

# Reguły wnioskowania dla KRP

## 1 Reguły pierwotne

- **Reguła odrywania (RO)** — Jeśli do dowodu należy implikacja oraz jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}$$

- **Regułą dołączania alternatywy (DA)** Jeśli do dowodu należy jakaś formuła, to do dowodu wolno dołączyć alternatywę, której jednym z członów jest ta formuła.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}$$

- **Reguła dodawania poprzedników (DP)** — Jeśli do dowodu należą dwie implikacje o takim samym następniku, to do dowodu wolno dołączyć implikacje o tymże następniku i o poprzedniku będącym alternatywą poprzedników tych implikacji.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \varphi \rightarrow \beta}{(\alpha \vee \varphi) \rightarrow \beta}$$

- **Reguła dołączania koniunkcji (DK)** — Do dowodu wolno dołączyć koniunkcję, o ile oba jej człony należą do dowodu.

$$\frac{\alpha}{\beta}$$


---


$$\alpha \wedge \beta$$

**Reguła opuszczania koniunkcji (OK)** — Jeśli do dowodu należy koniunkcja, to wolno dołączyć do dowodu każdy z jej członów.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

- **Reguła dołączania równoważności (DR)** — Do dowodu wolno dołączyć równoważność, o ile należy do dowodu implikacja, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikacja odwrotna.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\beta \rightarrow \alpha}$$


---


$$\alpha \equiv \beta$$

- **Reguła opuszczania równoważności (OR)** — Jeśli do dowodu należy równoważność, to wolno dołączyć do dowodu zarówno implikację, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikację odwrotną.

$$\frac{\alpha \equiv \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{\alpha \equiv \beta}{\beta \rightarrow \alpha}$$

- **Reguła kontrapozycji (RK)** — Jeśli do dowodu należy implikacja, której poprzednikiem jest negacja jednej formuły, a następnikiem negacja drugiej formuły, to do dowodu można dołączyć implikację, której poprzednikiem jest druga formuła, a następnikiem pierwsza formuła.

$$\frac{\neg \alpha \rightarrow \neg \beta}{\beta \rightarrow \alpha}$$

- Reguła opuszczania kwantyfikatora uniwersalnego (O $\forall$ ).

$$\frac{\forall x\alpha}{\alpha(x/t)}$$

- Reguła dołączania kwantyfikatora uniwersalnego (D $\forall$ ).

$$\frac{\alpha}{\forall x\alpha}$$

**Uwaga:** powyższa reguła może być stosowana tylko wtedy, gdy  $x$  nie jest zmienną wolną.

- Reguła dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego (D $\exists$ ).

$$\frac{\alpha(x/t)}{\exists x\alpha}$$

- Reguła opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego (O $\exists$ )

$$\frac{\exists x\alpha}{\alpha(x/t(x_1, \dots, x_n))}$$

**Uwaga:** Przy każdym zastosowaniu reguły opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego RO $\exists$  należy używać nowej stałej, nie występującej dotąd w dowodzie. Stała ta nie może ponadto wystąpić w dowodzonej tezie.

- Reguła negowania kwantyfikatora egzystencjalnego (N $\exists$ )

$$\frac{\neg\exists x\alpha}{\forall x\neg\alpha}$$

- Reguła negowania kwantyfikatora uniwersalnego (N $\forall$ )

$$\frac{\neg\forall x\alpha}{\exists x\neg\alpha}$$

$$\frac{\forall xP(x)}{P(x)} \quad \frac{\forall xP(x)}{P(y)} \quad \frac{\forall xP(x)}{P(a)}$$

## 2 Sposoby wykorzystania reguł opuszczania oraz dołączania kwantyfikatorów:

- Reguła opuszczania kwantyfikatora uniwersalnego (O $\forall$ ).
- Reguła dołączania kwantyfikatora uniwersalnego (O $\forall$ ).

$$\frac{P(x)}{\forall xP(x)}$$

- Reguła dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego (D $\exists$ ).

$$\frac{P(x)}{\exists xP(x)} \quad \frac{P(y)}{\exists xP(x)} \quad \frac{P(a)}{\exists xP(x)}$$

- Reguła opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego (O $\exists$ ).

$$\frac{\exists xQ(x)}{Q(a)} \quad \frac{\exists xQ(x, y, z)}{Q(a_{y,z}, y, z)} \quad \frac{\exists x\forall yQ(x, y, z)}{\forall yQ(a_z, y, z)} \quad \frac{\exists x\forall y\exists zQ(x, y, z)}{\forall y\exists zQ(a, y, z)}$$