna i ograniczona, to posiada skończoną granicę przy argumencie dążącym do ∞.

UWAGA. Ewentualnych czytelników tej notatki uprzejmie uprasza się o pamiętanie, że niniejszy wykład jest jedynie fragmentem *usługowego* kursu dla studentów kognitywistyki, a ponadto ma bardzo ograniczone ramy czasowe. Nie stanowi więc w żadnym sensie poważnego wprowadzenia do problematyki analizy matematycznej, które spełniałoby wymogi stawiane podręcznikom przeznaczonym dla studentów matematyki. Słuchacze naszego wykładu mają: poznać wybrane pojęcia matematyczne, przekonać się, że z ich wykorzystaniem możliwa jest ścisła charakterystyka pojęć, którymi posługujemy się intuicyjnie, obejrzeć proste przykłady, świadomie i ze zrozumieniem przeżyć stosowanie niezbyt skomplikowanych procedur dedukcyjnych. Nie wymaga się od nich, aby byli jakoś szczególnie biegli w matematyce. Starania wykładowców nakierowane są raczej na *oswajanie* słuchaczy z tworzeniem pojęć matematycznych oraz przeprowadzaniem rozumowań dedukcyjnych. Te dwie procedury są przecież jednymi z najciekawszych umiejętności poznawczych umysłu ludzkiego.

3 Ciągłość funkcji

Rozważmy kolejny problem poznawczy: czy jeśli argumenty funkcji dążą do pewnej granicy, to również odpowiadające im wartości funkcji dążą do liczby, która jest wartością funkcji dla owej granicy ciągu argumentów? Zauważmy, że poprzednio (przy definiowaniu granicy funkcji w punkcie) interesowaliśmy się jedynie problemem zbieżności ciągu wartości funkcji. Teraz pytamy dodatkowo o wartość liczbową granicy ciągu wartości funkcji.

3.1 Definicja

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - a, x_0 + a)$ punktu x_0, gdzie $a > 0$. Mówimy, że *funkcja f jest ciągła w punkcie x_0*, gdy istnieje jej granica w tym punkcie i jest ona równa jej wartości w tym punkcie, czyli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Słuchacze domyślają się już, że ciągłość funkcji w punkcie charakteryzować można w dwóch stylizacjach, ponieważ samo pojęcie granicy funkcji w punkcie miało, jak widzieliśmy, dwie stylizacje: definicję Cauchy'ego i definicję Heinego. Istotnie, z udowodnionego wyżej twierdzenia wynika twierdzenie następujące:
TWIERDZENIE. *Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - a, x_0 + a)$ punktu x_0, gdzie $a > 0$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z wzajemnie równoważnych następujących warunków:*

1. CIĄGŁOŚĆ W SENSIE CAUCHY'EGO. *Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że: jeśli $|x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

2. CIĄGŁOŚĆ W SENSIE HEINEGO. *Dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do $f(x_0)$.*

PRZYKŁADY.

1. *Ciągłość funkcji elementarnych.*

   (a) Funkcje: stałe, liniowe, łamane są ciągłe w każdym punkcie przedziału otwartego (a, b), w którym są określone.

   (b) Funkcja schodkowa jest ciągła we wszystkich punktach poza punktami, w których zmienia wartość.

   (c) Funkcja potęgowa $f(x) = x^n$ jest ciągła w każdym punkcie.

   (d) Funkcja wielomianowa jest ciągła w każdym punkcie.

   (e) Funkcja wymierna jest ciągła we wszystkich punktach, w których jest określona.

   (f) Funkcja wykładnicza jest ciągła w każdym punkcie.

(g) Funkcja logarytmiczna jest ciągła w każdym punkcie $x > 0$.

(h) Funkcja $f(x) = x^{\alpha}$, gdzie α jest liczbą rzeczywistą, zaś $x > 0$ jest ciągła we wszystkich punktach $x > 0$.

(i) Funkcje sinus i cosinus są ciągłe w każdym punkcie.

(j) Funkcja tangens jest ciągła w każdym punkcie $x \neq (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$
Funkcja kotangens jest ciągła w każdym punkcie $x \neq n \cdot \pi$.

2. Funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ponieważ nie jest w nim określona. Jeśli jednak przyjmiemy, że $f(0) = 1$, to tak uzupełniona funkcja jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$. Zachęcamy słuchaczy do samodzielnego zmierzenia się z udowodnieniem, że $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Wskazówka: skorzystaj z nierówności $\sin x \leqslant x$ dla $x > 0$ oraz sporządź rysunek, pozwalający uzasadnić, że tg $x \geqslant x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

3. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ponieważ nie ma w tym punkcie granicy.

Zakładamy, że na konwersatorium słuchacze będą mieli możliwość policzenia dalszych przykładów, wraz z poznaniem pewnych typowych procedur, wykorzystywanych przy ustalaniu ciągłości funkcji w punkcie.

3.2 Rodzaje nieciągłości

Podaje się klasyfikację *punktów nieciągłości* funkcji, uwzględniające powody, dla których brak ciągłości. Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - a, x_0 + a)$ punktu x_0, gdzie $a > 0$ oraz niech f nie będzie ciągła w x_0. Mówimy, że:

1. Funkcja f ma w punkcie x_0 *nieciągłość pierwszego rodzaju*, gdy istnieją granice jednostronne $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$. Jeżeli przy tym f ma granicę $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, to nieciągłość w punkcie x_0 nazywamy *usuwalną*, a jeśli ta granica nie istnieje, to nieciągłość nazywamy *nieusuwalną*.

2. Funkcja f ma w punkcie x_0 *nieciągłość drugiego rodzaju*, gdy nie istnieje co najmniej jedna z granic jednostronnych: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

PRZYKŁADY.

1. Rozważana wcześniej funkcja f określona warunkami:

(a) $f(x) = x$ dla $x \leqslant 0$

(b) $f(x) = x^2 + 1$ dla $x > 0$

nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ponieważ nie ma w tym punkcie granicy (jak pamiętamy, jej granica lewostronna w tym punkcie jest różna od jej granicy prawostronnej w tym punkcie).

2. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ponieważ nie ma w tym punkcie granicy.

3. Funkcja $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ponieważ nie ma w tym punkcie granicy.

4. Funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ponieważ nie jest w nim określona.

5. Funkcja Dirichleta (przyjmująca wartość 1 dla argumentów wymiernych, a wartość 0 dla argumentów niewymiernych) jest nieciągła w każdym punkcie. Informacja dla ciekawskich: można udowodnić, że funkcja Dirichleta daje się określić wzorem:

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{k\to\infty}(\cos(n!\cdot\pi\cdot x))^{2k}).$$

Zakładamy, że na konwersatorium słuchacze będą mieli możliwość policzenia dalszych przykładów, wraz z poznaniem pewnych typowych procedur, wykorzystywanych przy ustalaniu nieciągłości funkcji w punkcie.

3.3 Wybrane własności funkcji ciągłych

Niektóre własności funkcji ciągłych w ustalonym punkcie podaje poniższe zestawienie (dowody znajdą słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, na stronach 154–157):
WYBRANE WŁASNOŚCI.

1. Jeżeli funkcje f oraz g są ciągłe w punkcie x_0, to ciągłe w tym punkcie są również funkcje: $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ oraz $c\cdot f$, gdzie $c\in\mathbb{R}$. Jeżeli dodatkowo $g(x_0)\neq 0$, to ciągłe w punkcie x_0 są także funkcje: $\frac{1}{g}$ oraz $\frac{f}{g}$.

2. Załóżmy, że funkcje f, g oraz h są określone i spełniają nierówności $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ w pewnym otoczeniu (x_0-a, x_0+a) punktu x_0, gdzie $a>0$. Jeśli f oraz g są ciągłe w punkcie x_0 oraz $f(x_0) = g(x_0)$, to funkcja h również jest ciągła w punkcie x_0.

3. Załóżmy, że funkcja g jest ciągła w punkcie x_0, natomiast funkcja f jest ciągła w punkcie $g(x_0)$. Wtedy funkcja złożona $f \circ g$ jest ciągła w punkcie x_0. Przypominamy, że $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Podobnie jak w przypadku granic jednostronnych, rozważać można także rodzaje *ciągłości jednostronnej*:

1. Niech funkcja f będzie określona w pewnym przedziale $[x_0, x_0 + a)$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że f jest *prawostronnie ciągła w punkcie* x_0, gdy f ma granicę prawostronną w x_0 oraz $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

2. Niech funkcja f będzie określona w pewnym przedziale $(x_0 - a, x_0]$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że f jest *lewostronnie ciągła w punkcie* x_0, gdy f ma granicę lewostronną w x_0 oraz $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

3.4 Ciągłość funkcji w zbiorze

Ciągłość funkcji w punkcie jest własnością *lokalną*. Z oczywistych powodów jesteśmy też zainteresowani pewnymi *globalnymi* własnościami funkcji, czyli własnościami, które jej przysługują dla *wszystkich* punktów określonego podzbioru jej dziedziny.

Niech funkcja f będzie określona w niepustym zbiorze $X \subseteq \mathbb{R}$. Mówimy, że f *jest ciągła w punkcie* x_0 *względem zbioru* X, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że: jeżeli $x \in X$ oraz $|x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Jeżeli funkcja f jest określona w niepustym zbiorze $X \subseteq \mathbb{R}$ i jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in X$ względem zbioru X, to mówimy, że f jest *ciągła w zbiorze* X.

Powyższe definicje podano w stylizacji Cauchy'ego. Niech będzie wdzięcznym wyzwaniem dla słuchaczy twórcza zaduma nad tym, jak można te definicje sformułować w stylizacji Heinego.

WYBRANE WŁASNOŚCI.

1. Funkcja określona w przedziale domkniętym $[a, b]$ jest ciągła w $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

   (a) f jest ciągła w każdym punkcie przedziału otwartego (a, b) oraz

   (b) jest prawostronnie ciągła w punkcie a oraz

   (c) jest lewostronnie ciągła w punkcie b.

2. Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale ograniczona.

3. Funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga w tym przedziale swoje kresy.

Dowody powyższych własności znajdą słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, na stronach 158–159. Podkreślmy, że w dowodach dwóch ostatnich z wymienionych własności istotnie korzystamy z aksjomatu ciągłości.

Dla przykładu, udowodnimy, że funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale ograniczona. Wykorzystamy w tym celu twierdzenie Bolzano-Weierstrassa udowodnione na poprzednim wykładzie. Przeprowadzimy rozumowanie nie wprost. Załóżmy zatem, że funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz przypuśćmy, że f nie jest w tym przedziale ograniczona. Istnieje zatem ciąg (x_n) taki, że $x_n \in [a, b]$ dla wszystkich $n \geqslant 1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = \infty$. Na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa ciąg (x_n) zawiera podciąg (x_{m_n}) zbieżny do pewnego punktu $x_0 \in [a, b]$. W konsekwencji, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{m_n}) = f(x_0)$. Jednak, na mocy poczynionego przypuszczenia, $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_{m_n})| = \infty$, a więc otrzymujemy sprzeczność. Trzeba zatem odrzucić przypuszczenie dowodu nie wprost, co oznacza, że funkcja f jest ograniczona w przedziale $[a, b]$.

3.5 Jednostajna ciągłość funkcji

Niech funkcja f będzie określona w niepustym zbiorze $X \subseteq \mathbb{R}$. Mówimy, że *f jest jednostajnie ciągła w zbiorze X*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich $x, y \in X$: jeśli $|x - y| < \delta$, to $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Zauważmy, że w powyższej definicji liczba δ jest *wspólnym* ograniczeniem rozważanych odległości między punktami, a więc nie jest wybierana dla każdego z tych punktów z osobna.

Zauważmy, że np. funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału otwartego $(0, 1)$, ale nie jest w tym przedziale jednostajnie ciągła. Dla dowolnej $\delta > 0$ można bowiem wybrać w tym przedziale punkty x_1 oraz x_2 w taki sposób, że liczba $|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}|$ jest dowolnie duża.
WYBRANE WŁASNOŚCI.

1. Funkcja jednostajnie ciągła w zbiorze X jest ciągła w tym zbiorze (ale niekoniecznie na odwrót).

2. Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale jednostajnie ciągła.

Dla przykładu, udowodnimy drugą z wymienionych własności. Wykorzystamy w tym celu twierdzenie Bolzano-Weierstrassa udowodnione na poprzednim wykładzie. Przeprowadzimy rozumowanie nie wprost.

1. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w $[a,b]$ i przypuśćmy, że f nie jest jednostajnie ciągła w $[a,b]$.
2. Istnieje zatem liczba $\varepsilon > 0$ taka, że dla każdej $\delta > 0$ istnieją punkty $x, y \in [a,b]$ dla których: $|x-y| < \delta$ oraz $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$.
3. Możemy wybrać ciągi x_n oraz y_n punktów przedziału $[a,b]$ w ten sposób, że $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ oraz $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$ dla wszystkich $n \geqslant 1$.
4. Oba te ciągi są oczywiście ograniczone.
5. Na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa ciąg (x_n) zawiera podciąg (x_{m_n}) zbieżny do y.
6. Na mocy nierówności $|x_{m_n} - y_{m_n}| < \frac{1}{m_n}$ wnioskujemy, że ciąg (y_{m_n}) jest zbieżny do y.
7. Wynika z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{m_n}) = f(y)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_{m_n}) = f(y)$.
8. To z kolei oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_{m_n}) - f(y_{m_n})| = 0$.
9. Ta równość jest jednak sprzeczna z nierównością $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$ dla wszystkich $n \geqslant 1$.
10. Przypuszczenie dowodu nie wprost musimy zatem odrzucić, co oznacza, że funkcja f jest jednostajnie ciągła w $[a,b]$.

3.6 Twierdzenie Darboux

Niektórzy słuchacze mogli poczuć się znużeni licznymi subtelnościami pojęciowymi wprowadzonymi w tym wykładzie, a także zniecierpliwieni tym, że rangę twierdzeń przypisuje się obserwacjom, które *wydają się* intuicyjnie oczywiste. Jak poucza historia matematyki (a także epistemologia), oczywistość bywa złudną pułapką. Tak więc, np. stwierdzenie, że funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale ograniczona istotnie wymaga *dowodu*, nie wystarcza tu odwołanie się np. do *rysunku*. Podobnie rzecz ma się z następującą ważną własnością, charakteryzującą funkcje ciągłe:

TWIERDZENIE DARBOUX. *Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w przedziale I (niekoniecznie domkniętym) oraz że w punktach $x_1, x_2 \in I$ takich, że $x_1 < x_2$ przyjmuje różne wartości $y_1 = f(x_1)$ oraz $y_2 = f(x_2)$. Wtedy w przedziale domkniętym $[x_1, x_2]$ funkcja f przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między y_1 oraz y_2, czyli dla każdego y_0 zawartego między y_1 oraz y_2 istnieje $x_0 \in [x_1, x_2]$ taki, że $y_0 = f(x_0)$.*

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód metodą nie wprost, wykorzystując przy tym udowodniony wyżej fakt, że funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale jednostajnie ciągła. Można oczywiście założyć, że $y_1 < y_2$.

1. Przypuśćmy, że dla pewnego $y_0 \in (y_1, y_2)$ nie istnieje $x_0 \in [x_1, x_2]$ taki, że $y_0 = f(x_0)$.
2. Wtedy funkcja $g(x) = y_0 - f(x)$ jest ciągła i różna od 0 w przedziale domkniętym $[x_1, x_2]$.
3. Również funkcja $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[x_1, x_2]$.
4. Ponieważ funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w nim ograniczona, więc h jest ograniczona.
5. Oznacza to, że istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, iż $|y_0 - f(x)| > \varepsilon$ dla $x \in [x_1, x_2]$.
6. Ponieważ f jest ciągła w przedziale domkniętym $[x_1, x_2]$, więc jest w nim jednostajnie ciągła.
7. Istnieje zatem $\delta > 0$ taka, że: jeżeli $|x - x_0| < \delta$ dla $x, x_0 \in [x_1, x_2]$, to $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
8. Dzielimy teraz przedział $[x_1, x_2]$ na n części o równej długości $\frac{x_2 - x_1}{n} < \delta$.
9. Niech mianowicie $x_1 = z_0 < z_1 < \ldots < z_n = x_2$, gdzie $z_k - z_{k-1} = \frac{x_2 - x_1}{n}$ dla $1 \leqslant k \leqslant n$.
10. Mamy wtedy: $|f(z_k) - f(z_{k-1})| < \varepsilon$ dla $1 \leqslant k \leqslant n$.
11. Ponieważ $f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$, więc istnieje liczba m taka, że $1 \leqslant m \leqslant n$ oraz $f(z_{m-1}) < y_0 < f(z_m)$.
12. Wynika z tego, że $0 < y_0 - f(z_{m-1}) < f(z_m) - f(z_{m-1}) < \varepsilon$.
13. To jednak jest sprzeczne z otrzymaną wyżej nierównością $|y_0 - f(x)| > \varepsilon$ dla $x \in [x_1, x_2]$.
14. Przypuszczenie dowodu nie wprost musimy zatem odrzucić. W konsekwencji, dla każdego $y_0 \in (y_1, y_2)$ istnieje $x_0 \in [x_1, x_2]$ taki, że $y_0 = f(x_0)$.

* * *

Na zakończenie tego punktu dodajmy, że informacje na temat granic oraz ciągłości funkcji w dowolnych przestrzeniach metrycznych znajdą zainteresowani słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, na stronach 164–171.

4 Dodatek: ciągi i szeregi funkcyjne

Ciągi, których elementami są funkcje rzeczywiste oraz szeregi stowarzyszone z takim ciągami odgrywają istotną rolę w analizie matematycznej, a także w niezliczonych jej empirycznych zastosowaniach. W tym czysto usługowym kursie nie możemy poświęcić im wiele uwagi, napomkniemy tylko o kilku pojęciach i faktach z nimi związanych. Ograniczymy się do ciągów i szeregów dla funkcji rzeczywistych, choć wspominane konstrukcje zachowują ważność dla ogólnych przestrzeni metrycznych.
PRZYKŁADY.

1. Ciąg $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot x$.
2. Ciąg $f_n(x) = x^n$.
3. Ciąg $f_n(x) = x^n \cdot (1-x)^n$.

Rozważa się dwa rodzaje zbieżności ciągów funkcyjnych:

1. Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na niepustym zbiorze $X \subseteq \mathbb{R}$. Mówimy, że ciąg (f_n) jest *punktowo zbieżny* do funkcji f o wartościach rzeczywistych określonej na X, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ dla każdego $x \in X$.
2. Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na niepustym zbiorze $X \subseteq \mathbb{R}$. Mówimy, że ciąg (f_n) jest *jednostajnie zbieżny* do funkcji f o wartościach rzeczywistych określonej na X, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba N taka, że $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in X$. Zauważmy, że w tej definicji liczba N jest wybierana niezależnie od punktów $x \in X$.

Jednostajną zbieżność ciągów funkcyjnych charakteryzować można przez stosowną modyfikację warunku Cauchy'ego zbieżności ciągów. Ten rodzaj zbieżności ma też prostą interpretację geometryczną, dotyczącą wykresów rozważanych funkcji.

Wspomnimy jeszcze, bez wnikania w szczegóły, że granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą, natomiast punktowo zbieżny ciąg funkcji ciągłych może nie mieć jako swojej granicy funkcji ciągłej.
PRZYKŁADY.

1. Ciąg funkcji $f_n(x) = x^n$ jest zbieżny punktowo do funkcji $f(x)$ takiej, że $f(x) = 0$ dla $0 \leqslant x < 1$ oraz $f(1) = 1$. Zauważmy, że wszystkie funkcje

f_n są ciągłe w przedziale domkniętym $[0,1]$, natomiast funkcja f nie jest ciągła w tym przedziale. Ciąg ten nie jest jednostajnie zbieżny w przedziale domkniętym $[0,1]$, co sprawdzić można nietrudnym rachunkiem.

2. Ciąg $f_n(x) = x^n \cdot (1-x)^n$ jest zbieżny do funkcji stałej równej zero dla $x \in [0,1]$. Ponadto, ciąg ten jest jednostajnie zbieżny do swojej granicy, co sprawdzić można nietrudnym rachunkiem.

Dla szeregów funkcyjnych o postaci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ (gdzie $x \in X \subseteq \mathbb{R}$) również określić można pojęcie zbieżności.

Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na niepustym zbiorze $X \subseteq \mathbb{R}$. Mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest *jednostajnie zbieżny w X do sumy $s(x)$*, gdy ciąg jego sum częściowych $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ jest jednostajnie zbieżny do $s(x)$ w X.

Opracowano różne kryteria, pozwalające ustalać jednostajną zbieżność szeregów funkcyjnych. Aby nie straszyć słuchaczy powiemy jedynie, że są to sprawy wymagające wykorzystania czasem dość zaawansowanego aparatu matematycznego. Jeśli słuchacze znajdą się w sytuacji, gdy trzeba będzie odwołać się do tych faktów, to zechcą samodzielnie przedrzeć się przez odpowiednie fragmenty literatury przedmiotu (zob. np. pozycje wymienione niżej w bibliografii).

Szczególnie istotne w wielu zastosowaniach są *szeregi potęgowe*. Są to szeregi funkcyjne o postaci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ lub $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$, gdzie współczynniki a_n są liczbami rzeczywistymi (ewentualnie liczbami zespolonymi).

Promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ nazywamy kres górny R zbioru tych liczb $|x|$, dla których szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ jest zbieżny (gdy zbiór ten nie jest ograniczony, to przyjmujemy $R = \infty$). Przedział $(-R, R)$ nazywamy *przedziałem zbieżności* szeregu potęgowego o promieniu zbieżności R.
WYBRANE WŁASNOŚCI.

1. Szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ o promieniu zbieżności R jest:

   (a) zbieżny w przedziale $(-R, R)$, gdzie $R > 0$

   (b) jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$, dla $0 < \varepsilon < R$

(c) rozbieżny na zewnątrz przedziału $[-R, R]$ dla $R < \infty$.

2. Jeżeli ciąg $(|\frac{a_n}{a_{n+1}}|)$ ma granicę g, to g jest promieniem zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

3. Suma szeregu potęgowego jest funkcją ciągłą wewnątrz przedziału zbieżności tego szeregu.

* * *

W niniejszej notatce istotnie wykorzystaliśmy materiał zawarty w podręczniku Musielak, Musielak 2004. Słuchacze ewentualnie zainteresowani dalszymi wiadomościami dotyczącymi granic i ciągłości zechcą zajrzeć np. do pozycji wymienionych w bibliografii niniejszej notatki.

5 Zachęta do refleksji

1. Czy własność ciągłości ma realność fizyczną?

2. Ustaliliśmy, że nie istnieją *nieskończone* liczby rzeczywiste (aksjomat Archimedesa!). Jaki jest zatem sens napisu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$?

3. Czy do mówienia o ciągłości funkcji konieczne jest założenie aksjomatu ciągłości?

4. Każdy potrafi pomalować płot zwykłym pędzlem. Zastanów się nad możliwościami „pomalowania” np. wnętrza koła pędzlem, którego końcówka jest dokładnie jednym punktem.

6 Podsumowanie

To, co należy zapamiętać z niniejszego wykładu:

1. Granica funkcji w punkcie, definicja Heinego i definicja Cauchy'ego.

2. Ciągłość funkcji w punkcie, definicja Heinego i definicja Cauchy'ego.

3. Ciągłość i jednostajna ciągłość funkcji.

4. Ciąg funkcyjny i jego granica.

7 Wybrane pozycje bibliograficzne

Kuratowski, K. 1976. *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Leja, F. 1976. *Rachunek różniczkowy i całkowy*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Musielak, H., Musielak, J. 2004. *Analiza matematyczna*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Niedziałowski, K., Kowalczyk, R., Obczyński, C. 2013. *Granice i pochodne. Metody rozwiązywania zadań*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.