Metody Dowodzenia Twierdzeń I Automatyzacja Rozumowań

Wykład 5b: Tablice Analityczne

III rok kognitywistyki UAM, 2016–2017

Słuchacze zetknęli się już z metodą tablic analitycznych dla języka KRZ. Niniejszy wykład stanowi zatem po części powtórkę znanych już treści, przy czym *novum* jest tu metoda tablic analitycznych dla logiki pierwszego rzędu oraz jednolita metoda dowodów trafności i pełności metody tablic analitycznych.

Metoda tablic analitycznych jest metodą *nie wprost*. Aby udowodnić formułę φ budujemy *tablicę analityczną* dla formuły $\neg\varphi$. Jeśli ta tablica jest *zamknięta* (prowadzi do sprzeczności), to uznajemy, że formuła φ jest *tezą* systemu tablicowego.

W trakcie budowania tablicy analitycznej korzystamy z reguł redukcji, nazywanych *regułami rozszerzania tablic*. Pozwalają one przechodzić od formuł złożonych do ich składników (w sensie Smullyana). Wykonanie wszystkich reguł rozszerzania tablic doprowadza do uzyskania literałów.

Tablice analityczne są drzewami – można o nich myśleć jako o alternatywach pewnych koniunkcji.

1 Tablice analityczne w KRZ

Reguły rozszerzania tablic analitycznych dla formuł bez kwantyfikatorów (dla języka KRZ) zapisanych w notacji Smullyana są następujące:

$$\frac{\neg\neg\psi}{\psi} \qquad \frac{\neg\top}{\bot} \qquad \frac{\neg\bot}{\top}$$

$$\begin{array}{c} \alpha \\ | \\ \alpha_1 \\ | \\ \alpha_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \beta \\ \diagup \quad \diagdown \\ \beta_1 \quad \beta_2 \end{array}$$

Stosowanie reguł redukcji należy rozumieć następująco. Jeśli T jest drzewem znakowanym formułami, to zastosowanie reguły redukcji do formuły (nie będącej literałem) w którymś z wierzchołków tego drzewa skutkuje utworzeniem nowego drzewa T^*, poprzez przedłużenie gałęzi drzewa T na której znajduje się rozważana formuła (bez rozgałęziania w przypadku $\neg\top$, $\neg\perp$, podwójnie zanegowanych formuł oraz α-formuł, natomiast z rozgałęzieniem w przypadku β-formuł). Formalnie:

1. Jeśli $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ jest skończonym zbiorem formuł, to tablicą analityczną dla tego zbioru jest drzewo złożone z jednej gałęzi:

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \\ | \\ \varphi_2 \\ | \\ \vdots \\ | \\ \varphi_n \end{array}$$

2. Jeśli T jest tablicą analityczną dla $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ oraz T^* powstaje z T poprzez zastosowanie którejś reguły rozszerzania tablic analitycznych, to T^* jest tablicą analityczną dla $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$.

Gałąź θ tablicy analitycznej T jest *zamknięta*, jeśli zawiera ona $\perp$ lub formuły φ oraz $\neg\varphi$, dla pewnej φ. Tablica, której wszystkie gałęzie są zamknięte jest *zamknięta* (*sprzeczna*).

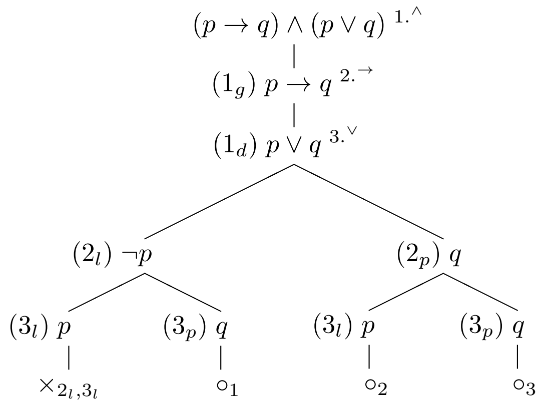
Dowodem tablicowym formuły φ jest zamknięta tablica analityczna dla zbioru $\{\neg\varphi\}$. Formuła φ jest *tezą* systemu tablic analitycznych, gdy ma dowód tablicowy.

Gałąź θ tablicy analitycznej T jest *spełnialna*, gdy zbiór formuł tej gałęzi jest spełnialny. Tablica analityczna T jest *spełnialna* (*otwarta*), gdy co najmniej jedna jej gałąź jest spełnialna.

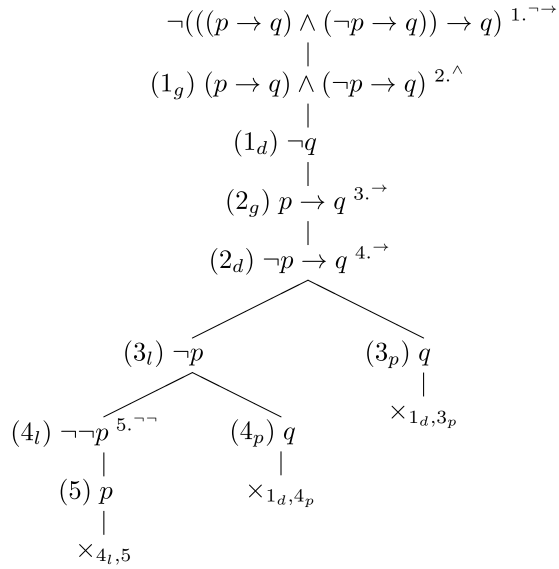
Przykłady.

W korzeniu drzewa znajduje się formuła, której tablicę budujemy. Numerujemy poszczególne kroki tworzenia tablicy (z prawej strony odpowiednich formuł, z zaznaczeniem użytej reguły). Wyniki zastosowanych reguł numerowane są z lewej strony odpowiednich formuł. Oznaczenia (górna, dolna oraz lewa, prawa) są oczywiste. Gałąź zamkniętą kończymy liściem $\times$, gałąź otwartą np. liściem $\circ$ (z indeksem, jeśli chcemy się do niej odwoływać) lub nie dodajemy takich ozdób.

1. Tablica analityczna formuły $(p \to q) \wedge (p \vee q)$:



2. Tablica analityczna formuły $\neg(((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q)$:



Fakt Zachowawczy. Zastosowanie reguły rozszerzania tablic analitycznych do tablicy spełnialnej daje tablicę spełnialną.
Fakt. Jeśli istnieje tablica zamknięta dla zbioru formuł S, to S nie jest spełnialny.
Trafność metody TA w KRZ. Jeśli φ ma dowód tablicowy, to φ jest tautologią KRZ.
Dowód. Dowód tablicowy dla φ jest zamkniętą tablicą analityczną dla $\{\neg\varphi\}$. Jeśli tablica analityczna dla $\{\neg\varphi\}$ jest zamknięta, to $\{\neg\varphi\}$ nie jest spełnialny. W konsekwencji, φ jest tautologią KRZ.

Skończony zbiór formuł S jest *tablicowo niesprzeczny*, jeśli nie istnieje zamknięta tablica analityczna dla S.

Fakt. Rodzina wszystkich tablicowo niesprzecznych zbiorów formuł jest zdaniową własnością niesprzeczności.

Pełność metody TA w KRZ. Jeśli φ jest tautologią KRZ, to φ ma dowód tablicowy.

Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Jeśli φ nie ma dowodu tablicowego, to nie istnieje zamknięta tablica analityczna dla $\{\neg\varphi\}$. Wtedy $\{\neg\varphi\}$ jest tablicowo niesprzeczny, a zatem jest spełnialny (na mocy Faktu poprzedzającego niniejsze twierdzenie oraz Twierdzenia o Istnieniu Modelu dla KRZ). Tak więc, φ nie jest tautologią.

Możemy przeprowadzać dowody tablicowe *z dowolnych zbiorów przesłanek*. Niech S będzie dowolnym zbiorem formuł (języka KRZ). *Reguła wprowadzania przesłanek* (dla zbioru S) głosi, że możemy dołączyć dowolny element zbioru S na końcu dowolnej gałęzi tablicy analitycznej. Piszemy $S \vdash_{pt} \varphi$, gdy istnieje zamknięta tablica analityczna dla $\neg\varphi$, w której stosowano regułę wprowadzania przesłanek dla zbioru S. Jeśli $S \vdash_{pt} \varphi$, to mówimy, że φ *wynika tablicowo z* S.

Silna Trafność i Pełność Metody TA w KRZ. Dla dowolnego zbioru formuł S oraz formuły φ języka KRZ następujące warunki są równoważne:

1. $S \models_{krz} \varphi$ (φ wynika logicznie z S)
2. $S \vdash_{pt} \varphi$ (φ wynika tablicowo z S)

Dowód. Nietrudny dowód tego faktu znajdą słuchacze w Fitting 1990, 67–68.

Trafność. (Jeśli $S \vdash_{pt} \varphi$, to $S \models_{krz} \varphi$.)

Nazwiemy gałąź tablicy analitycznej *S-spełnialną*, gdy istnieje wartościowanie v, przy którym wszystkie formuły na tej gałęzi przyjmują wartość 1, a ponadto wszystkie formuły ze zbioru S przyjmują wartość 1 przy wartościowaniu v. Nazwiemy tablicę analityczną *S-spełnialną*, gdy pewna jej gałąź jest S-spełnialna. Tak więc, $\emptyset$-spełnialność tablicy analitycznej to po prostu jej spełnialność w sensie podanym uprzednio. Reguły rozszerzania tablic analitycznych oraz reguły dołączania przesłanek prowadzą od tablic S-spełnialnych do tablic S-spełnialnych. Oczywiście nie istnieją zamknięte tablice S-spełnialne. Jeśli zatem istnieje tablica zamknięta dla $\neg\varphi$, w której użyto przesłanek z S, to także tablica analityczna dla $\neg\varphi$ nie może być S-spełnialna. Wynika z tego, że $S \cup \{\neg\varphi\}$ nie jest spełnialny, a zatem $S \models_{krz} \varphi$.

Pełność. (Jeśli $S \models_{krz} \varphi$, to $S \vdash_{pt} \varphi$.)

Dla dowolnej formuły φ zbiór S nazwiemy *φ-tablicowo sprzecznym*, gdy $S \vdash_{pt} \varphi$. Zbiory, które nie są φ-tablicowo sprzeczne, nazwiemy *φ-tablicowo niesprzecznymi*. Tak więc, S jest φ-tablicowo niesprzeczny, gdy φ nie wynika tablicowo z S.

Zauważmy też, że $\perp$-tablicowa niesprzeczność to po prostu tablicowa niesprzeczność w sensie podanym uprzednio. Podobnie jak w przypadku omawianej wcześniej Hilbertowskiej φ-niesprzeczności, łatwo pokazać, że:

1. Dla każdej formuły φ rodzina wszystkich zbiorów φ-tablicowo niesprzecznych jest zdaniową własnością niesprzeczności.

2. Jeśli S jest φ-tablicowo niesprzeczny, to również $S \cup \{\neg\varphi\}$ jest φ-tablicowo niesprzeczny.

Przypuśćmy, że nie zachodzi $S \vdash_{pt} \varphi$. Wtedy S jest φ-tablicowo niesprzeczny, a więc również $S \cup \{\neg\varphi\}$ jest φ-tablicowo niesprzeczny. Wtedy jednak, na mocy Twierdzenia o Istnieniu Modelu, $S \cup \{\neg\varphi\}$ jest spełnialny, co oznacza, że φ nie wynika logicznie z S.
Uwaga. W przypadku skończonego zbioru przesłanek S mamy oczywiście: $S \vdash_{tab} \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zamknięta tablica analityczna dla $S \cup \{\neg\varphi\}$.
Uwaga. Silną trafność i pełność metody tablicowej w KRZ można wykorzystać w dowodzie twierdzenia głoszącego, iż dla dowolnej zbioru formuł S i formuły φ języka KRZ: $S \models_{krz} \varphi$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje skończony zbiór $S_0 \subseteq S$ taki, że $S_0 \models_{krz} \varphi$. (zob. Fitting 1990, 66–68.)

2 Tablice analityczne dla logiki pierwszego rzędu

Metodę tablic analitycznych stosować można również dla logiki pierwszego rzędu. Na początek rozważymy przypadek, gdy język takiej logiki zawiera jedynie predykaty oraz stałe indywidualne (czyli bez symboli funkcyjnych).

2.1 Jednolita notacja dla języka logiki pierwszego rzędu

Notacja Smullyana dla języków pierwszego rzędu oprócz podanych wcześniej konwencji dla funktorów prawdziwościowych uwzględnia jeszcze notację dla formuł skwantyfikowanych oraz ich negacji. Rozróżnia się dwa typy: γ-*formuły*, które „działają” uniwersalnie (czyli formuły z kwantyfikatorem generalnym lub z zaprzeczeniem kwantyfikatora egzystencjalnego) oraz δ-*formuły*, które „działają” egzystencjalnie (czyli formuły z kwantyfikatorem egzystencjalnym lub z zaprzeczeniem kwantyfikatora generalnego). Dla każdego z tych typów formuł oraz dowolnego termu t określa się ich *instancje* w sposób następujący:

γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall x\varphi$	$\varphi(x/t)$	$\exists x\varphi$	$\varphi(x/t)$
$\neg\exists x\varphi$	$\neg\varphi(x/t)$	$\neg\forall x\varphi$	$\neg\varphi(x/t)$

Ta konwencja zostaje nieco zmodyfikowana w przypadku języków pierwszego rzędu z symbolami funkcyjnymi (gdzie uwzględniamy dodatkowo unifikację termu występującego w instancjach), jak zobaczymy później.

2.2 Reguły

W przypadku języków pierwszego rzędu, dodajemy następujące reguły rozszerzania tablic analitycznych (w notacji Smullyana):

$$\begin{array}{c} \gamma \\ | \\ \gamma(t) \end{array} \qquad \text{(dla dowolnego termu domkniętego języka } L^{\mathbf{par}}\text{)}$$

$$\begin{array}{c} \delta \\ | \\ \delta(a) \end{array} \qquad \text{(dla dowolnego nowego parametru } a\text{)}$$

Pojęcia wprowadzone dla metody tablic analitycznych w KRZ (gałąź zamknięta, tablica zamknięta, gałąź spełnialna, tablica spełnialna, zbiór tablicowo niesprzeczny, wynikanie tablicowe, itd.) mają swoje odpowiedniki w przypadku języka logiki pierwszego rzędu, z oczywistymi modyfikacjami syntaktycznymi. Dla przykładu:

Skończony zbiór S zdań języka $L^{\mathbf{par}}$ jest *tablicowo niesprzeczny*, gdy nie istnieje zamknięta tablica analityczna dla S.

2.3 Przykłady

Wprowadzanie nowej stałej (parametru) a zaznaczamy z prawej strony odpowiedniej formuły znaczkiem $\surd a$. Zastosowanie reguły dla γ-formuł i termu domkniętego t zaznaczamy z prawej strony odpowiedniej formuły znaczkiem $\star t$. Gałęzie zamknięte kończymy liściem $\times$.

1. Tablica analityczna dla formuły $(\exists x\ Px \to \exists y\ Qy) \to \exists x\ (Px \to Qx)$:

$$(\exists x\ P(x) \to \exists y\ Q(y)) \to \exists x\ (P(x) \to Q(x)) \quad ^{1.\to}$$

$(1_l)\quad \neg(\exists x\ P(x) \to \exists y\ Q(y)) \quad ^{2.\neg\to}$	$(1_p)\quad \exists x\ (P(x) \to Q(x)) \quad ^{5.\checkmark b}$
$(2_g)\quad \exists x\ P(x) \quad ^{3.\checkmark a}$	$(5)\quad P(b) \to Q(b) \quad ^{6.\to}$
$(2_d)\quad \neg\exists y\ Q(y) \quad ^{4.\star a}$	$(6_l)\ \neg P(b) \qquad (6_p)\ Q(b)$
$(3)\quad P(a)$	
$(4)\quad \neg Q(a)$	

2. Tablica analityczna dla formuły $\exists x \forall y \forall z\ (R(x,y,z) \vee Q(x,y))$:

$$\exists x \forall y \forall z\ (R(x,y,z) \vee Q(x,y)) \ ^{1.\checkmark a}$$
$$(1)\ \forall y \forall z\ (R(a,y,z) \vee Q(a,y)) \ ^{2.\star a}$$
$$(2)\ \forall z\ (R(a,a,z) \vee Q(a,a)) \ ^{3.\star a}$$
$$(3)\ R(a,a,a) \vee Q(a,a) \ ^{4.\vee}$$
$$(4_l)\ R(a,a,a) \qquad (4_p)\ Q(a,a)$$

3. Tablica analityczna dla formuły $\neg(\exists x \forall y\ P(x,y) \to \exists z\ P(z,z))$:

$$\neg(\exists x \forall y\ P(x,y) \to \exists z\ P(z,z)) \quad ^{1.\neg\to}$$
$$(1_g)\quad \exists x \forall y\ P(x,y) \quad ^{2.\checkmark a}$$
$$(1_d)\quad \neg\exists z\ P(z,z) \quad ^{3.\star a}$$
$$(2)\quad \forall y\ P(a,y) \quad ^{4.\star a}$$
$$(3)\quad \neg P(a,a)$$
$$(4)\quad P(a,a)$$
$$\times_{3,4}$$

4. Tablica analityczna dla zbioru formuł $\{\ \neg\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)),\ \forall x\ (P(x) \to Q(x)),\ \exists x\ P(x)\ \}$:

$\neg\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))\ ^{2.\star a}$

$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))\ ^{3.\star a}$

$\exists x\ P(x)\ ^{1.\checkmark a}$

(1) $P(a)$

(2) $\neg(P(a) \wedge Q(a))\ ^{4.\neg\wedge}$

(3) $P(a) \rightarrow Q(a)\ ^{5.\rightarrow}$

- (4_l) $\neg P(a)$
  - $\times_{1,4_l}$
- (4_p) $\neg Q(a)$
  - (5_l) $\neg P(a)$
    - $\times_{1,5_l}$
  - (5_p) $Q(a)$
    - $\times_{4_p,5_p}$

5. Tablica analityczna dla zbioru formuł $\{\ \exists x\ (P(x) \wedge \neg Q(x)),\ \forall x\ (P(x) \rightarrow R(x)),\ \forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x))\ \}$:

$\exists x\ (P(x) \wedge \neg Q(x))\ ^{1.\checkmark a}$

$\forall x\ (P(x) \rightarrow R(x))\ ^{2.\star a}$

$\forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x))\ ^{3.\star a}$

(1) $P(a) \wedge \neg Q(a)\ ^{4.\wedge}$

(2) $P(a) \rightarrow R(a)\ ^{5.\rightarrow}$

(3) $Q(a) \rightarrow R(a)\ ^{6.\rightarrow}$

(4_g) $P(a)$

(4_d) $\neg Q(a)$

- (5_l) $\neg P(a)$
  - $\times_{4_g,5_l}$
- (5_p) $R(a)$
  - (6_l) $\neg Q(a)$
    - $\circ_1$
  - (6_p) $R(a)$
    - $\circ_2$

2.4 Trafność i pełność

Zachodzą odpowiedniki podanych powyżej Faktów dotyczących metody tablicowej w KRZ. W szczególności, mamy:

Trafność metody TA dla logiki pierwszego rzędu. Jeśli Φ ma dowód tablicowy, to jest tautologią języka pierwszego rzędu L.

Dowód. Przypuśćmy, że Φ ma dowód tablicowy, ale nie jest tautologią. Istnieje zatem model języka L, w którym $\neg\Phi$ jest prawdziwa. Konstrukcja dowodu tablicowego dla Φ rozpoczyna się od tablicy o jednym wierzchołku: $\neg\Phi$. Ta tablica jest zatem spełnialna. Na mocy Faktu Zachowawczego, każde rozszerzenie tej tablicy (poprzez zastosowanie którejś z reguł rozszerzania tablic analitycznych) także jest tablicą spełnialną. W szczególności, ostateczna zamknięta tablica analityczna, będąca tablicowym dowodem Φ jest spełnialna. Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ tablica zamknięta nie jest spełnialna.

Lemat. Rodzina wszystkich zbiorów tablicowo niesprzecznych jest własnością niesprzeczności pierwszego rzędu.

Dowód tego lematu polega na (nietrudnym) sprawdzeniu, że zachodzą wszystkie warunki definiujące własności niesprzeczności pierwszego rzędu (zob. Fitting 1990, 132).

Pełność metody TA dla logiki pierwszego rzędu. Jeśli zdanie Φ języka L jest tautologią, to Φ ma dowód tablicowy.

Dowód. Jeśli Φ nie ma dowodu tablicowego, to nie istnieje zamknięta tablica analityczna dla $\{\neg\Phi\}$. Wtedy $\{\neg\Phi\}$ jest tablicowo niesprzeczny, a zatem (na mocy Lematu poprzedzającego niniejsze twierdzenie oraz Twierdzenia o Istnieniu Modelu), $\{\neg\Phi\}$ jest spełnialny. Oznacza to, że Φ nie jest tautologią.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl