Drzewa Semantyczne w KRZ

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

7 XII 2006, 13:30–15:00

Metoda drzew semantycznych (MDS) to automatyczna metoda rozkładu formuł języka rachunku zdań lub rachunku predykatów, która polega na eliminacji stałych logicznych (spójników i kwantyfikatorów) przez umieszczanie kolejnych podformuł danej formuły na gałęziach drzewa binarnego, zgodnie z pewnymi zasadami. Metoda ta ma wielorakie zastosowania. Pozwala między innymi na sprawdzanie czy podana formuła jest tautologią (kontrtautologią) rachunku zdań. Może być stosowana również do sprawdzania semantycznej sprzeczności bądź niesprzeczności zbioru formuł zdaniowych czy też weryfikacji poprawności wnioskowań.

Metoda ta jest bardzo prosta i w wielu przypadkach krótsza niż inne powszechnie stosowane w logice algorytmy na przykład tzw. metoda zero-jedynkowa.

Najpierw reguły MDS:

- $R(\neg\neg)$ Wartość logiczna formuły A oraz formuły $\neg\neg A$ jest taka sama, dlatego też możemy pod formułą postaci $\neg\neg A$ umieścić na tej samej gałęzi formułę A.

$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ | \\ A \end{array}$$

- $R(\wedge)$ Koniunkcja jest prawdziwa (ma wartość logiczną 1) tylko w przypadku, gdy oba jej człony są prawdziwe, dlatego też jeżeli dana formuła ma postać koniunkcji, to oba jej człony umieszczamy na tej samej gałęzi drzewa, zapisując je jeden pod drugim.

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array}$$

- $R(\vee)$ Jeżeli formuła jest alternatywą, to drzewo rozgałęzia się, a człony alternatywy umieszczamy na oddzielnych gałęziach, ponieważ alternatywa jest prawdziwa, gdy przynajmniej jeden z jej członów jest prawdziwy.

$$A \vee B$$

$$A \qquad\qquad B$$

- $R(\rightarrow)$ Implikacja jest prawdziwa, gdy zachodzi co najmniej jeden z warunków: jej poprzednik jest fałszywy lub następnik jest prawdziwy. Dlatego dokonując rozkładu formuły w postaci implikacji umieszczamy negację jej poprzednika na jednej gałęzi drzewa a następnik na drugiej.

$$
\begin{array}{ccc}
 & A \rightarrow B & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \neg A & & B
\end{array}
$$

- $R(\leftrightarrow)$ Równoważność jest prawdziwa wtedy, gdy oba jej człony są prawdziwe lub oba jej człony są fałszywe. Zatem drzewo dla takiej formuły musi rozdzielać się na dwie gałęzie: na jednej umieszczamy oba człony równoważności bez znaku negacji (co odpowiada ich prawdziwości), na drugiej oba człony z negacją (co odpowiada ich fałszywości).

$$
\begin{array}{ccc}
 & A \leftrightarrow B & \\
\swarrow & & \searrow \\
A & & \neg A \\
| & & | \\
B & & \neg B
\end{array}
$$

- $R(\neg\wedge)$ Koniunkcja jest fałszywa wtedy, gdy przynajmniej jeden z jej członów przyjmuje wartość logiczną 0, a więc podczas eliminacji formuły będącej zaprzeczeniem koniunkcji należy umieścić negacje jej członów na oddzielnych gałęziach drzewa (co spowoduje powstanie rozgałęzienia).

$$\neg(A \wedge B)$$

$$\neg A \qquad\qquad \neg B$$

- $R(\neg\vee)$ Gdy w procesie tworzenia drzewa napotkamy na formułę będącą negacją alternatywy to na tej samej gałęzi drzewa umieszczamy negacje obu jej członów, zgodnie z tym, że alternatywa jest fałszywa tylko wtedy, gdy oba jej człony są fałszywe.

$$\begin{array}{c} \neg(A \vee B) \\ | \\ \neg A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

- $R(\neg \rightarrow)$ Implikacja jest fałszywa tylko w jednym przypadku, gdy jej poprzednik jej prawdziwy, a następnik fałszywy; dlatego też rozkładając formułę będącą negacją implikacji na jednej gałęzi umieszczamy jej poprzednik i negację następnika.

$$\begin{array}{c} \neg(A \rightarrow B) \\ | \\ A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

- $R(\neg\leftrightarrow)$ Chcąc rozłożyć formułę w postaci negacji równoważności dokonujemy rozgałęzienia drzewa i na jednej z gałęzi umieszczamy jej lewy człon i negację prawego, a na drugiej negację lewego i prawy. Jest to zgodne z tym, że równoważność jest fałszywa, gdy jej człony mają różne wartości logiczne.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg(A \leftrightarrow B) & \\
\swarrow & & \searrow \\
A & & \neg A \\
| & & | \\
\neg B & & B
\end{array}
$$

Gałąź drzewa jest zamknięta, jeśli występuje na niej para formuł sprzecznych: A oraz $\neg A$, dla jakiejś formuły A języka KRZ. Gałąź, która nie jest zamknięta, nazywamy otwartą. Drzewo o wszystkich gałęziach zamkniętych nazywamy drzewem zamkniętym.

To co najważniejsze, jeśli chodzi o metodę drzew semantycznych da się streścić tak oto. Masz jakąś formułę języka KRZ. Budujesz jej drzewo semantyczne. Każda z konstruowanych gałęzi jest próbą konstrukcji wartościowania, dla którego rozważana formuła jest prawdziwa. Jeśli gałąź jest zamknięta (zawiera parę formuł wzajem sprzecznych), to gałąź taka ***nie może*** odpowiadać żadnemu wartościowaniu, dla którego badana formuła jest prawdziwa. Zamykanie gałęzi to zatem wykluczanie zachodzenia pewnych sytuacji. Natomiast istnienie gałęzi otwartych w drzewie semantycznym danej formuły ukazuje, że istnieją wartościowania, przy których formuła ta jest prawdziwa.

Jeśli podczas tworzenia łańcucha formuł w konstruowanym drzewie semantycznym uzyskamy w tym łańcuchu parę formuł wzajem sprzecznych, to dalsza praca z tym łańcuchem jest niepotrzebna: możemy ją zakończyć, doklejając do takiego łańcucha liść z informacją o uzyskaniu sprzeczności i otrzymując w ten sposób gałąź zamkniętą drzewa, traktowaną jako twór kompletny. Pamiętasz: *Sprzeczność to śmierć logiczna.* Nadto, z kultury masowej pamiętasz: *A kto umarł, ten nie żyje.* Podstawowym celem budowania drzew semantycznych jest uzyskiwanie łańcuchów zamkniętych, tj. zbiorów formuł wśród których jest para formuł wzajem sprzecznych. Jeśli jakiś zbiór formuł zawiera parę formuł wzajem sprzecznych, to ***każdy*** jego nadzbiór także tę parę zawiera. Można zakończyć pracę.

Zasada 1.
Sprawdzaj po każdym kroku, czy możesz zamknąć, którąś z gałęzi. Jeśli tak, to oznacz ją $\times$ i nie przedłużaj.

Ponieważ zasady oznaczone jako $R(\vee)$, $R(\rightarrow)$, $R(\leftrightarrow)$, $R(\neg\wedge)$ oraz $R(\neg \leftrightarrow)$ powodują rozwidlanie gałęzi, a co za tym idzie w następnym kroku musimy dokonywać wszystkich kolejnych operacji oddzielnie na wszystkich jeszcze nie zamkniętych gałęziach, zatem dobrze jest przestrzegać zasady:

Zasada 2.
Najpierw stosuj reguły nie powodujące rozgałęzienia drzewa a dopiero potem reguły powodujące rozgałęzienie.

- Formuła A jest **tautologią** rachunku zdań (prawem logiki) wtedy i tylko wtedy, gdy $Val(A, w) = 1$ dla każdego wartościowania w. Innymi słowy: jest prawdziwa przy dowolnym wartościowaniu występujących w niej zmiennych zdaniowych.
- Formuła A jest **kontrtautologią** rachunku zdań wtedy i tylko wtedy, gdy $Val(A, w) = 0$ dla każdego wartościowania w (jest ona fałszywa przy dowolnym wartościowaniu).

Aby móc stwierdzić, że formuła ma przy każdym wartościowaniu wartość:

- **1** — należy wykluczyć możliwość, że ma ona wartość **0** przy jakimś wartościowaniu,
- **0** — należy wykluczyć możliwość, że ma ona wartość **1** przy jakimś wartościowaniu.

Przykład. Czy formuła $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$ jest tautologią czy kontrtautologią rachunku zdań?

Rozpoczynamy od sprawdzenia czy formuła ta jest tautologią KRZ. Konstruujemy zatem drzewo, aby sprawdzić czy negacja tej formuły przyjmuje wartość 1 dla jakiegoś wartościowania:

$$\neg[(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)] \quad {}^{1.\neg\rightarrow}$$

$$(1_g) \quad p \rightarrow q \quad {}^{3.\rightarrow}$$

$$(1_d) \quad \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \quad {}^{2.\neg\neg}$$

$$(2) \quad p \rightarrow \neg q \quad {}^{4.\rightarrow}$$

$$(3_l) \quad \neg p \qquad\qquad (3_p) \quad q$$

$$(4_l) \quad \neg p \qquad (4_p) \quad \neg q \qquad (4_l) \quad \neg p \qquad (4_p) \quad \neg q$$

$$\circ \qquad\qquad \circ \qquad\qquad \circ \qquad\qquad \times_{3_p,4_p}$$

Z istnienia gałęzi otwartej w powyższym drzewie wynika, że formuła $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$ nie jest tautologią.

Sprawdzimy, czy jest ona kontrtautologią:

$$(p \to q) \to \neg(p \to \neg q) \quad 1.^{\to}$$

$$(1_l) \quad \neg(p \to q) \quad 2.^{\neg\to} \qquad\qquad (1_p) \quad \neg(p \to \neg q) \quad 3.^{\neg\to}$$

$$(2_g) \quad p \qquad\qquad (3_g) \quad p$$

$$(2_d) \quad \neg q \qquad\qquad (3_d) \quad \neg\neg q \quad 4.^{\neg\neg}$$

$$\circ \qquad\qquad (4) \quad q$$

$$\circ$$

Widać, że formuła $(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$ nie jest również kontrtautologią KRZ.

(MP) *Modus ponendo ponens*: $(A \to B) \wedge A \to B$

$$\neg[(A \to B) \wedge A \to B] \quad {}^{1.\neg\to}$$

$$(1_g) \quad (A \to B) \wedge A \quad {}^{2.\wedge}$$

$$(1_d) \quad \neg B$$

$$(2_g) \quad A \to B \quad {}^{3.\to}$$

$$(2_d) \quad A$$

$$\begin{array}{cc} (3_l) \quad \neg A & (3_p) \quad B \\ \times_{2_d,3_l} & \times_{1_d,3_p} \end{array}$$

(MT) *Modus tollendo tollens*: $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow \neg A$

$$\neg[(A \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow \neg A] \quad {}^{1.\neg\rightarrow}$$

$$(1_g) \quad (A \rightarrow B) \wedge \neg B \quad {}^{3.\wedge}$$

$$(1_d) \quad \neg\neg A \quad {}^{2.\neg\neg}$$

$$(2) \quad A$$

$$(3_g) \quad A \rightarrow B \quad {}^{4.\rightarrow}$$

$$(3_d) \quad \neg B$$

$$(4_l) \quad \neg A \qquad\qquad (4_p) \quad B$$

$$\times_{2,4_l} \qquad\qquad \times_{3_d,4_p}$$

Zbiór formuł X jest **semantycznie niesprzeczny**, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie formuły z tego zbioru mają wartość 1. W przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór ten jest **semantycznie sprzeczny**.

Zatem, zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje wartościowanie przy którym wszystkie formuły z tego zbioru mają wartość 1.

Do badania czy dany zbiór formuł języka rachunku zdań jest semantycznie niesprzeczny można zastosować MDS w następujący sposób:

1. Przypuszczamy, że istnieje takie wartościowanie, przy którym wszystkie formuły z rozważanego zbioru przyjmują wartość 1 (są prawdziwe).
2. Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu umieszczamy formuły z badanego zbioru (oznaczając je przez $0.1, 0.2, \ldots$).
3. Z kształtu otrzymanego drzewa odczytujemy odpowiedź:
   i) *zbiór jest semantycznie niesprzeczny*, gdy drzewo ma co najmniej jedną gałąź otwartą,
   ii) *zbiór jest semantycznie sprzeczny* jeżeli wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte.

Przypadek ii) przeczy założeniu poczynionemu na początku (w punkcie 1) co oznacza, że nie istnieje takie wartościowanie przy którym wszystkie formuły z rozważanego zbioru są prawdziwe. A co za tym idzie, że badany zbiór zdań jest semantycznie sprzeczny. W przeciwnym przypadku jest on semantycznie niesprzeczny, a wartościowanie przy którym wszystkie formuły z rozważanego zbioru przyjmują wartość 1 można odczytać z gałęzi otwartej drzewa.

Ćwiczenie.

Sprawdzić, czy zbiór formuł:

$$\{p, \neg q, \neg r, p \rightarrow (s \vee t), t \rightarrow (r \wedge q)\}$$

jest semantycznie niesprzeczny.

Odpowiedź: na stronie 38 tekstu dr IBK.

Ćwiczenie.

Sprawdzić, czy zbiór formuł:

$$\{p \to q, r \to q, p \vee r \to q\}$$

jest semantycznie niesprzeczny.

Odpowiedź: na stronie 39 tekstu dr IBK.

Ćwiczenie.

Sprawdzić, czy zbiór formuł:

$$\{p \rightarrow r, p \vee r, q \vee r, r \rightarrow \neg p, \neg p \rightarrow \neg r\}$$

jest semantycznie niesprzeczny.

Odpowiedź: na stronie 40 tekstu dr IBK.

- Formuła A **wynika logicznie ze zbioru formuł zdaniowych** X wtedy i tylko wtedy, gdy formuła A jest prawdziwa przy każdym wartościowaniu, przy którym prawdziwe są wszystkie formuły ze zbioru X.

Szczególnym przypadkiem jest wynikanie logiczne formuły z innej formuły zdaniowej:

- Formuła B **wynika logicznie z formuły zdaniowej** A wtedy i tylko wtedy, gdy B jest prawdziwa przy każdym wartościowaniu, przy którym prawdziwa jest formuła A.

Do sprawdzenia, czy dana formuła A wynika ze zbioru formuł zdaniowych X można wykorzystać MDS w następujący sposób:

- zakładamy, że wszystkie formuły ze zbioru X są prawdziwe,
- przypuszczamy, że formuła A jest fałszywa (tzn. formuła $\neg A$ jest prawdziwa),
- budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu umieszczamy wszystkie formuły ze zbioru X oraz formułę $\neg A$.

Gałęzie otwarte w otrzymanym drzewie odpowiadają wartościowaniom, przy których wszystkie formuły ze zbioru X są prawdziwe, a formuła A jest fałszywa. Zatem, jeśli drzewo:

- ma choć jedną gałąź otwartą, to formuła A *nie wynika logicznie* ze zbioru formuł zdaniowych X,
- ma wszystkie gałęzie zamknięte, to formuła A *wynika logicznie* ze zbioru formuł X.

Jeżeli otrzymane drzewo ma wszystkie gałęzie zamknięte, to znaczy, że nie istnieje takie wartościowanie, przy którym wszystkie formuły ze zbioru X są prawdziwe, a formuła A jest fałszywa. Zatem nasze przypuszczenie, że formuła A nie wynika logicznie ze zbioru X jest fałszywe. Co prowadzi do wniosku, że formuła A wynika logicznie ze zbioru formuł zdaniowych X.

Innymi słowy:

- Formuła A wynika logicznie ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór formuł zdaniowych $X \cup \{\neg A\}$ jest semantycznie sprzeczny.
- Formuła A nie wynika logicznie ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór formuł $X \cup \{\neg A\}$ jest semantycznie niesprzeczny.

Przykład.
Rozpocznijmy od sprawdzenia, czy formuła $\neg q \rightarrow \neg p$ wynika logicznie z formuły $p \rightarrow q$.

Przypuśćmy, że istnieje takie wartościowanie, przy którym formuła $p \rightarrow q$ jest prawdziwa, a formuła $\neg q \rightarrow \neg p$ jest fałszywa (odpowiada to przypuszczeniu, że implikacja $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ jest fałszywa). Sprawdzamy, czy takie wartościowanie istnieje budując drzewo, w którego pniu umieszczamy formuły: $p \rightarrow q$ oraz $\neg(\neg q \rightarrow \neg p)$:

$$p \rightarrow q \quad {}^{3.\rightarrow}$$

$$\neg(\neg q \rightarrow \neg p) \quad {}^{1.\neg\rightarrow}$$

$$(1_g) \quad \neg q$$

$$(1_d) \quad \neg\neg p \quad {}^{2.\neg\neg}$$

$$(2) \quad p$$

$$(3_l) \; \neg p \qquad\qquad (3_p) \; q$$

$$\times_{2,3_l} \qquad\qquad \times_{1_g,3_p}$$

Otrzymane drzewo ma wszystkie gałęzie zamknięte, co dowodzi, że nie istnieje wartościowanie, przy którym formuła $p \rightarrow q$ jest prawdziwa i jednocześnie formuła $\neg q \rightarrow \neg p$ jest fałszywa. Zatem formuła $\neg q \rightarrow \neg p$ wynika logicznie z formuły $p \rightarrow q$.

Przykład.

Sprawdźmy, które ze zdań:

a) *Bóg istnieje.*

b) *Bóg nie istnieje*.

c) *Życie ma sens*.

d) *Życie nie ma sensu*.

wynika logicznie ze zdania

e) *Nieprawda, że: życie nie ma sensu, o ile Bóg nie istnieje.*

Rozpoczynamy od oznaczenia przez p zdania *Bóg istnieje* oraz przez q zdania *Życie ma sens*. Schematy rozważanych zdań wyglądają następująco:

a)	p
b)	$\neg p$
c)	q
d)	$\neg q$
e)	$\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$

<table>
<tr>
<td>1

$\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$ $^{1.\neg\rightarrow}$
$|$
$\neg p$
$|$
(1_g) $\neg p$
$|$
(1_d) $\neg\neg q$ $^{2.\neg\neg}$
$|$
(2) q
$|$
$\circ$</td>
<td>2

$\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$ $^{2.\neg\rightarrow}$
$|$
$\neg\neg p$ $^{1.\neg\neg}$
$|$
(1) p
$|$
(2_g) $\neg p$
$|$
(2_d) $\neg\neg q$
$|$
$\times_{1,2_g}$</td>
</tr>
</table>

3	4
$\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$ $^{1.\neg\rightarrow}$	$\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$ $^{2.\neg\rightarrow}$
(0.2) $\neg q$	$\neg\neg q$ $^{1.\neg\neg}$
(1_g) $\neg p$	(1) q
(1_d) $\neg\neg q$ $^{2.\neg\neg}$	(2_g) $\neg p$
(2) q	(2_d) $\neg\neg q$ $^{3.\neg\neg}$
$\times_{0.2,2}$	(3) q
	$\circ$

Ponieważ drzewa 2 oraz 3 są zamknięte, to możemy łatwo stwierdzić, że ze zdania *Nieprawda, że: życie nie ma sensu, o ile Bóg nie istnieje* wynikają logicznie zdania: *Bóg nie istnieje* oraz *Życie ma sens*. Przemyśl to.

1. Sprawdź, czy jest semantycznie sprzecznym zbiorem zdań:

Rodaku! Jeśli jesteś prawdziwym Polakiem, to głosujesz na PPP (Partię Prawdziwych Polaków). Wtedy i tylko wtedy PPP wygrywa wybory, jeśli Ty na nią głosujesz. Co najmniej jedno z dwojga: albo jesteś prawdziwym Polakiem, albo jesteś za włączeniem Polski do Unii Europejskiej. PPP nie wygrywa wyborów, jeśli jesteś za włączeniem Polski do Unii Europejskiej.

Odpowiedź: na stronie 41 tekstu dr IBK.

2. Sprawdź czy podane wnioskowanie jest dedukcyjne:

Jeżeli poziom inflacji jest stały, o ile wzrasta produkt narodowy, to bezrobocie się zmniejsza. Ale okazuje się, że bezrobocie nie zmniejsza się, chociaż przeciętny obywatel nie trzyma oszczędności w NBB (Naszym Bezpiecznym Banku). Jednakże zachodzi co najmniej jedno z dwojga: albo produkt narodowy wzrasta, o ile poziom inflacji jest stały, albo doradcy ekonomiczni rezygnują. Bez wątpienia, jeśli doradcy ekonomiczni rezygnują, to spada bezrobocie lub wzrasta produkt narodowy. No i co z tego wynika? Ano to, że przeciętny obywatel trzyma oszczędności w NBB.

Odpowiedź: na stronie 50 tekstu dr IBK.

3. Zastosuj metodę drzew semantycznych do rozwiązania zadań z egzaminów z logiki, podanych na stronach:

www.logic.amu.edu.pl/egzamin2001.html
www.logic.amu.edu.pl/egzamin2002.html

4. Przeczytaj tekst *Po co mi logika? Jestem Humanistką!* dostępny na stronie:
www.logic.amu.edu.pl/pogonowski_txt.html
(plik ten możesz też pobrać:
www.logic.amu.edu.pl/pliki/dydaktyka/magdola.pdf)