MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

WYKŁAD 3: FUNKCJE

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Pojęcie *funkcji* to jedno z najważniejszych pojęć matematycznych. W opisach *ilościowych*, które są charakterystyczne dla współczesnej nauki, używa się powszechnie tego pojęcia. Funkcje są formalnymi reprezentacjami sytuacji, gdy jakaś wielkość jest w sposób jednoznaczny zależna od innych wielkości. Rozważa się jednak całkiem ogólne sytuacje, a więc również te, w których zależność funkcyjna nie wiąże wielkości liczbowych, lecz elementy jednego zbioru z elementami innego zbioru. Z funkcjami spotykamy się bardzo wcześnie w procesie edukacji – tabliczki dodawania i mnożenia charakteryzują bowiem pewne funkcje, określone dla liczb i mające wartości liczbowe.

W zależności od kontekstu, używa się określeń: funkcja, przyporządkowanie, odwzorowanie, przekształcenie, operacja, i in. Należy jednak wyraźnie podkreślić, że funkcje w matematyce są pewnymi zbiorami, a dokładniej: relacjami, spełniającymi stosowne warunki jednoznaczności. Czasami trudno uwolnić się od różnych intuicyjnych skojarzeń, motywowanych uzusem językowym i skłaniających np. do żywienia przekonań, że funkcje są jakimiś procesami, że za ich przyczyną coś „dzieje się” z rozważanymi obiektami. Pewna praktyka posługiwania się funkcjami pozwala na wyzwolenie się z tego typu złudnych przeświadczeń.

1 Podstawowe definicje

Funkcje są relacjami, a więc można byłoby stosować dla nich taką samą notację jak dla relacji. Jednak ze względu na Tradycję, zwykle używamy nieco innej symboliki. Czytelnicy znają te konwencje zapisu ze szkoły.

Funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazwiemy każdą taką relację między elementami zbiorów X oraz Y, która nie zawiera żadnych dwóch par uporządkowanych mających te same poprzedniki oraz różne następniki. Innymi słowy, f jest *funkcją* ze zbioru X w zbiór Y, jeżeli:

1. $f \subseteq X \times Y$

2. dla dowolnych $x \in X$ oraz $y_1 \in Y$, $y_2 \in Y$: jeśli $(x, y_1) \in f$ i $(x, y_2) \in f$, to $y_1 = y_2$.

Jeśli $(x, y) \in f$, to x nazywamy *argumentem* funkcji f, zaś y nazywamy *wartością* funkcji f (dla argumentu x). Zamiast pisać $(x, y) \in f$ zwykle piszemy $f(x) = y$. Zapis ten jest uzasadniony jednoznacznością wartości funkcji dla danego argumentu. Inaczej niż w przypadku relacji, raczej nie stosujemy zapisu xfy jako równoznacznego z $(x, y) \in f$.

Dziedziną funkcji $f \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór $dom(f)$ wszystkich jej argumentów, czyli zbiór tych wszystkich $x \in X$, dla których istnieje $y \in Y$ taki, że $y = f(x)$.

Przeciwdziedziną (lub *zbiorem wartości*) funkcji $f \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór $rng(f)$ tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje $x \in X$ taki, że $y = f(x)$.

Funkcje $f \subseteq X \times Y$ oraz $g \subseteq X \times Y$ są równe, gdy ich dziedziny są równe (czyli gdy $dom(f) = dom(g)$) oraz gdy ich wartości dla poszczególnych argumentów są równe, czyli gdy $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in dom(f)$.

Jeśli $f \subseteq X \times Y$ jest funkcją oraz jej dziedzina jest równa całemu zbiorowi X (czyli gdy $dom(f) = X$), to mówimy, że f jest określona w zbiorze X (lub: określona na zbiorze X). W takim przypadku używamy (znanego ze szkoły) zapisu $f : X \to Y$. Posługujemy się wtedy określeniami:

1. funkcja f odwzorowuje X w Y

2. funkcja f przekształca X w Y.

W przypadku, gdy $f : X \to X$, często mówi się, że f jest *działaniem* w zbiorze X.

Jeśli dziedzina funkcji $f \subseteq X \times Y$ nie jest równa całemu zbiorowi X, to mówi się, że f jest *funkcją częściową* z X w Y.

PRZYKŁADY.

1. Zbiór $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\}$ jest funkcją. Zapisujemy ją: $y = \frac{1}{x}$ lub $f(x) = \frac{1}{x}$. Mamy w tym przypadku:

   (a) $dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

   (b) $rng(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

2. Relacja mniejszości $<$ liczb rzeczywistych nie jest funkcją, gdyż nie spełnia warunku jednoznaczności: nie jest tak, iż dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jeden $y \in \mathbb{R}$ taki, że $x < y$.

3. Przyporządkowanie każdemu obywatelowi Rzeczpospolitej Polskiej jego numeru PESEL jest funkcją (o ile oczywiście nie popełniono błędu i nie przypisano jakiemuś obywatelowi dwóch różnych numerów). Jej dziedziną jest zbiór wszystkich obywateli RP, jej przeciwdziedziną jest zbiór kodów: ciągów cyfr, z których pierwsze sześć koduje datę urodzenia (w schemacie: rrmmdd), a następne pięć koduje jakieś inne dane o obywatelu. Powinno też być tak, aby różnym obywatelom przypisane były różne numery.

4. Funkcję, która dla każdego swojego argumentu przyjmuje tę samą wartość, nazywamy *funkcją stałą*. Dla przykładu funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona warunkiem $f(x) = 1$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest funkcją stałą.

5. Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$, niech $\llcorner x \lrcorner$ będzie największą liczbą całkowitą, która nie przekracza x (czyli jest mniejsza lub równa x). Wtedy $\llcorner\ \lrcorner : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$. Tę funkcję nazywamy funkcją *podłogi*. Dualna do niej jest funkcja *sufitu* $\ulcorner\ \urcorner : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, która każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje najmniejszą liczbę całkowitą $\ulcorner x \urcorner$, która jest większa lub równa liczbie x. Dla przykładu: $\llcorner \pi \lrcorner = 3$, $\ulcorner \pi \urcorner = 4$.

6. Dla dowolnego ustalonego uniwersum U, funkcjami są: $\{(X, \wp(X)) : X \subseteq U\}$ oraz $\{(X, X') : X \subseteq U\}$. Pierwsza z nich przyporządkowuje każdemu podzbiorowi rozważanego uniwersum zbiór potęgowy tego podzbioru, a druga przyporządkowuje każdemu podzbiorowi rozważanego uniwersum jego dopełnienie względem rozważanego uniwersum.

$\square$

Wszystkie dotąd omówione pojęcia dotyczyły *funkcji jednoargumentowych*, albo inaczej *funkcji jednej zmiennej*. Jeśli $f : X \times Y \to Z$, to argumentami funkcji f są pary uporządkowane $(x, y) \in X \times Y$, zaś jej wartościami są elementy zbioru Z. W takich przypadkach wartość funkcji f dla argumentu (x, y) oznaczamy przez $f(x, y)$. Mówimy też, że jest to funkcja *dwuargumentowa*. Należy przy tym pamiętać, że kolejność argumentów funkcji dwuargumentowej jest istotna: w ogólności $f(x, y) \neq f(y, x)$.

W całkiem podobny sposób określamy funkcje trójargumentowe, czteroargumentowe, itd. Ogólnie, mówimy, że f jest *funkcją n-argumentową* (*funkcją n zmiennych*), gdy $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to Y$, dla pewnych zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ oraz Y.

PRZYKŁADY.

1. Dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie liczb rzeczywistych są funkcjami dwuargumentowymi. Dziedziną trzech pierwszych z tych funkcji jest

$\mathbb{R}^2$, dziedziną dzielenia jest zbiór $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$.

2. Funkcja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ określona wzorem: $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ jest trójargumentowa.

3. Dla dowolnego ustalonego uniwersum U, funkcjami dwuargumentowymi są: $\{((X, Y), X \cup Y) : X \subseteq U \text{ oraz } Y \subseteq Y\}$ oraz $\{((X, Y), X \cap Y) : X \subseteq U \text{ oraz } Y \subseteq Y\}$. Pierwsza z nich przyporządkowuje dwóm zbiorom ich sumę, a druga ich część wspólną.

□

W dalszym ciągu będziemy często korzystali nie tylko ze zbiorów $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ale także z tych ich podzbiorów, które obejmują jedynie liczby dodatnie odpowiedniego rodzaju. Wygodnie będzie więc przyjąć oznaczenia:

1. $\mathbb{N}_+$: zbiór wszystkich dodatnich liczb naturalnych (czyli $\mathbb{N}_+ - \{0\}$)

2. $\mathbb{Z}_+$: zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych (co jest tym samym co zbiór $\mathbb{N}_+$)

3. $\mathbb{Q}_+$: zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych

4. $\mathbb{R}_+$: zbiór wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych.

2 Rodzaje funkcji

Czytelnicy pamiętają zapewne ze szkoły niektóre typy funkcji, m.in. *iniekcje*, *surjekcje* oraz *bijekcje*. Przypomnijmy:

1. *Iniekcje*. Funkcja $f : X \to Y$ jest *iniekcją* ze zbioru X w zbiór Y, gdy różnym argumentom funkcji f przyporządkowane są różne jej wartości. Tak więc, $f : X \to Y$ jest *iniekcją* ze zbioru X w zbiór Y, gdy dla dowolnych $x_1 \in X$ oraz $x_2 \in X$, jeśli $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$. Jeśli f jest iniekcją, to mówimy, że f jest funkcją *różnowartościową*. Jeśli $f : X \to Y$ jest różnowartościowa, to stosujemy zapisy:

$$f : X \underset{1-1}{\longrightarrow} Y \quad \text{lub} \quad f : X \xrightarrow{1-1} Y$$

2. *Surjekcje*. Funkcja $f : X \to Y$ jest *surjekcją* ze zbioru X na zbiór Y, gdy przeciwdziedziną funkcji f jest cały zbiór Y. Tak więc, $f : X \to Y$ jest *surjekcją* ze zbioru X na zbiór Y, gdy dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ taki, że $f(x) = y$. Jeśli $f : X \to Y$ jest surjekcją, to stosujemy zapisy:

$$f : X \underset{na}{\longrightarrow} Y \quad \text{lub} \quad f : X \xrightarrow{na} Y$$

3. *Bijekcje*. Funkcja $f : X \to Y$ jest *bijekcją* ze zbioru X na zbiór Y (albo: *bijekcją* między zbiorami X i Y), gdy f jest jednocześnie iniekcją z X w Y oraz surjekcją z X na Y. Bijekcje nazywamy funkcjami *wzajemnie jednoznacznymi* (także: $1-1$ funkcjami). Jeśli $f : X \to Y$ jest bijekcją, to stosujemy zapisy:

$$f : X \xrightarrow[1-1]{na} Y \quad \text{lub} \quad f : X \xrightarrow[na]{1-1} Y$$

PRZYKŁADY.

1. Funkcja $f(x) = 2x + 3$ jest bijekcją z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$. Istotnie, każdej liczbie $x \in dom(f)$ odpowiada liczba $y = 2x + 3$, a każdej liczbie $y \in rng(f)$ odpowiada liczba $x = \frac{y-3}{2}$. Jeśli $x_1 \neq x_2$, to $2x_1 + 3 \neq 2x_2 + 3$.
2. Funkcja $f(x) = x^2$ jest surjekcją z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ (ponieważ każda liczba nieujemna jest kwadratem jakiejś liczby rzeczywistej). Nie jest surjekcją z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, ponieważ ujemne liczby rzeczywiste nie należą do zbioru jej wartości.
3. Funkcje sufitu i podłogi są surjekcjami z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{Z}$. Nie są surjekcjami z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Nie są bijekcjami z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{Z}$.
4. Bijekcje $f : X \to X$ nazywamy również (zwłaszcza w przypadku, gdy zbiór X jest skończony) *permutacjami* zbioru X.

$\square$

Dowolną funkcję, której dziedziną jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dla pewnej $n \in \mathbb{N}_+$ nazywamy *ciągiem skończonym* (o długości n). Wartości takiej funkcji nazywamy wtedy *wyrazami* tego ciągu: jej wartość dla k-tego argumentu nazywamy k-tym wyrazem ciągu. Zwykle ciągi skończone o długości n zapisujemy tak samo jak n-tki uporządkowane: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Jeśli żadne dwa wyrazy ciągu nie są identyczne, to ciąg nazywamy *różnowartościowym*.

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór $\mathbb{N}_+$. Ciąg nieskończony o n-tym wyrazie równym a_n oznaczamy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ (czasem przez: $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}_+}$). Często pomijamy indeks $n \in \mathbb{N}_+$, gdy kontekst na to pozwala.

Ciągi, których wyrazami są liczby, nazywamy ciągami *liczbowymi*. Podobnie, ciągi, których wyrazami są funkcje, nazywamy ciągami *funkcyjnymi*.

UWAGA. Czasem wygodnie jest numerować wyrazy ciągów poczynając od 1, a czasem od zera.

PRZYKŁADY.

1. Ciąg $(\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\})$ jest skończonym (różnowartościowym) ciągiem zbiorów.

2. Ciąg $(1, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$ jest skończonym ciągiem liczbowym, który nie jest różnowartościowy.
3. Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$, którego n-tym wyrazem jest $a_n = \frac{1}{n}$ jest ważnym nieskończonym ciągiem liczbowym (nazywanym *ciągiem harmonicznym*), który wielokrotnie pojawi się w dalszym tekście.
4. Ciąg $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$, którego n-tym wyrazem jest funkcja, zdefiniowana wzorem $f_n(x) = \frac{1}{n}x$ jest przykładem ciągu funkcyjnego (dla $x \in \mathbb{R}$, powiedzmy).
5. Ciąg $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$, którego n-tym wyrazem jest n-ta liczba pierwsza p_n jest nieskończonym ciągiem liczbowym.
6. Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych traktujemy jako ciągi: zerowym elementem jest część całkowita liczby rzeczywistej, a kolejne dalsze elementy rozwinięcia mają postać $\frac{c_n}{10^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, zaś c_n jest liczbą naturalną mniejszą od 10.

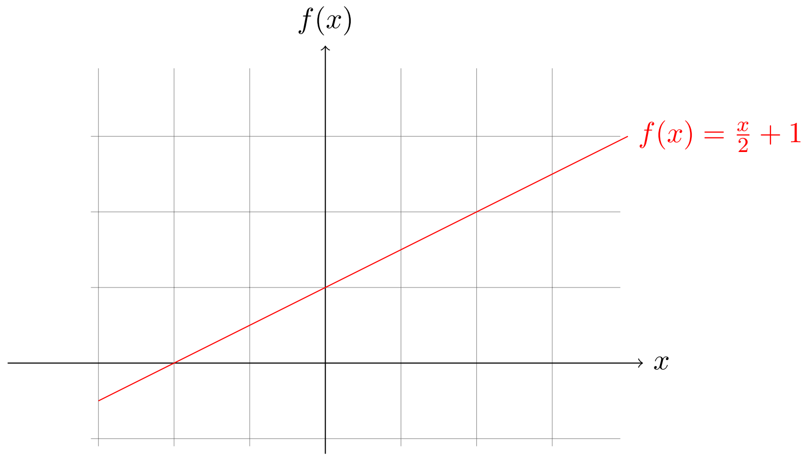
$\square$

3 Wizualizacje

Pamiętamy, że relacje reprezentować można przez grafy. Ponieważ każda funkcja jest relacją, więc również funkcje mogą być reprezentowane przez grafy. Można również, w przypadku funkcji o dziedzinie skończonej, podawać jej reprezentację w postaci tabeli: wertykalnie – kolumna argumentów, kolumna odpowiadających im wartości (albo horyzontalnie – wiersz argumentów, wiersz odpowiadających im wartości). Bardziej rozpowszechniona jest jednak – dobrze znana czytelnikom ze szkoły – reprezentacja graficzna funkcji poprzez ich *wykresy*. Czytelnicy pamiętają ze szkoły układ współrzędnych kartezjańskich na płaszczyźnie. Gdy rysujemy wykres funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, to argumenty x tej funkcji tworzą *oś odciętych*, jej wartości $f(x)$ znajdują się na takim wykresie pionowo nad x na takiej wysokości, która odpowiada wartości $f(x)$. Rysujemy więc graf relacji $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$. Należy przy tym pamiętać, że na osi odciętych oraz osi rzędnych możemy używać różnej *skali*, co często znakomicie ułatwia zarówno rysowanie wykresów, jak też ich rozpoznawanie. Rozważmy kilka przykładów.

3.1 Przykład: funkcja liniowa

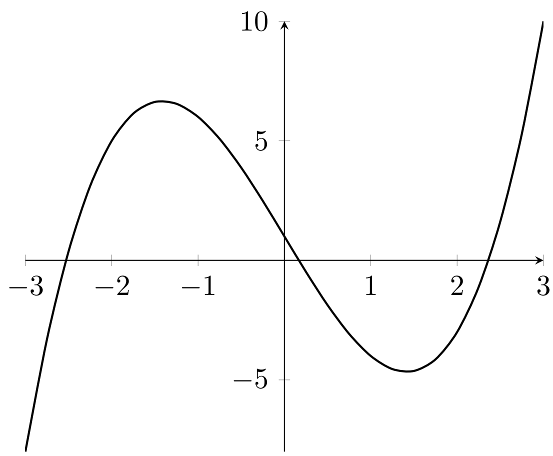
Funkcja $f(x) = \frac{x}{2} + 1$. Dziedziną i przeciwdziedziną tej funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$. Skala na osi odciętych jest taka sama jak na osi rzędnych (proste pionowe i poziome przechodzą przez punkty kratowe).



Wykresem każdej funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ (gdzie $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) o dziedzinie $\mathbb{R}$ jest linia prosta.

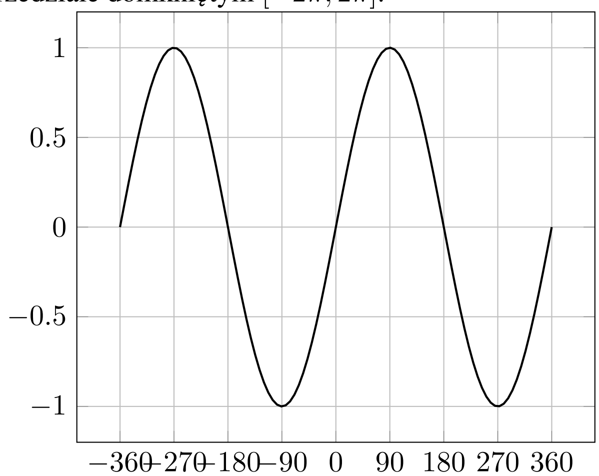
3.2 Przykład: funkcja wielomianowa

Funkcja $f(x) = x^3 - 6 \cdot x + 1$. Dziedziną i przeciwdziedziną tej funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$. Zauważmy, że skala na osi odciętych jest inna niż na osi rzędnych.



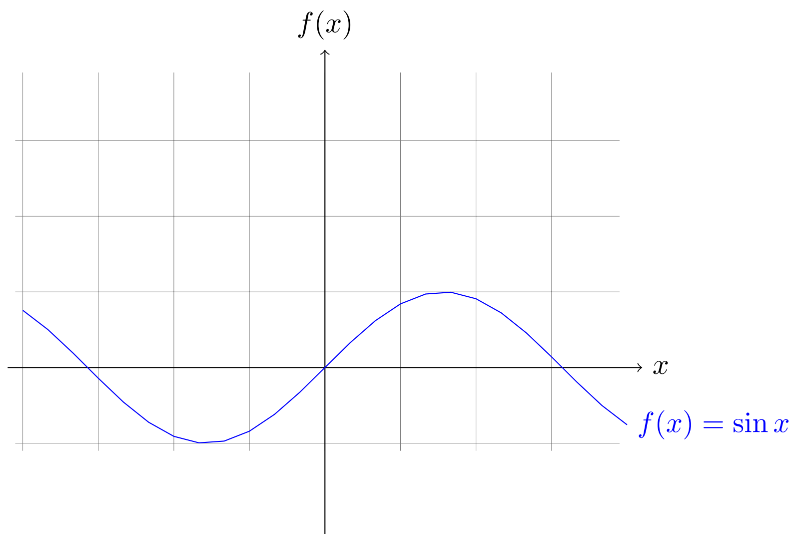
3.3 Przykład: funkcja sinus

Funkcja $f(x) = \sin(x)$. Argumentami funkcji są wielkości kątowe mierzone w stopniach (tutaj w zakresie od -360 do 360 stopni), a jej wartościami liczby rzeczywiste w przedziale domkniętym $[-1, 1]$. Przypominamy, że miarą łukową kąta jest stosunek długości łuku okręgu opartego na tym kącie do długości promienia tego okręgu. W mierze łukowej rozważane tu argumenty funkcji znajdują się zatem w przedziale domkniętym $[-2\pi, 2\pi]$.



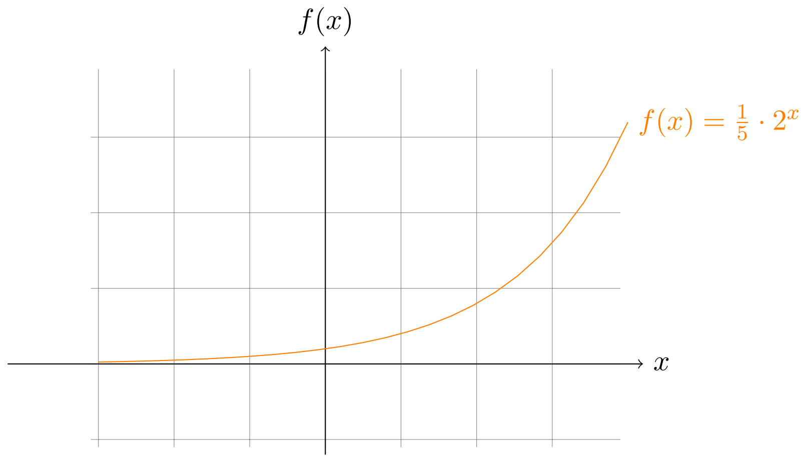
3.4 Przykład: jeszcze raz funkcja sinus

Funkcja $f(x) = \sin(x)$. Argumentami tej funkcji są liczby rzeczywiste, a jej wartościami liczby rzeczywiste w przedziale domkniętym $[-1, 1]$. Skala na osi odciętych jest taka sama jak na osi rzędnych (proste pionowe i poziome przechodzą przez punkty kratowe).



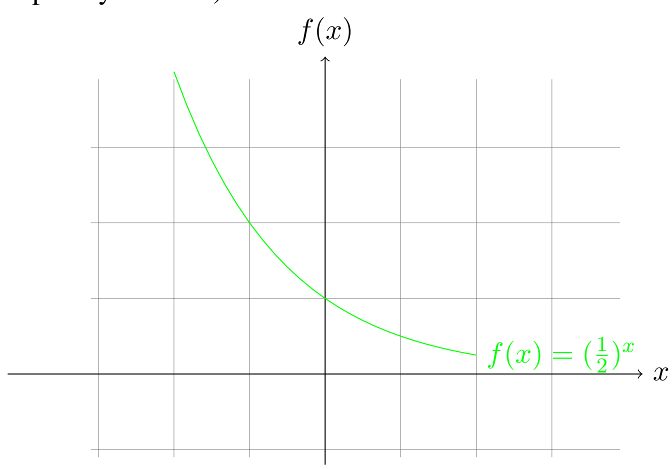
3.5 Przykład: funkcja wykładnicza

Funkcja $f(x) = \frac{1}{5} \cdot 2^x$. Dziedziną tej funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$, a jej przeciwdziedziną jest zbiór $\mathbb{R}_+$ wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych. Skala na osi odciętych jest taka sama jak na osi rzędnych (proste pionowe i poziome przechodzą przez punkty kratowe).



3.6 Przykład: inna funkcja wykładnicza

Funkcja $f(x) = (\frac{1}{2})^x$. Dziedziną tej funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$, a jej przeciwdziedziną jest zbiór $\mathbb{R}_+$ wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych. Skala na osi odciętych jest taka sama jak na osi rzędnych (proste pionowe i poziome przechodzą przez punkty kratowe).



3.7 Wykresy funkcji wielu zmiennych

Wykres funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych tworzymy przyporządkowując każdej parze (x, y) argumentów tej funkcji (reprezentowanej przez punkt na płaszczyźnie kartezjańskiej) punkt o współrzędnych $(x, y, f(x, y))$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Sytuację tę oddajemy graficznie na płaszczyźnie, stosując konwencje dotyczące reprezentacji tworów trójwymiarowych na płaszczyźnie. Czytelnicy znają ze szkoły pewne wykresy funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych: sferę, paraboloidę, elipsoidę, stożek, walec, itp.

4 Kilka dalszych pojęć

Potrzebne w dalszym ciągu będą inne jeszcze pojęcia dotyczące funkcji, które podajemy niżej w największym skrócie.

4.1 Złożenie funkcji, funkcja odwrotna, obcięcie funkcji

Obcięciem funkcji $f : X \to Y$ do zbioru $Z \subseteq X$ nazywamy funkcję $f|Z$ zdefiniowaną następująco:

$$f|Z = f \cap (Z \times Y) = \{(x, y) \in f : x \in Z\}.$$

Jeśli funkcja g jest obcięciem funkcji f do pewnego zbioru, to f nazywamy *przedłużeniem* g. Tak więc, f jest przedłużeniem g, gdy $g = f|dom(g)$.

Złożeniem (*superpozycją*) funkcji f oraz g nazywamy funkcję $g \circ f$ zdefiniowaną następująco:

$$g \circ f = \{(x, z) \in dom(f) \times rng(g) : \text{ istnieje } y \text{ taki, że } (x, y) \in f \text{ oraz } (y, z) \in g\}.$$

Rozpatrując złożenie $g \circ f$, zwykle zakłada się, że $rng(f) \subseteq dom(g)$. Tak więc, jeśli f jest funkcją z X w Y, zaś g jest funkcją z Y w Z, to ich złożenie, czyli $g \circ f$ jest funkcją z X w Z. Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, to wartość złożenia funkcji f oraz g dla argumentu $x \in dom(f)$ oznaczamy też $g(f(x))$.

Jeśli f jest funkcją różnowartościową, to zbiór $\{(y, x) : (x, y) \in f\}$ również jest funkcją, nazywaną *funkcją odwrotną* do funkcji f. Funkcję odwrotną do funkcji f oznaczamy zwykle przez f^{-1}. Tak więc, jeśli f jest funkcją z X w Y, to funkcja do niej odwrotna, czyli f^{-1} jest funkcją z Y w X.
PRZYKŁADY.

1. Obcięciem ciągu $(3, 5, 7, 9, 2, 2, 4)$ do zbioru $\{3, 4, 5\}$ jest ciąg $(7, 9, 2)$.

2. Niech $f(x) = 2x + 3$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $g(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $(g \circ f)(x) = (2x+3)^2$, natomiast $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 3$.

3. Niech $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $g(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geqslant 0$. Wtedy $(g \circ f)(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$.

4. Niech $f(x) = x^2$ dla $x \geqslant 0$. Wtedy $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geqslant 0$. Zauważmy, że jeśli rozpatrujemy funkcję $f(x) = x^2$ określoną na całym zbiorze $\mathbb{R}$, to funkcja do niej odwrotna nie istnieje, ponieważ w tej dziedzinie f nie jest różnowartościowa.

5. Funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej jest funkcja logarytmiczna. Jeśli $y = a^x$, to $x = \log_a y$.

6. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \neq 0$ i jest różnowartościowa. Jest ona swoją własną funkcją odwrotną, czyli $f^{-1} = f$.

$\square$

4.2 Funkcja charakterystyczna zbioru

Niech X będzie dowolnym podzbiorem ustalonego uniwersum U. *Funkcją charakterystyczną* zbioru X (w tym uniwersum) nazywamy funkcję $\chi_X : U \to \{0, 1\}$, zdefiniowaną następująco:

1. Jeśli $x \in X$, to $\chi_X(x) = 1$
2. Jeśli $x \notin X$, to $\chi_X(x) = 0$.

Funkcja charakterystyczna zbioru jest zatem wskaźnikiem przynależności elementów uniwersum do tego zbioru.
PRZYKŁADY.

1. Rozważmy zbiór $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ jest parzystą liczbą pierwszą}\}$. Funkcja charakterystyczna tego zbioru (w uniwersum $\mathbb{N}$) przyjmuje wartość 1 tylko dla liczby 2, a dla pozostałych liczb naturalnych przyjmuje wartość 0.

2. Funkcja charakterystyczna zbioru wszystkich liczb parzystych w uniwersum $\mathbb{N}$ przyjmuje wartość 1 dla każdej liczby parzystej, a wartość 0 dla każdej liczby nieparzystej.

3. Rozważmy uniwersum $\mathbb{R}$ i funkcję charakterystyczną zbioru $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych w tym uniwersum. Tę funkcję nazywamy *funkcją Dirichleta*. Przyjmuje ona zatem wartość 1 dla każdego argumentu będącego liczbą wymierną, a wartość 0 dla każdego argumentu będącego liczbą niewymierną.

$\square$

4.3 Obrazy i przeciwobrazy zbiorów względem funkcji

Podobnie jak w przypadku relacji, rozważać możemy obrazy i przeciwobrazy zbiorów względem funkcji. Ograniczymy się do przypadków tworzenia obrazów zbiorów zawartych w dziedzinie funkcji oraz przeciwobrazów zbiorów zawartych w jej przeciwdziedzinie. Niech zatem $f : X \to Y$, $A \subseteq dom(f)$, $B \subseteq rng(f)$.

1. *Obrazem* zbioru A względem funkcji f jest zbiór: $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$.

2. *Przeciwobrazem* zbioru B względem funkcji f jest zbiór: $f^{-1}[B] = \{x \in dom(f) : f(x) \in B\}$.

UWAGA. W definicji przeciwobrazu nie wymagamy, aby f była funkcją różnowartościową. To przykład sytuacji, gdy Tradycja (konwencja zapisu) wprowadza nieco zamieszania (traktujemy tu f^{-1} jako konwers relacji f). Tak to bywa z Tradycjami.
PRZYKŁADY.

1. Rozważmy funkcję $f(x) = 2x$ oraz przedział otwarty $(3, 4)$. Wtedy $f[(3, 4)] = (6, 8)$.

2. $|[\mathbb{R} - \mathbb{R}_+]| = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

3. Przeciwobrazem zbioru $\{1\}$ względem funkcji Dirichleta jest zbiór wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.

4. Niech $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz niech $B = (1, 2)$. Wtedy $f^{-1}[B] = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 < 2\}$. Znaną ze szkoły metodą rozwiązywania układu nierówności możemy pokazać, że $f^{-1}[(1, 2)] = (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$. Proponujemy czytelnikowi narysowanie wykresu rozważanej funkcji, zaznaczenie na nim zbioru B i zastanowienie się nad interpretacją geometryczną zbioru $f^{-1}[(1, 2)]$.

$\square$

4.4 Sposoby definiowania funkcji

Jest wiele sposobów definiowania funkcji, czyli określania, w jaki sposób wartości funkcji zależą od jej argumentów. Dla przykładu:

1. *Opis językowy*. Funkcja może zostać określona przepisem otrzymywania jej wartości dla ustalonych argumentów. Przepis musi oczywiście spełniać stosowne warunki formalne: musi gwarantować istnienie oraz jednoznaczność wartości funkcji. Tak definiujemy np. funkcje podłogi oraz sufitu.

2. *Jawny wzór*. Funkcja może zostać określona w postaci jawnego wzoru, ustalającego zależność między argumentami a wartościami. Ten sposób czytelnicy dobrze znają ze szkoły – funkcja liniowa, kwadratowa, potęgowa, itd. są tak właśnie definiowane.

3. *Definiowanie warunkowe*. Funkcja może być określona różnymi wzorami dla różnych fragmentów swojej dziedziny. Czytelnicy pamiętają definicję *wartości bezwzględnej* $|x|$ liczby rzeczywistej x: $|x| = x$ dla $x \geqslant 0$, a $|x| = -x$ dla $x < 0$.

4. *Definicje przez indukcję*. Funkcja może być określona przez *wzory rekurencyjne*, określające jej wartości dla wybranego początkowego argumentu oraz formułujące przepis, jak otrzymywać dalsze wartości, gdy obliczone są już wartości wcześniejsze. Czytelnicy znają tego typu definicje ze szkoły: tak przecież definiowano dodawanie, mnożenie i potęgowanie liczb naturalnych. Definicję indukcyjną ma też znana ze szkoły funkcja *silnia*, która określona jest warunkami: $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(n+1) = f(n) \cdot (n+1)$.

5. *Funkcje wyboru*. W teorii mnogości akceptujemy *aksjomat wyboru*, który gwarantuje, że dla dowolnej rodziny niepustych parami rozłącznych zbiorów istnieje zbiór, który tworzymy wybierając z każdego zbioru rozważanej rodziny dokładnie jeden element (np. z każdej klasy równoważności dokładnie jeden element tej klasy). Zauważmy, że w ogólności ten sposób określania funkcji (wybierz element ze zbioru) nie jest *konstruktywny*, gdyż nie podajemy wyraźnego przepisu, *który* element należy wybrać. Pewne funkcje wyboru mogą jednak zostać określone w sposób efektywny, o czym przekonamy się nieco później.

5 Wybrane prawa dotyczące funkcji

Wyliczamy niżej niektóre prawa dotyczące funkcji w ogólności. Pozwalamy sobie przypomnieć, że uczenie się *na pamięć* jest niewskazane, niemodne, *obciachowe*.

Niektóre z podanych niżej praw czytelnicy mogą próbować udowodnić samodzielnie, dla treningu umysłowego. W istocie dowody tych praw przeprowadza się tak samo, jak uprzednio omówione dowody w rachunku zbiorów i relacji. Korzystamy w nich oczywiście z podstawowej własności funkcji, jaką jest jednoznaczność ustalania jej wartości dla dowolnych argumentów.

Dla dowolnej funkcji $f : X \to Y$:

1. $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$.
2. $f[\bigcup\limits_{i \in I} A_i] = \bigcup\limits_{i \in I} f[A_i]$.
3. $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$.
4. $f[\bigcap\limits_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} f[A_i]$.
5. $f[A] - f[B] \subseteq f[A - B]$.
6. Jeśli $A \subseteq B$, to $f[A] \subseteq f[B]$.
7. $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.
8. $f^{-1}[\bigcup\limits_{i \in I} A_i] = \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}[A_i]$.
9. $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.
10. $f^{-1}[\bigcap\limits_{i \in I} A_i] = \bigcap\limits_{i \in I} f^{-1}[A_i]$.
11. $f^{-1}[A - B] = f^{-1}[A] - f^{-1}[B]$.
12. Jeśli $A \subseteq B$, to $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.
13. Jeśli $A \subseteq dom(f)$ i $B \subseteq rng(f)$, to:
    (a) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$,
    (b) $f[f^{-1}[B]] = B$,
    (c) $f[A] \cap B = f[A \cap f^{-1}[B]]$.
    (d) $f[A] \cap B = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap f^{-1}[B] = \emptyset$.
    (e) $f[A] \subseteq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq f^{-1}[B]$.

6 Zbiory skończone i nieskończone

Dysponując pojęciem funkcji, możemy podać formalną definicję zbiorów skończonych oraz nieskończonych. Mamy wszyscy dość dobre intuicje, jeśli chodzi o *skończone* kolekcje przedmiotów, nawet jeśli tych przedmiotów jest *bardzo dużo*. Nasuwającą się charakterystyką zbiorów skończonych jest wyrażenie *liczby ich elementów* poprzez jakąś liczbę naturalną: zbiór X jest *skończony*, gdy ma n elementów, dla pewnej $n \in \mathbb{N}$. Zbiory, które nie są w tym sensie skończone nazywamy zbiorami *nieskończonymi*.

Zdarza się, że potrafimy *udowodnić*, że jakiś zbiór jest skończony w powyższym sensie, ale nie potrafimy określić w sposób wyraźny dokładnej liczby jego elementów. Zdarza się i tak, że potrafimy wyrazić liczbę elementów jakiegoś zbioru jako wartość stosownej funkcji liczbowej, ale dokładne wypisanie tej wartości nie jest możliwe.

6.0.1 Dygresja: ciąg Mosera-Steinhausa

Wprowadźmy oznaczenia:

1. $\triangle(n)$ oznacza n^n
2. $\Box(n)$ oznacza iterowanie n razy operacji $\triangle$ dla argumentu n
3. $\bigstar(n)$ oznacza iterowanie n razy operacji $\Box$ dla argumentu n.

Spróbujmy obliczyć $\bigstar(2)$, postępując wedle podanego przepisu:

1. $\bigstar 2 = \Box(\Box(2)) = \Box(\triangle(\triangle(2)))$
2. $\triangle(\triangle(2)) = \triangle(2^2) = \triangle(4) = 4^4 = 256$
3. $\bigstar(2) = \Box(256) = \triangle(\triangle(\ldots(\triangle(256)\ldots)))$, gdzie operacja $\triangle$ wykonywana jest 256 razy (*wieża potęgowa*).
4. $\bigstar(2)$ to zatem liczba gigantyczna, którą łatwo opisać, ale której dokładne wyznaczenie (jako podanej wyraźnie liczby naturalnej) nie jest możliwe.

Notacja Mosera-Steinhausa nie kończy się na wymienionych wyżej operacjach. W oryginale posługiwano się argumentem w wielokącie dla zaznaczenia poszczególnych operacji (nie stosujemy tej notacji ze względów typograficznych). Tak więc:

1. $\triangle(n)$ było oznaczane jako n w trójkącie.

2. $\square(n)$ było oznaczane jako n w czworokącie.

3. $\bigstar(n)$ było oznaczane jako n w pięciokącie.

4. Ogólnie, n w k-kącie (foremnym) oznaczało n w n $(k-1)$-kątach (foremnych), przy czym pozostawał w mocy podany przepis na obliczanie takiej liczby: n w k-kącie oznaczało n-krotną iterację operacji opisanej dla $(k-1)$-kąta.

Liczba $\bigstar(2)$ (czyli 2 w pięciokącie) nazywana jest czasem *mega*, zaś 2 w mega-kącie (czyli wielokącie o mega bokach) nosi nazwę *moser*. Liczbę $\bigstar(10)$ (czyli 10 w pięciokącie) nazywa się *megiston*. Powyższa notacja, choć bardzo sprytna, może budzić podejrzliwość osób przyzwyczajonych do „porządnych" arytmetycznych i algebraicznych definicji. Nie ma jednak powodów do niepokoju – cała konstrukcja opisana też może być stosowną definicją rekurencyjną funkcji $M(n,m,p)$:

1. $M(n,1,3)=n^n$

2. $M(n,1,p+1)=M(n,n,p)$

3. $M(n,m+1,p)=M(M(n,1,p),m,p)$.

Tutaj interpretujemy $M(n,m,p)$ jako odpowiadającą liczbie n w m p-kątach jeden w drugim. Wymienione przez nas mega, megiston oraz moser mają następujące definicje w terminach funkcji M:

1. mega=$M(2,1,5)$

2. megiston=$M(10,1,5)$

3. moser=$M(2,1,M(2,1,5))$.

Mamy zatem przykład konstrukcji, o której łatwo opowiedzieć, ale która jest jednocześnie dość złożona, jeśli chodzi o obliczanie konkretnych, wchodzących w grę wielkości. Więcej na ten temat zainteresowani czytelnicy znajdą w pracach poświęconych *notacji strzałkowej Knutha*.

$\square$

PRZYKŁADY.

1. Zbiór $\{1,2,3\}$ jest skończony.

2. Zbiór pusty jest skończony.

3. Zbiór wszystkich wielościanów foremnych jest skończony: zawiera pięć elementów (czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan oraz dwudziestościan). Jego elementy nazywamy *bryłami platońskimi*.

4. Zbiór wszystkich liczb naturalnych n, dla których równanie $x^n + y^n = z^n$ ma rozwiązania w liczbach naturalnych x, y, z jest skończony. Jest on równy zbiorowi $\{0, 1, 2\}$. Ustalenie tego faktu zajęło matematykom kilka stuleci – jest on związany z tzw. Wielkim Twierdzeniem Fermata, które sformułował w 1637 roku Pierre de Fermat, a ostatecznie udowodnił w 1994 roku Andrew Wiles.

5. Zbiór wszystkich liczb parzystych nie jest skończony.

6. Zbiór $\mathbb{P}$ wszystkich liczb pierwszych nie jest skończony.

□

Udowodnimy ostatnie z powyższych stwierdzeń metodą nie wprost. Przypuśćmy, że zbiór $\mathbb{P}$ jest skończony, co oznacza, że w zbiorze $\mathbb{P}$ wszystkich liczb pierwszych istnieje liczba największa, czyli taka, że w $\mathbb{P}$ nie istnieje większa od niej liczba. Możemy wtedy utworzyć listę wszystkich liczb pierwszych, poczynając od najmniejszej takiej liczby (czyli 2), a kończąc na rzekomo największej takiej liczbie. Niech lista ta składa się z liczb $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Mamy $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, itd. Liczba p_n miałaby być największą liczbą pierwszą.

Tworzymy iloczyn $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$. Następnie tworzymy sumę:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Oczywiście p jest większa od p_n. Tak utworzona liczba p jest bądź liczbą pierwszą, bądź liczbą złożoną. Gdyby p była liczbą złożoną, to musiałaby dzielić się bez reszty przez którąś z liczb pierwszych $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, powiedzmy przez p_i ($1 \leqslant i \leqslant n$). To jednak jest niemożliwe, ponieważ wtedy p_i musiałaby dzielić oba składniki sumy tworzącej p: zarówno iloczyn $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$, jak i liczbę 1. To jest niemożliwe, ponieważ liczba 1 nie jest podzielna przez żadną liczbę pierwszą. Jeśli p jest liczbą pierwszą, to otrzymujemy sprzeczność z przypuszczeniem, że p_n jest największą liczbą pierwszą. W konsekwencji, musimy odrzucić przypuszczenie dowodu nie wprost i otrzymujemy tezę twierdzenia. Widzimy zatem, że zbiór $\mathbb{P}$ wszystkich liczb pierwszych nie jest zbiorem skończonym.

6.1 Równoliczność

Zbiory X oraz Y nazywamy *równolicznymi*, gdy istnieje bijekcja z X na Y (wtedy funkcja do niej odwrotna jest oczywiście bijekcją z Y na X). Inaczej mówiąc, dwa zbiory są równoliczne, gdy każdemu elementowi jednego z nich możemy przyporządkować dokładnie jeden element drugiego z nich oraz wzięte pod uwagę zostają wszystkie elementy obu zbiorów.

Relacja równoliczności ograniczona do podzbiorów ustalonego uniwersum jest relacją równoważności. Tak więc, jeśli rozważamy jakieś ustalone uniwersum zbiorów U, to rodzina wszystkich klas abstrakcji relacji równoliczności na zbiorze $\wp(U)$ jest dobrze określona. W takim przypadku każda jej klasa abstrakcji zbiera razem wszystkie podzbiory uniwersum, które nie różnią się liczbą elementów. Ten fakt cieszy: można w takim przypadku *zdefiniować* liczebność zbiorów.

Ponieważ jednak ogół *wszystkich* zbiorów sam nie jest zbiorem, więc nie możemy wykorzystać tej konstrukcji *globalnie*, dla całkiem dowolnych zbiorów. Nie oznacza to, że jesteśmy całkiem bezradni: teoria mnogości oferuje możliwości precyzyjnej charakterystyki liczebności (zwanej też *mocą*) zbiorów.
PRZYKŁADY.

1. Regulacje prawne w Rzeczpospolitej Polskiej wykluczają poligamię (małżeństwo z więcej niż jedną osobą w tym samym czasie). A zatem zbiór wszystkich zamężnych (w sensie Konstytucji RP) obywatelek RP jest równoliczny ze zbiorem wszystkich żonatych (w sensie Konstytucji RP) obywateli RP. Przypomnijmy, że terminem poligynia (wielożeństwo) określa się związek jednego mężczyzny z więcej niż jedną kobietą, termin poliandria (wielomęstwo) oznacza związek jednej kobiety z więcej niż jednym mężczyzną, a termin poligynandria (wielogamia, multigamia, wielomałżeństwo) oznacza związek więcej niż jednego mężczyzny z więcej niż jedną kobietą. Konstytucja RP wyklucza te wszystkie ciekawe sytuacje, dopuszczając jedynie monogamię (małżeństwo z jedną tylko osobą).

2. Zbiór pusty nie jest równoliczny z żadnym zbiorem niepustym.

3. Zbiór wszystkich liczb parzystych jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Funkcja $f(n) = 2n$ jest bijekcją ze zbioru $\mathbb{N}$ na zbiór wszystkich liczb parzystych.

4. Zbiór $\{1, 2, 3\}$ nie jest równoliczny ze zbiorem $\wp(\{1, 2, 3\})$. Za chwilę zobaczymy, że *żaden* zbiór nie jest równoliczny z rodziną swoich podzbiorów.

5. Każde dwa przedziały domknięte (długości dodatniej) w zbiorze liczb rzeczywistych są równoliczne. Niech $a < b$ oraz $c < d$. Bijekcją między przedziałami $[a, b]$ oraz $[c, d]$ jest funkcja określona dla $x \in [a, b]$ następująco:

$$f(x) = \frac{(d-c)x + bc - ad}{b-a}.$$

6. Przedział otwarty $(0,1)$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}_+$. Równoliczność tę ustala np. bijekcja określona dla $x \in (0,1)$ następująco:

$$f(x) = \frac{x}{1-x}.$$

7. Przedział $(0,1] \subseteq \mathbb{R}$ jest równoliczny z przedziałem $(0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Równoliczność tych zbiorów ustala np. bijekcja $f : (0,1] \to (0,1)$ określona wzorem: $f(x) = \frac{1}{n+1}$ dla $x = \frac{1}{n}$ oraz $f(x) = x$ dla $x \neq \frac{1}{n}$.

8. Zbiór $(0,1] \times (0,1)$ jest równoliczny ze zbiorem $(0,1) \times (0,1)$, co poświadcza bijekcja f, określona wzorem: $f(x,y) = (\frac{1}{n+1}, y)$ dla $x = \frac{1}{n}$ oraz $f(x,y) = (x,y)$ dla $x \neq \frac{1}{n}$.

$\square$

Relacja równoliczności w przypadku zbiorów skończonych nie nastręcza trudności pojęciowych. Jednak fakt, że pewne zbiory są równoliczne ze swoimi podzbiorami właściwymi długo uważany był za paradoksalny: zwracali na to uwagę m.in. Proklos, Galileusz, Bolzano. Poradzimy sobie z tym paradoksem. Nie potrafimy sobie odmówić zacytowania wiersza Cypriana Kamila Norwida *Fatum*, jako że myśl w nim zawarta wiąże się poniekąd z postępowaniem matematyków, gdy napotkają trudności pojęciowe:

Jak dziki zwierz, przyszło *nieszczęście* do człowieka
I zatopiło weń fatalne oczy...
– Czeka – –
– Czy człowiek zboczy?

Lecz on odejrzał mu, jak gdy artysta
Mierzy swojego kształt modelu;
I spostrzegło, że on patrzy, co skorzysta
Na swym nieprzyjacielu? –
I zachwiało się całą postaci wagą
– – I nie ma go!

Poradzimy sobie również z odpowiedzią na inne niepokojące pytanie: a może *wszystkie* zbiory, które nie są skończone są między sobą równoliczne? Odpowiedź jest negatywna. Fakt ten ma fundamentalne znaczenie dla matematyki.

Georg Cantor napisał: *Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit* (istota matematyki leży w jej wolności). Rozważanie zbiorów nieskończonych jako ukończonych całości (co pozwala m.in. dokonywać na takich zbiorach różnych operacji) jest jednym z przejawów owej wolności matematyki. Będziemy jeszcze wielokrotnie mieli podczas tego kursu okazję przekonać się, jak owa swoboda tworzenia abstrakcyjnych pojęć matematyki poświadcza kreatywność umysłu.

6.2 Zbiory nieskończone

Mówiliśmy, że zbiór jest skończony, gdy ma n elementów dla pewnej liczby naturalnej n, a nieskończony w przeciwnym przypadku. Jest kilka innych jeszcze możliwości zdefiniowania zbiorów skończonych i nieskończonych (definicje takie podali np.: Gottlob Frege, Ernst Zermelo, John von Neumann, Alfred Tarski). Propozycja podana przez Richarda Dedekinda jest w gruncie rzeczy niezwykle pomysłowym rozwiązaniem wspomnianego wyżej faktu, uważanego za paradoksalny.
DEFINICJA DEDEKINDA. Zbiór jest *nieskończony* (w sensie Dedekinda), gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. W przeciwnym przypadku jest *skończony* (w sensie Dedekinda).
PRZYKŁADY.

1. Zbiór pusty jest skończony w sensie tej definicji.

2. Zbiór $\{1, 2, 3\}$ jest skończony w sensie tej definicji.

3. Zbiór $\mathbb{N}$ jest nieskończony w sensie tej definicji, albowiem jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym: zbiorem wszystkich liczb parzystych.

4. Zbiór $\mathbb{Z}$ wszystkich liczb całkowitych jest nieskończony w sensie tej definicji, albowiem jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym $\mathbb{N}$. Stosowną bijekcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ otrzymujemy np. definiując: $f(n) = \frac{n}{2}$ dla n parzystych oraz $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ dla n nieparzystych.

5. Zbiór $\mathbb{Q}_+$ wszystkich dodatnich liczb wymiernych jest nieskończony w sensie tej definicji, albowiem jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym: dla dowolnej liczby wymiernej $\frac{a}{b}$, gdzie $a \geqslant 0$ i $b > 0$ są liczbami całkowitymi oraz niech $f(a, b) = 2^a \cdot (2b + 1) - 1$. Wtedy f jest bijekcją ze zbioru $\mathbb{Q}_+$ na zbiór $\mathbb{N}_+$ wszystkich dodatnich liczb naturalnych.

6. Zbiór $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych jest nieskończony w sensie tej definicji, albowiem jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, co poświadcza bijekcja $f(x) = \mathrm{tg}(x)$, rozważana jako funkcja z $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na $\mathbb{R}$.

$\square$

Można udowodnić, że obie podane definicje zbiorów nieskończonych są równoważne, czyli że wyznaczają dokładnie te same zbiory jako zbiory nieskończone.

6.3 Zbiory przeliczalne

Zbiory, które są równoliczne ze zbiorem $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych nazywamy *przeliczalnymi* (czasem: *przeliczalnie nieskończonymi*). Jeśli zbiór jest skończony lub przeliczalny, to mawia się, że jest *co najwyżej przeliczalny*.
PRZYKŁADY.

1. Zbiór wszystkich liczb parzystych jest przeliczalny. Funkcja $f(n) = 2n$ jest bijekcją ze zbioru $\mathbb{N}$ na zbiór wszystkich liczb parzystych.

2. Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny. Pamiętamy ze szkoły, że liczbę wymierną rozumieć możemy jako parę liczb całkowitych: licznik oraz mianownik ułamka (przy zastrzeżeniu, że mianownik nie jest zerem). Najpierw podamy bijekcję (tzw. funkcję pary Cantora) między zbiorem wszystkich par liczb naturalnych (czyli reprezentacji nieujemnych liczb wymiernych) a zbiorem wszystkich liczb naturalnych:

$$f(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m.$$

Jako wdzięczne zadanie proponujemy czytelnikom przyjrzenie się kilkunastu początkowym wartościom tej funkcji, umieszczonym na stosownym wykresie. Zauważmy, że funkcja pary Cantora ma związek z *liczbami trójkątnymi*, czyli liczbami: 0, 1, 3, 6, 10, itd., które są sumami początkowych ciągów liczb naturalnych. Posługując się indukcją matematyczną łatwo udowodnić, że $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Oznaczmy wartość tej sumy przez T_n. Widać, że $T_0 = 0$, $T_{n+1} = T_n + n + 1$. Podana wyżej funkcja pary Cantora może zostać wyrażona z użyciem liczb trófkątnych, ponieważ:

$$f(m,n) = T_{m+n} + m = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m.$$

Ustawiliśmy zatem wszystkie nieujemne liczby wymierne w jeden ciąg nieskończony $q_0, q_1, q_2, \ldots$. Zmieniając znak każdego wyrazu tego ciągu na przeciwny otrzymujemy ciąg wszystkich ujemnych liczb wymiernych. Wystarczy teraz z obu tych ciągów utworzyć jeden różnowartościowy ciąg, złożony na miejscach parzystych z wymiernych liczb nieujemnych, a na miejscach nieparzystych z wymiernych liczb ujemnych. Ponieważ wyrazy tego ciągu są numerowane wszystkimi liczbami naturalnymi i wyrazy te wyczerpują wszystkie liczby wymierne, więc uzyskaliśmy bijekcję między zbiorami $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{Q}$.

3. Zbiór $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych nie jest ani skończony ani przeliczalny. Za chwilę poznamy jedną z metod, aby to udowodnić.

6.4 Twierdzenie Cantora

Korzystaliśmy już z faktu, że jeśli zbiór X ma n elementów, to rodzina $\wp(X)$ wszystkich jego podzbiorów ma 2^n elementów. Jak jednak wygląda sytuacja w przypadku rodziny wszystkich podzbiorów zbioru nieskończonego?

TWIERDZENIE CANTORA. *Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.*

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Weźmy dowolny zbiór X i przypuśćmy, że X jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów $\wp(X)$. Oznacza to, iż istnieje bijekcja f ze zbioru X na zbiór $\wp(X)$. Określmy następujący element rodziny $\wp(X)$:

$$X_f = \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}.$$

Wtedy dla pewnego $x_f \in X$ musiałoby być: $f(x_f) = X_f$. Stąd i z definicji zbioru X_f otrzymujemy, iż: $x_f \in X_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_f \notin X_f$, a to jest *sprzeczność*. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie o istnieniu funkcji f. W konsekwencji, X oraz $\wp(X)$ nie są równoliczne.

□

Jednym z wniosków z tego twierdzenia jest to, że zbiór $\mathbb{N}$ nie jest równoliczny ze swoim zbiorem potęgowym $\wp(\mathbb{N})$. Oznacza to, że nie można ponumerować w sposób wzajemnie jednoznaczny liczbami naturalnymi wszystkich zbiorów liczb naturalnych.

Innym wnioskiem jest oczywiście to, że jeśli utworzymy nieskończony ciąg zbiorów:

$$(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}), \wp(\wp(\mathbb{N})), \wp(\wp(\wp(\mathbb{N}))), \ldots),$$

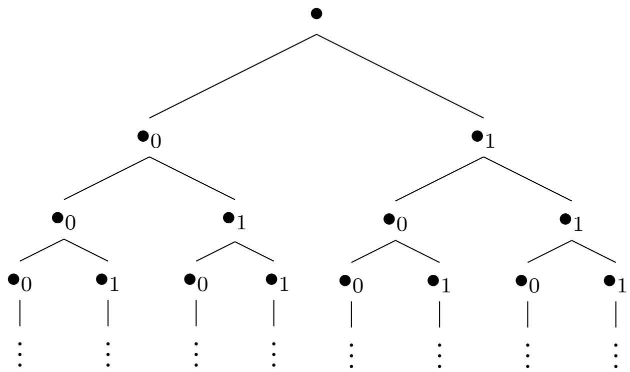
to żadne dwa wyrazy tego ciągu nie będą równoliczne. Ponadto, każdy wyraz tego ciągu jest zbiorem nieskończonym. Widzimy zatem, że istnieje nieskończenie wiele zbiorów nieskończonych, z których żadne dwa nie są równoliczne. Gdy utworzymy sumę wszystkich zbiorów z powyższego ciągu, to można pokazać, że nie jest ona równoliczna z żadnym z wyrazów tego ciągu. Na mocy twierdzenia Cantora rodzina wszystkich podzbiorów tej sumy nie jest z nią równoliczna, itd. Otrzymujemy całą hierarchię zbiorów nieskończonych, z których żadne dwa nie są równoliczne. W teorii mnogości rozważa się inną jeszcze hierarchię zbiorów nieskończonych, o której wspomnimy w dodatku do rozdziału o relacjach porządkowych.

6.5 Zbiory nieprzeliczalne

Zbiór jest *nieprzeliczalny*, jeśli jest nieskończony, ale nie jest przeliczalny. Wykazywanie, że jakiś zbiór nieskończony X jest nieprzeliczalny wymaga pokazania, że żaden zbiór par uporządkowanych nie jest bijekcją z X na zbiór wszystkich liczb naturalnych. Wymagałoby to więc – w przypadku dowodów wprost – „przejrzenia" uniwersum wszystkich zbiorów (które samo nie jest zbiorem). Nieprzeliczalności zbiorów dowodzi się raczej metodą nie wprost, przypuszczając, że taka bijekcja istnieje i dochodząc do sprzeczności.
PRZYKŁADY.

1. Na mocy twierdzenia Cantora, zbiór $\wp(\mathbb{N})$ jest nieprzeliczalny, ponieważ nie jest skończony i nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych.
2. Zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach będących liczbami naturalnymi jest nieprzeliczalny.
3. Zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych (czyli o wyrazach będących 0 lub 1) jest nieprzeliczalny.
4. Zbiór $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny. Za chwilę podamy stosowną argumentację.
5. Zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny.
6. Dowolny przedział o długości dodatniej liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.

Udowodnimy, dla przykładu, że zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych (czyli o wyrazach będących 0 lub 1) jest nieprzeliczalny. Wygodnie będzie przy tym wyobrazić sobie następującą reprezentację geometryczną tego zbioru w postaci tzw. *pełnego drzewa dwójkowego*:



Wszystkie nieskończone ciągi zero-jedynkowe są reprezentowane przez *gałęzie* tego drzewa: nieskończone ścieżki, które rozpoczynają się pod (najwyżej położonym *korzeniem* tego drzewa). O drzewach dokładniej opowiemy nieco później, w rozdziale poświęconym relacjom porządkującym.

Dowód nieprzeliczalności zbioru wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych polegać będzie na pokazaniu, że nie można ustawić w jeden ciąg nieskończony (numerowany liczbami naturalnymi) wszystkich gałęzi tego drzewa. Rozwiązanie wykorzystuje *metodę przekątniową* Cantora. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że można wszystkie gałęzie nieskończonego drzewa dwójkowego ponumerować liczbami naturalnymi. Niech to wyliczenie ma postać następującą (każda a_i^j jest zerem lub jedynką):

1. $g_1 = a_1^1 a_1^2 a_1^3 \ldots$
2. $g_2 = a_2^1 a_2^2 a_2^3 \ldots$
3. $g_3 = a_3^1 a_3^2 a_3^3 \ldots$
4. itd.

Rozważmy ciąg $G = b_1 b_2 b_3 \ldots$, gdzie:

1. jeśli $a_n^n = 0$, to $b_n = 1$
2. jeśli $a_n^n = 1$, to $b_n = 0$.

Wtedy ciąg G różni się od *każdego* z ciągów g_n (co najmniej na n-tym miejscu). Tak więc, jakkolwiek chcielibyśmy ponumerować wszystkie gałęzie pełnego drzewa dwójkowego liczbami naturalnymi, to zawsze pozostaną gałęzie, dla których numerów nie starczy.

Zauważmy, że nasze przypuszczenie dotyczyło *dowolnego* sposobu numerowania wszystkich gałęzi drzewa dwójkowego liczbami naturalnymi. Powyższy wynik oznacza zatem, że taka (wyczerpująca wszystkie gałęzie) numeracja jest niemożliwa. Tak więc wszystkich gałęzi tego drzewa nie można ustawić w ciąg uporządkowany tak, jak wszystkie liczby naturalne.

W podobny sposób dowodzi się, że zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach będących liczbami naturalnymi nie większymi od 9 jest nieprzeliczalny. Pamiętając teraz, że rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych można interpretować jako takie właśnie ciągi, otrzymujemy wniosek głoszący, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny. Jak zakładaliśmy na początku tych wykładów, czytelnicy rozumieją liczby rzeczywiste po części na sposób intuicyjny (co na razie wystarcza). Precyzyjne konstrukcje liczb rzeczywistych podane zostaną w dalszych rozdziałach.

Zbiory, które są równoliczne ze zbiorem $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych nazywa się zbiorami *mocy kontinuum*. Można udowodnić, że zbiorami mocy kontinuum są m.in.:

1. Zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, zbiór $\mathbb{R}^3$, ogólnie: każdy zbiór $\mathbb{R}^n$, dla $n \geqslant 1$. Szkoła przyzwyczaja uczniów do reprezentowania liczb rzeczywistych na prostej liczbowej oraz do traktowania zbioru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jako reprezentacji płaszczyzny. Intuicje mogą podszeptywać, że punktów płaszczyzny jest *więcej* niż punktów na prostej, ale dowód przesądza sprawę: jest ich tyle samo, co punktów prostej, ponieważ podano dowód równoliczności $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Mamy tu do czynienia z sytuacją, gdy pewne – dotąd niejasne – przekonania intuicyjne zostają zastąpione precyzyjnym twierdzeniem, które kształtuje nowe intuicje matematyczne.

   Jako wyzwanie intelektualne dla czytelników proponujemy zastanowienie się, jak można byłoby udowodnić, że zbiory $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ są równoliczne. Wskazówka: rozważ rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych.

2. Każdy przedział domknięty $[a, b]$ o długości dodatniej w zbiorze $\mathbb{R}$.

3. Każdy przedział otwarty (a, b) o długości dodatniej w zbiorze $\mathbb{R}$.

4. Każdy produkt kartezjański $[0, 1]^n$ domkniętego przedziału o długości 1, dla dowolnej $n \geqslant 1$ (czyli każda *jednostkowa kostka* n*-wymiarowa*).

$\square$

Ponieważ twory geometryczne (na prostej, płaszczyźnie oraz w przestrzeni) reprezentujemy z wykorzystaniem zbioru liczb rzeczywistych oraz jego podzbiorów, otrzymujemy również twierdzenia dotyczące przeliczalności lub nieprzeliczalności tworów geometrycznych, rozumianych jako zbiory punktów.

W celu ustalania równoliczności zbiorów punktów odpowiadających tworom geometrycznym wykorzystywać można także fakt, że pewne przekształcenia geometryczne są bijekcjami (np. izometrie lub podobieństwa). W ten sposób można pokazać m.in., że:

1. Każde dwa odcinki są równoliczne.
2. Każde dwa okręgi są równoliczne.
3. Każde dwa koła domknięte są równoliczne.
4. Każde dwa koła otwarte są równoliczne.

7 Funkcje znane ze szkoły

Wyliczymy, bez wdawania się w szczegóły, niektóre funkcje, które znane są słuchaczom ze szkoły. Będziemy z nich wielokrotnie korzystać w dalszych wykładach.

1. Podstawowe działania arytmetyczne: dodawanie, mnożenie, odejmowanie, dzielenie.
2. Dalsze operacje: potęgowanie, pierwiastkowanie, funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna.
3. Funkcje wielomianowe jednej zmiennej. W szczególności: funkcja liniowa oraz funkcja kwadratowa.
4. Funkcje wymierne. Funkcja homograficzna.
5. Funkcje trygonometryczne: sinus, cosinus, tangens, cotangens.

Zachęcamy słuchaczy do przypomnienia sobie definicji wymienionych rodzajów funkcji. Jesteśmy przekonani, że może dostarczyć to wielu pozytywnych emocji, wynikających z uświadomienia sobie, że aż tyle potrafiliśmy zapamiętać z edukacji szkolnej.

8 Zachęta do refleksji

1. Czy każda funkcja ma jakiś opis językowy?

2. Czy można sporządzić wykres dowolnej funkcji?

3. Co to znaczy, że jedna funkcja rośnie szybciej od drugiej?

4. Ze szkoły znasz funkcję *silnia*, zdefiniowaną dla liczb naturalnych. Czy istnieje podobna do niej funkcja dla liczb rzeczywistych?

5. Przypuśćmy, że Wszechświat jest skończony. Jaki jest wtedy sens mówienia o zbiorach nieskończonych?

9 Podsumowanie

To, co należy zapamiętać z niniejszego wykładu:

1. Definicja funkcji, argument i wartość funkcji, jej dziedzina i przeciwdziedzina, obrazy i przeciwobrazy zbiorów względem funkcji.

2. Iniekcje, surjekcje, bijekcje.

3. Złożenie funkcji, funkcja odwrotna, obcięcie funkcji, funkcja charakterystyczna zbioru.

4. Wykres funkcji (zmiennej rzeczywistej).

5. Równoliczność zbiorów.

6. Zbiory nieskończone (w sensie Dedekinda).

7. Twierdzenie Cantora.

8. Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne.

9. Zbiory mocy kontinuum.

10 Wybrane pozycje bibliograficzne

Guzicki, W., Zakrzewski, P. 2005. *Wykłady ze wstępu do matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Ławrow, A.I., Maksimowa, L.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Marek, W., Onyszkiewicz, J. 2004. *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.