Metody Dowodzenia Twierdzeń I Automatyzacja Rozumowań

Kognitywistyka UAM

Tabele Syntetyczne

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

1 Wstęp

Metoda tabel syntetycznych (w skrócie: MTS) jest (w pewnym sensie) dualna do metody tablic analitycznych.

1. MTS jest motywowana semantycznie.
2. Dowody przeprowadzane zgodnie z MTS odwołują się do podformuł i negacji podformuł dowodzonej formuły.
3. MTS jest metodą wprost (odwrotnie niż w przypadku metody tablic analitycznych).
4. MTS ma charakter konstruktywny (choć nie deterministyczny): dowody przeprowadzane tą metodą polegają na konstrukcji inferencji prowadzących do dowodzonej formuły, a owe inferencje odwołują się do niesprzecznych zbiorów zmiennych zdaniowych i ich negacji.

W tej notatce przedstawimy MTS dla klasycznego rachunku zdań. Opieramy się na pracach Urbański 2001, 2002 oraz (za zgodą autorów) na prezentacjach dotyczących tabel syntetycznych przygotowanych przez Mariusza Urbańskiego i Dorotę Leszczyńską-Jasion. Podamy podstawowe definicje i szereg przykładów, a także sformułujemy najważniejsze twierdzenia dotyczące MTS, pomijając jednak ich dowody, które znaleźć można w cytowanych wyżej pracach Urbańskiego. W trakcie wykładu omówimy jedynie główne idee tych dowodów.

Niech Var oznacza zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych, $NVar$ zbiór wszystkich negacji zmiennych zdaniowych, a $Lit = Var \cup NVar$ zbiór wszystkich literałów. Jeśli $p \in Var$, to mówimy, że każdy z literałów p i $\neg p$ bazuje na p. O literałach p i $\neg p$ mówimy, że są wzajemnie komplementarne.

Pojęcia: podformuły danej formuły oraz stopnia złożoności formuły zostały podane wcześniej. Niech $Sub(\varphi)$ oznacza zbiór wszystkich podformuł formuły φ, $\neg Sub(\varphi)$ zbiór negacji wszystkich podformuł formuły φ. Jeśli X jest zbiorem formuł, to niech $Sub(X) = \bigcup\limits_{\psi \in X} Sub(\psi)$, $\neg Sub(X) = \bigcup\limits_{\psi \in X} \neg Sub(\psi)$.

Niech $deg(\varphi)$ będzie zdefiniowane indukcyjnie w sposób następujący:

1. $deg(\varphi) = 0$ dla $\varphi \in Var$
2. $deg(\neg\varphi) = deg(\varphi) + 1$
3. $deg(\varphi \circ \psi) = deg(\varphi) + deg(\psi) + 2$, gdzie $\circ \in \{to, \wedge, \vee\}$.

To pojęcie wykorzystywane jest w dowodach twierdzeń dotyczących MTS, w których odwołujemy się do indukcji po stopniu złożoności formuł.

W metodzie tablic analitycznych korzystamy z reguł rozkładu (dekompozycji) formuł na prostsze składniki. Reguły te podano na wykładzie dotyczącym tablic analitycznych. Z kolei w MTS korzystamy z reguł składania (kompozycji) prostszych składników, otrzymując formuły. Podamy te reguły w dwóch postaciach: w jednolitej notacji Smullyana oraz w „zwykłej" notacji:

Notacja Smullyana:

1. $R_{\neg\neg}$: $\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}$
2. R_{α}: $\frac{\alpha_1, \alpha_2}{\alpha}$
3. R_{β}: $\frac{\beta_i}{\beta}$, gdzie $i \in \{1, 2\}$.

„Zwykła" notacja:
Reguła dla podwójnej negacji: $\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}$.
Pozostałe reguły podaje tabela:

$$\begin{array}{ccc}
\frac{\neg\varphi}{\varphi\to\psi} & \frac{\psi}{\varphi\to\psi} & \frac{\varphi,\neg\psi}{\neg(\varphi\to\psi)} \\
\frac{\varphi}{\varphi\vee\psi} & \frac{\psi}{\varphi\vee\psi} & \frac{\neg\varphi,\neg\psi}{\neg(\varphi\vee\psi)} \\
\frac{\neg\varphi}{\neg(\varphi\wedge\psi)} & \frac{\neg\psi}{\neg(\varphi\wedge\psi)} & \frac{\varphi,\psi}{\varphi\wedge\psi}
\end{array}$$

Zdefiniujemy teraz pewną operację konsekwencji, która odegra podstawową rolę w MTS.

Przez D-wyprowadzenie formuły φ ze zbioru formuł X rozumiemy dowolny skończony ciąg $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ taki, że φ jest identyczna z ψ_k oraz dla każdego $1 \leqslant i \leqslant k$ spełniony jest co najmniej jeden z poniższych warunków:

1. $\psi_i \in X$

2. istnieje $h < i$ taki, że ψ_i jest identyczna z $\neg\neg\psi_h$

3. jeśli ψ_i jest α-formułą, to istnieją $g < i$ oraz $h < i$ takie, że ψ_g jest identyczna z α_1, zaś ψ_h jest identyczna z α_2

4. jeśli ψ_i jest β-formułą, to istnieje $h < i$ taki, że ψ_h jest identyczna z β_1 lub ψ_h jest identyczna z β_2.

Niech $Cn_D(X)$ będzie zbiorem wszystkich formuł φ takich, że istnieje D-wyprowadzenie φ z X. Wtedy Cn_D jest operacją konsekwencji, czyli spełnia następujące warunki:

1. $X \subseteq Cn_D(X)$.

2. $Cn_D(Cn_D(X)) \subseteq Cn_D(X)$.

3. Jeśli $X \subseteq Y$, to $Cn_D(X) \subseteq Cn_D(Y)$.

Cn_D jest oczywiście finitarną operacją konsekwencji, co wynika z tego, że D-wyprowadzenia są skończonymi ciągami formuł.

Dowodzi się, że każde wartościowanie, które spełnia zbiór formuł X, spełnia też zbiór $Cn_D(X)$. W konsekwencji, zbiór X jest semantycznie niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy semantycznie niesprzeczny jest zbiór $Cn_D(X)$.

Zachodzi także fakt, udowodniony w 1936 roku przez Kalmára:
TWIERDZENIE (Kalmár 1936). Niech $p_{j_1}, \ldots, p_{j_k}$ będą wszystkimi różnymi zmiennymi występującymi w formule φ i niech v będzie dowolnym wartościowaniem. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant k$ określimy formułę $p^\circ_{j_i}$:

1. Jeśli $v(p_{j_i}) = 1$, to $p^\circ_{j_i}$ jest identyczna z p_{j_i}.

2. Jeśli $v(p_{j_i}) = 0$, to $p^\circ_{j_i}$ jest identyczna z $\neg p_{j_i}$.

Niech formuła φ° będzie zdefiniowana następująco:

1. Jeśli $v(\varphi) = 1$, to φ° jest identyczna z φ.

2. Jeśli $v(\varphi) = 0$, to φ° jest identyczna z $\neg\varphi$.

Wtedy $\varphi^\circ \in Cn_D(\{p^\circ_{j_1}, \ldots, p^\circ_{j_k}\})$ $\square$

To twierdzenie można wykorzystać w dowodzie pełności klasycznego rachunku zdań. Idea dowodu polega na wyprowadzaniu złożonych formuł jezyka klasycznego rachunku zdań z określonych w pewien sposób niesprzecznych zbiorów występujących w takiej formule zmiennych zdaniowych i negacji zmiennych zdaniowych.

Z podanego wyżej twierdzenia wynika, że jeśli φ jest tautologią klasycznego rachunku zdań, a $p_{j_1}, \ldots, p_{j_k}$ są wszystkimi różnymi zmiennymi występującymi w formule φ, to dla każdego wartościowania v mamy: $\varphi \in Cn_D(\{p^{\circ}_{j_1}, \ldots, p^{\circ}_{j_k}\})$.

2 Tabele syntetyczne

Zakładamy, że słuchacze pamiętają definicję drzewa etykietowanego, czyli drzewa, którego wierzchołkom przyporządkowano formuły rozważanego języka. Drzewo takie to system (X, r, R, L), gdzie X jest zbiorem wierzchołków drzewa, r jest jego korzeniem, R jest relacją poprzedzania (porządkiem drzewowym), a L funkcją etykietującą wierzchołki drzewa.

Tabelą syntetyczną dla formuły φ nazywamy skończone drzewo etykietowane $T = (X, r, R, L)$ takie, że:

1. $L : X - \{r\} \rightarrow Sub(\varphi) \cup \neg Sub(\varphi)$

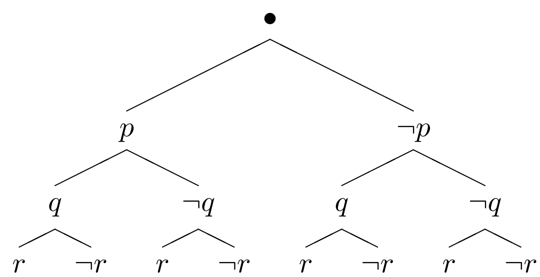
2. Jeśli x jest wierzchołkiem rozgałęziającym drzewa T, to x ma dokładnie dwa bezpośrednie następniki, których etykiety są literałami komplementarnymi.

3. Jeśli wierzchołek x jest etykietowany formułą ψ i x nie jest bezpośrednim następnikiem wierzchołka rozgałęziającego, to ψ jest wnioskiem jednej z reguł kompozycji $R_{\neg\neg}$, R_{α}, R_{β}, której przesłanką jest formuła etykietująca jakiś poprzednik wierzchołka x lub przesłankami są formuły etykietujące jakieś dwa poprzedniki wierzchołka x.

4. Etykietą każdego liścia drzewa T jest albo formuła φ albo formuła $\neg\varphi$.

Powyższa definicja jest podaną przez Dorotę Leszczyńską-Jasion modyfikacją nieco innej definicji tabeli syntetycznej, podanej przez Mariusza Urbańskiego. W terminologii drugiego z wymienionych autorów, powyższa definicja charakteryzuje tzw. regularne tabele syntetyczne.

Szczególnym rodzajem tabel syntetycznych są tzw. kanoniczne tabele syntetyczne, w których budowę drzewa rozpoczynamy od kolejnych rozgałęzień, odpowiadających parom literałów konplementarnych, wyznaczonych przez zmienne zdaniowe występujące w rozważanej formule.



Po dokonaniu tych wszystkich rozgałęzień, dalsze fragmenty każdej gałęzi drzewa powstają poprzez wykorzystanie reguł kompozycji.

Konstrukcje kanonicznych tabel syntetycznych służą jako punkt wyjścia do określenia metody rozstrzygania dla klasycznego rachunku zdań.

Jak zobaczymy za chwilę w analizowanych przykładach tabel syntetycznych, czasem konstrukcja tabeli syntetycznej, która nie jest tabelą kanoniczną jest krótsza od odpowiedniej tabeli kanonicznej.

Tabele syntetyczne można definiować również na inne jeszcze sposoby (jak ma to miejsce w oryginalnych propozycjach Mariusza Urbańskiego):

1. Najpierw definiujemy pojęcie syntetycznej inferencji formuły (będącej pewnym ciągiem formuł), a następnie pojęcie tabeli syntetycznej dla tej formuły jako zbioru syntetycznych inferencji tej formuły, spełniającego pewne warunki.

2. Najpierw definiujemy pojęcie syntetycznej inferencji zbioru formuł (która to inferencja jest pewnym ciągiem formuł), a następnie pojęcie tabeli syntetycznej dla tego zbioru formuł, jako zbioru takich inferencji, spełniającego pewne warunki.

W pierwszej z tych propozycji przez syntetyczną inferencję formuły φ rozumiemy ciąg $(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ taki, że:

1. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant k$, $\psi_i \in Sub(\varphi) \cup \neg Sub(\varphi)$.

2. $\psi_1 \in Lit$.

3. ψ_k jest identyczna z φ.

4. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant k$, zachodzi alternatywa:

   (a) $\psi_i \in Lit$, ale ψ_i jest różna od literałów występujących wcześniej lub później w rozważanym ciągu lub

(b) $\psi_i \in Cn_D(\{\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_m}\})$ dla pewnych $j_1, \ldots, j_m$ mniejszych od i.

W tej propozycji przez tabelę syntetyczną dla formuły φ rozumiemy rodzinę Ω złożoną z ciągów, z których każdy jest syntetyczną inferencją formuły φ lub syntetyczną inferencją formuły $\neg\varphi$, a ponadto spełnione są warunki:

1. Istnieje zmienna zdaniowa taka, że każda syntetyczna inferencja należąca do Ω ma jako pierwszy wyraz tę zmienną lub jej negację.

2. Jeśli i-tym wyrazem należącej do Ω syntetycznej inferencji s jest zmienna zdaniowa p_k, to do Ω należy też syntetyczna inferencja s^* identyczna z s na pierwszych $i-1$ miejscach, a mająca na miejscu i-tym formułę $\neg p_k$. Ponadto każda syntetyczna inferencja należąca do Ω, która jest identyczna z s na pierwszych $i-1$ miejscach ma na i-tym miejscu formułę p_k lub formułę $\neg p_k$. Symetryczny warunek zakładamy dla przypadku, gdy w s na i-tym miejscu znajduje się formuła $\neg p_k$.

Dowodzi się następujących faktów (Urbański 2002, 37–54):

1. Zbiór formuł będących wyrazami dowolnej syntetycznej inferencji dowolnej formuły języka klasycznego rachunku zdań jest semantycznie niesprzeczny.

2. Formuła φ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje syntetyczna inferencja formuły φ.

3. Dla każdej formuły φ języka klasycznego rachunku zdań istnieje tabela syntetyczna dla φ.

4. Minimalny punkt błędu. Niech $(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ będzie syntetyczną inferencją formuły φ i niech v będzie wartościowaniem. Jeśli v nie spełnia zbioru $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$, to istnieje indeks $1 \leqslant i \leqslant k$ (nazywany minimalnym punktem błędu rozważanej syntetycznej inferencji) taki, że:

   (a) $\psi_i \in Lit \cap (Sub(\varphi) \cup \neg Sub(\varphi))$
   (b) $v(\psi_i) = 0$
   (c) Nie istnieje indeks $j < i$ taki, że $v(\psi_j) = 0$.

5. Twierdzenie o pełności MTS. Można to twierdzenie sformułować w dwóch wersjach:

   (a) Formuła φ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka tabela syntetyczna dla φ, której każda syntetyczna inferencja kończy się formułą φ.

   (b) Formuła φ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej tabeli syntetycznej dla φ, każda należąca do niej syntetyczna inferencja kończy się formułą φ.

6. Formuła φ jest kontrtautologią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka tabela syntetyczna dla φ, której każda syntetyczna inferencja kończy się formułą $\neg\varphi$.

7. Formuła φ nie jest ani tautologią ani kontrtautologią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka tabela syntetyczna dla φ, że przynajmniej jedna jej syntetyczna inferencja kończy się formułą φ oraz przynajmniej jedna jej syntetyczna inferencja kończy się formułą $\neg\varphi$.

Wróćmy teraz do drugiej propozycji: określenia tabel syntetycznych dla zbiorów formuł. Ta propozycja obejmuje też omówioną wyżej propozycję, gdyż istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między formułami a jednoelementowymi zbiorami formuł.

Syntetyczną inferencją zbioru formuł $X = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ nazywamy skończony ciąg formuł $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$, który spełnia następujące warunki:

1. *Warunek podformuły*. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$, $\psi_i \in Sub(X) \cup \neg Sub(X)$

2. *Warunek startowy*. $\psi_1 \in Lit$

3. Dla każdego $1 \leqslant j \leqslant n$ zachodzi alternatywa:

   (a) *Wprowadzanie literałów*. ψ_j jest literałem, ale literał komplementarny do ψ_j nie występuje w ciągu Ψ.

   (b) *Wprowadzanie formuł złożonych*. ψ_j jest wyprowadzalna ze zbioru formuł, którego wszystkie elementy poprzedzają ψ_j w ciągu Ψ.

4. Spełniony jest jeden z *warunków zamykających*:

   (a) Wszystkie formuły zbioru X występują w ciągu Ψ.

   (b) Istnieje co najmniej jedna formuła $\varphi_i \in X$ taka, że $\neg\varphi_i$ występuje w ciagu Ψ.

Jeśli Ψ jest syntetyczną inferencją zbioru X, to nazywamy ją:

1. *sukcesem*, gdy spełniony jest warunek 4a) powyższej definicji;

2. *porażką*, gdy spełniony jest warunek 4b) powyższej definicji.

Syntetyczną inferencję zbioru $\{\varphi\}$ nazywamy też syntetyczną inferencją formuły φ.

Przez tabelę syntetyczną dla zbioru formuł $X = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ rozumiemy rodzinę Ω skończonych ciągów formuł zdaniowych, z których każdy jest syntetyczną inferencją zbioru X (nazywaną ścieżką tabeli Ω), spełniającą następujące warunki:

1. *Warunek jednolitego startu*. Istnieje taka zmienna zdaniowa, że pierwszym wyrazem każdej syntetycznej inferencji należącej do Ω jest literał bazujący na tej zmiennej.

2. Dla każdego ciągu $s = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ ze zbioru Ω, jeśli $1 \leqslant i \leqslant n$ i $\psi_i \in Lit$, to:

   (a) *Warunek semantycznej poprawności rozgałęzień*. Do Ω należy syntetyczna inferencja s^*, która jest identyczna z s na pierwszych $i-1$ miejscach, a na miejscu i-tym ma literał komplementarny do ψ_i.

   (b) *Warunek binarnych rozgałęzień*. Jeśli $i > 1$, to dla każdej syntetycznej inferencji $s^* \in \Omega$, która jest identyczna z s na pierwszych $i-1$ miejscach, zachodzi alternatywa: albo i-te miejsca w s i s^* są identyczne, albo na i-tym miejscu w s^* występuje literał komplementarny do literału występującego na i-tym miejscu w s.

Podobnie jak w przypadku pierwszej z omawianych wyżej propozycji, scharakteryzować można kanoniczne tabele syntetyczne dla zbiorów formuł, a ponadto dowodzi się, że:

1. Dla każdego zbioru formuł X istnieje tablica syntetyczna dla X.

2. Zbiór formuł każdej syntetycznej inferencji dla dowolnego zbioru X jest semantycznie niesprzeczny.

3. Zbiór formuł X jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje tabela syntetyczna dla X taka, że co najmniej jedna należąca do niej syntetyczna inferencja jest sukcesem.

4. Jeśli istnieje tabela syntetyczna dla X taka, że co najmniej jedna należąca do niej syntetyczna inferencja jest sukcesem, to każda tabela syntetyczna dla X zawiera co najmniej jedną syntetyczną inferencję, która jest sukcesem.

5. Formuła φ wynika logicznie ze zbioru formuł X (co zapisujemy $X \models \varphi$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje tabela syntetyczna Ω dla zbioru $X \cup \{\varphi\}$ taka, że dla każdej ścieżki $s \in \Omega$ spełniony jest co najmniej jeden z następujących warunków:

(a) istnieje co najmniej jedna formuła $\psi \in X$ taka, że $\neg\psi$ jest jednym z wyrazów ścieżki s;

(b) φ jest jednym z wyrazów ścieżki s.

6. Formuła φ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje tabela syntetyczna Ω dla zbioru $\{\varphi\}$ taka, że φ jest jednym z wyrazów każdej ścieżki w Ω.

PRZYKŁAD (Leszczyńska-Jasion). Skonstruujemy pewną formułę φ, w której występują tylko zmienne zdaniowe p_1, p_2, p_3, p_4 oraz spójniki $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Dla dowolnego zbioru $X \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ niech ψ_X będzie koniunkcją czterech literałów $\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \ell_3 \wedge \ell_4$, gdzie ℓ_i jest identyczny z p_i, gdy $i \in X$, natomiast ℓ_i jest identyczny z $\neg p_i$, gdy $i \notin X$. Niech φ będzie alternatywą wszystkich formuł ψ_X, gdzie $X \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Tak więc, φ jest alternatywą formuł:

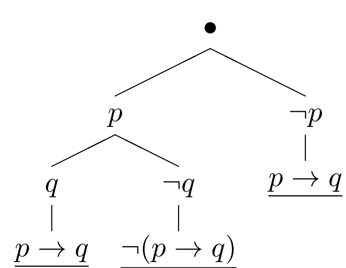
$$\begin{gathered}
\psi_{\{1,2,3,4\}}, \\
\psi_{\{1,2,3\}}, \psi_{\{1,2,4\}}, \psi_{\{2,3,4\}}, \psi_{\{1,3,4\}}, \\
\psi_{\{1,2\}}, \psi_{\{1,3\}}, \psi_{\{1,4\}}, \psi_{\{2,3\}}, \psi_{\{2,4\}}, \psi_{\{3,4\}}, \\
\psi_{\{1\}}, \psi_{\{2\}}, \psi_{\{3\}}, \psi_{\{4\}}, \\
\psi_{\emptyset}
\end{gathered}$$

Formuła φ jest tautologią klasycznego rachunku zdań. Różne zamknięte tablice analityczne dla formuły φ mają od 196 do 2^{32} gałęzi, w zależności od tego, w jakiej kolejności rozkładane są podformuły. Natomiast wszystkie tabele syntetyczne dla φ mają dokładnie 16 gałęzi. □

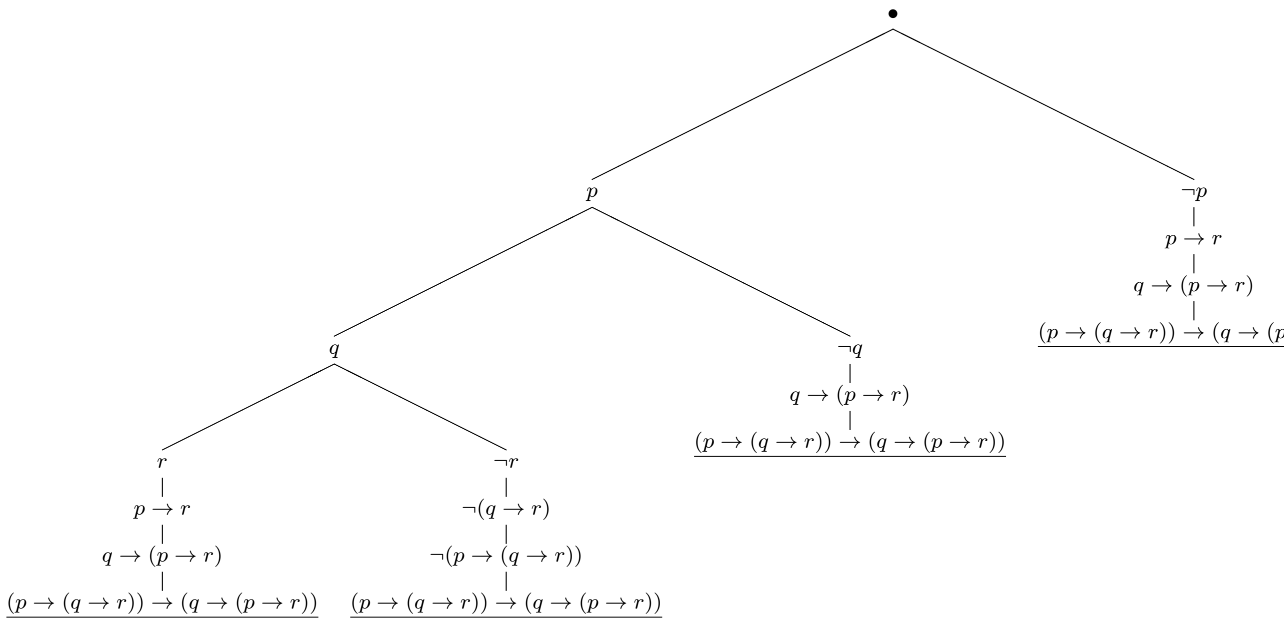
3 Przykłady

Podane niżej przykłady pochodzą z prac Urbański 2001, 2002. Podczas wykładu będziemy analizowali dalsze przykłady na tablicy.

3.1 Tabela syntetyczna dla $p \to q$



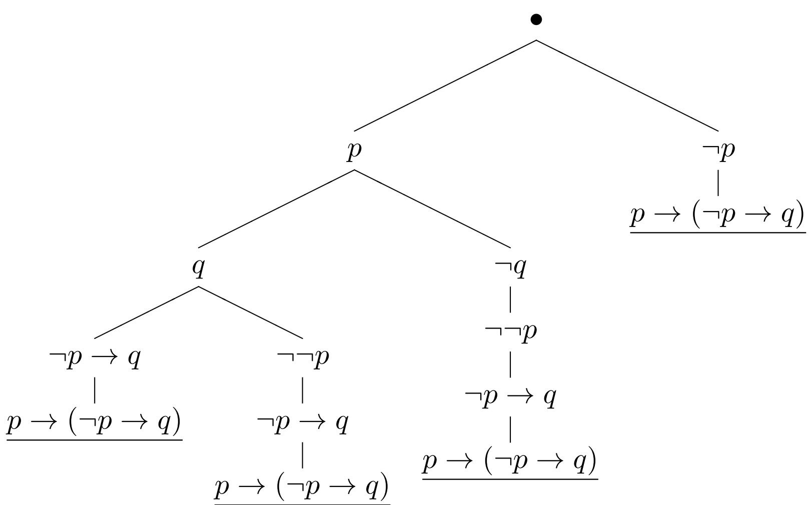
3.2 Tabela syntetyczna dla $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$



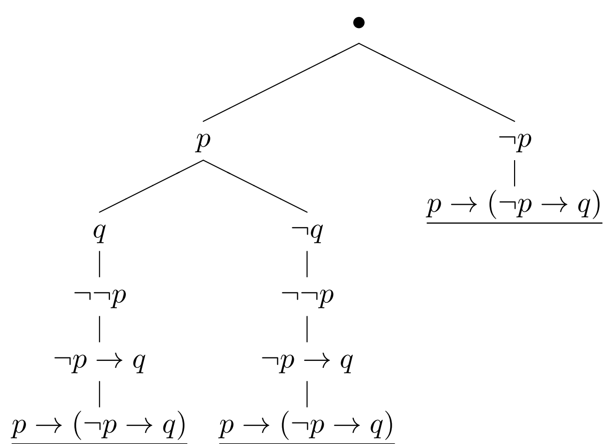
Można oczywiście zapisać tę tabelę w postaci zbioru syntetycznych inferencji, czyli zbioru następujących ciągów:

$(p, q, r, p \to r, q \to (p \to r), (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r)))$
$(p, q, \neg r, \neg(q \to r), \neg(p \to (q \to r)), (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r)))$
$(p, \neg q, q \to (p \to r), (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r)))$
$(\neg p, p \to r, q \to (p \to r), (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r)))$.

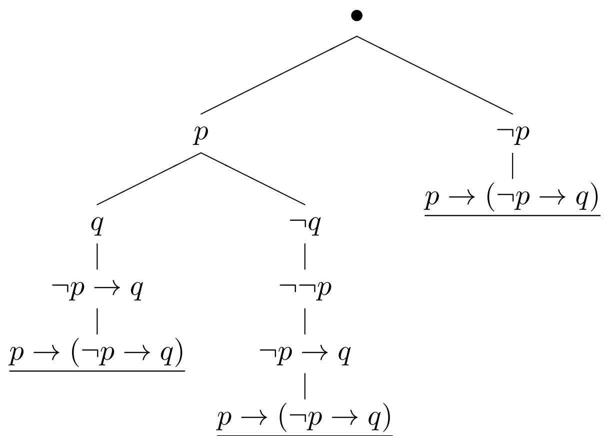
3.3 Tabele syntetyczne dla $p \to (\neg p \to q)$



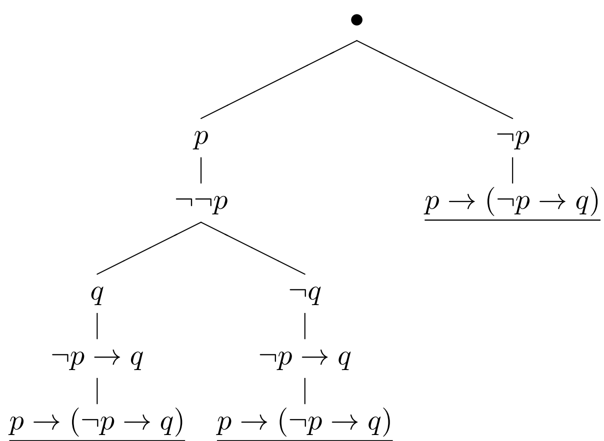
Powyższa tabela nie jest *regularna*: zawiera rozgałęzienia nie związane z literałami. Poniżej natomiast mamy przykłady regularnych tabel syntetycznych dla tej samej formuły:



Druga z tych tabel nieznacznie różni się od powyższej:



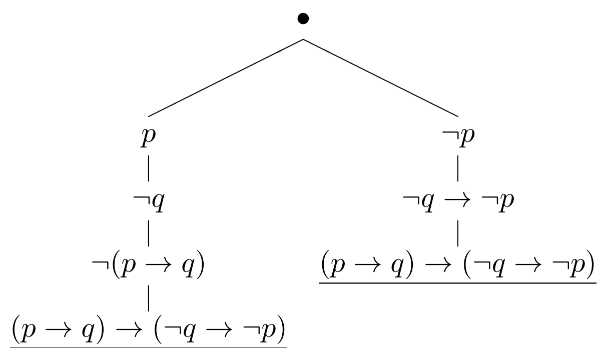
Można skonstruować inne jeszcze tabele syntetyczne dla rozważanej formuły, np. taką:



Powyższe przykłady pokazują, że konstruowanie tabel syntetycznych nie jest procedurą deterministyczną.

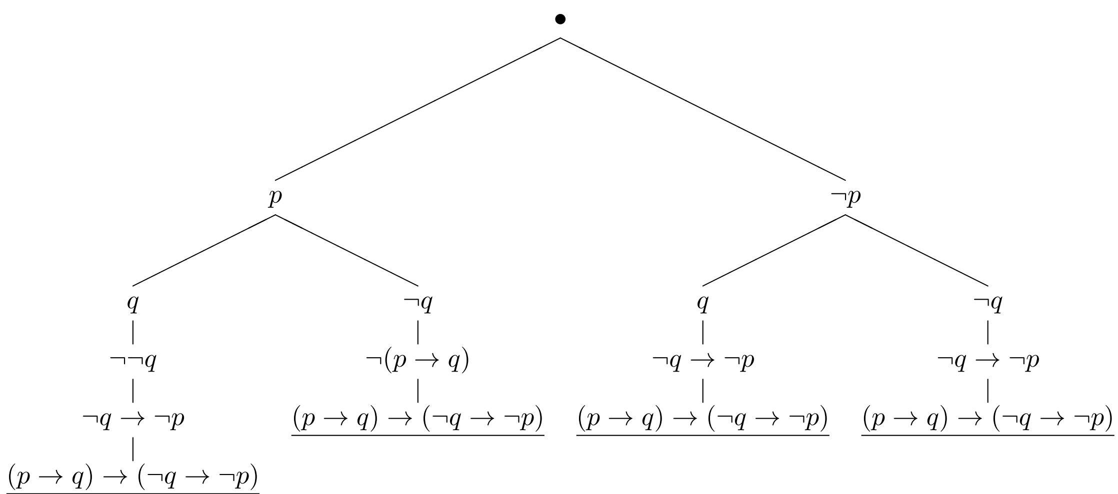
3.4 Uwaga!

Należy zachować czujność w konstruowaniu tabel syntetycznych. Dla przykładu, nie jest tabelą syntetyczną dla formuły $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ następujące drzewo:



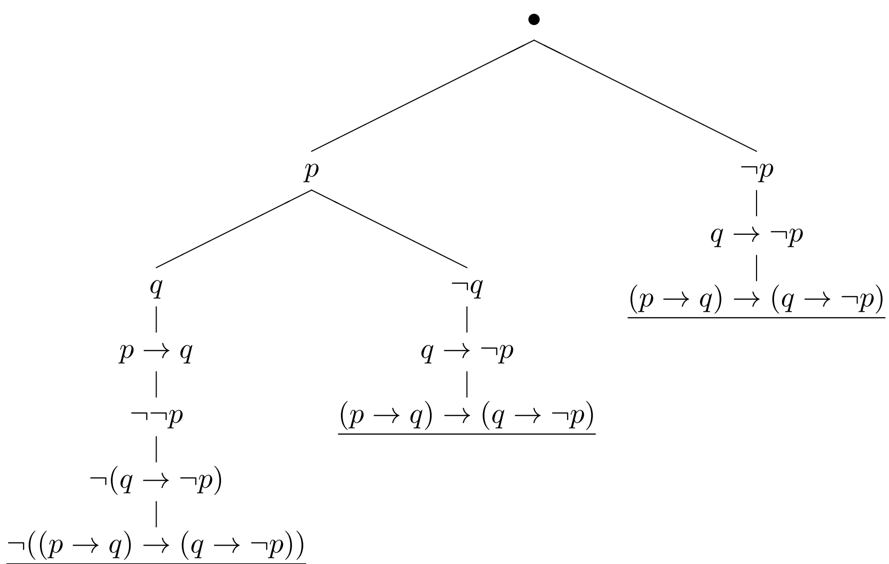
Nie jest to tabela syntetyczna, ponieważ w jednej z jej syntetycznych inferencji wprowadzono literał $\neg q$, a w drzewie nie ma gałęzi zawierającej na stosownym miejscu literału q.

Tabela syntetyczna w postaci kanonicznej dla tejże formuły wygląda natomiast następująco:



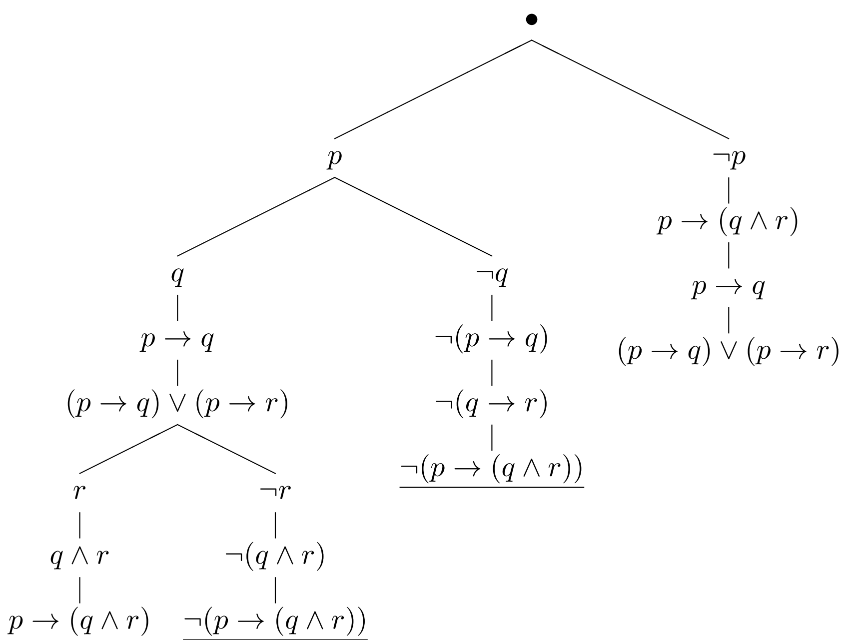
Wszystkie syntetyczne inferencje w tej tabeli kończą się formułą $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$, a zatem ta formuła jest tautologią.

3.5 Tabela syntetyczna dla $(p \to q) \to (q \to \neg p)$



Zauważmy, że w tej tabeli dwa liście drzewa zakończone są rozważaną formułą, a jeden jej negacją. Badana formuła nie jest zatem ani tautologią ani kontrtautologią.

3.6 Tabela syntetyczna dla zbioru $\{p \to (q \wedge r), (p \to q) \vee (p \to r)\}$



W tym przykładzie podkreślono ostatnie formuły ścieżek, które są porażkami. Zauważmy ponadto, że ze ścieżek, które są sukcesami odtworzyć można wartościowania zmiennych zdaniowych, przy których wartość wszystkich formuł rozważanego zbioru jest równa 1.

4 Zadanie domowe

Pamiętamy, że:

1. Zbiór formuł X jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje tabela syntetyczna dla X taka, że co najmniej jedna należąca do niej syntetyczna inferencja jest sukcesem.

2. Jeśli istnieje tabela syntetyczna dla X taka, że co najmniej jedna należąca do niej syntetyczna inferencja jest sukcesem, to każda tabela syntetyczna dla X zawiera co najmniej jedną syntetyczną inferencję, która jest sukcesem.

Tak więc, jeśli w co najmniej jednej tabeli syntetycznej dla X wszystkie należące do niej syntetyczne inferencje są porażkami, to X nie jest spełnialny.

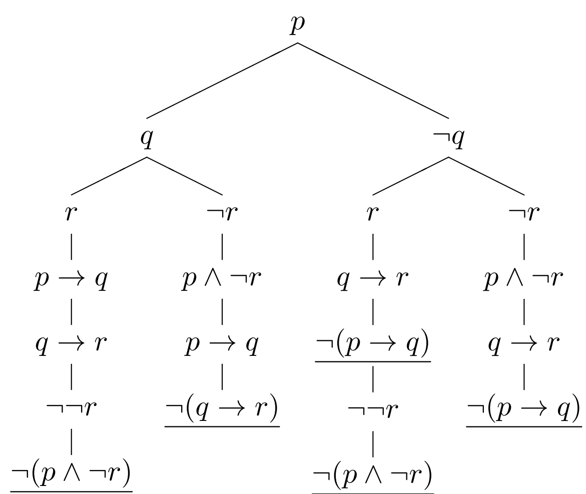
Rozważmy następujący zbiór formuł: $X = \{p \wedge \neg r, p \to q, q \to r\}$. Należy zbudować tabelę syntetyczną dla tego zbioru. Ponieważ jest to sprzeczny zbiór formuł, więc każda syntetyczna inferencja w tej tabeli zakończy się porażką, czyli będzie zawierała negację co najmniej jednej formuły z tego zbioru.

Zbudujemy taką tabelę syntetyczną, w której każda jej syntetyczna inferencja będzie zawierała negację *co najmniej jednej* formuły z X oraz pozostałe formuły z X.

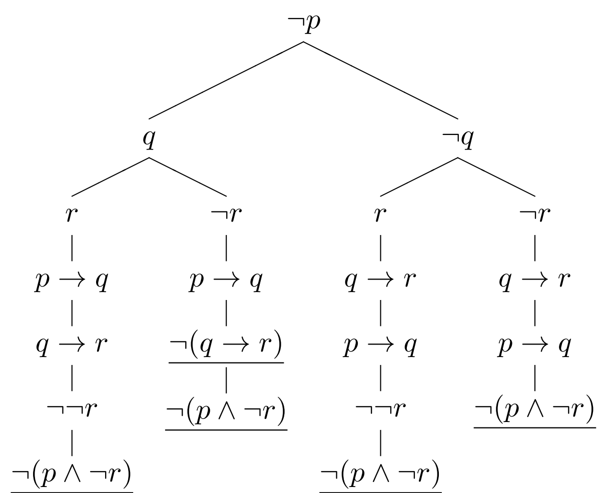
4.1 Rozwiązanie

Ze względów typograficznych przedstawimy naszą tabelę w dwóch częściach, zaczynających się od p i $\neg p$, odpowiednio.

Syntetyczne inferencje zaczynające się od p:



Syntetyczne inferencje zaczynające się od $\neg p$:

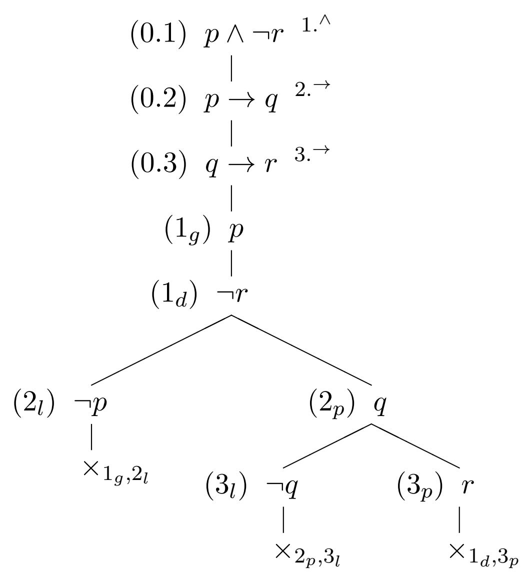


Podkreślono negacje formuł ze zbioru X, otrzymane w poszczególnych inferencjach. Zauważmy, że:

1. W sześciu przypadkach otrzymaliśmy negację jednej formuły ze zbioru X, a w dwóch pozostałych negacje dwóch formuł z tego zbioru.

2. Formuły w niektórych inferencjach mogły zostać wprowadzone na mocy więcej niż jednej reguły (może przydatna byłaby stosowna notacja?).

Porównajmy powyższą tabelę syntetyczną z tablicą analityczną dla tego samego zbioru formuł:



Tablica analityczna jest w tym przypadku nieco prostsza od tabeli syntetycznej. Jednak kanoniczna tabela syntetyczna (dla sprzecznego zbioru formuł) dostarcza nieco więcej informacji niż zamknięta tablica analityczna dla tegoż zbioru. Widać mianowicie, które wartościowania czynią poszczególne formuły z rozważanego zbioru prawdziwymi bądź fałszywymi.

W rozważanym przypadku kolejność wprowadzanych do tabeli syntetycznej literałów nie była zbyt istotna. Jednak przy rozważaniu znacznie większych zbiorów formuł (lub bardziej skomplikowanych formuł) ta kolejność może mieć istotne znaczenie, jeśli chodzi o jak najszybsze dotarcie do liści drzewa.

5 Uwagi końcowe

Mariusz Urbański opracował także MTS m.in. dla trójwartościowego rachunku Łukasiewicza (Urbański 2002). Pokazał również, że tabele syntetyczne dla klasycznego rachunku zdań można zinterpretować jako deklaratywne części erotetycznych scenariuszy poszukiwania odpowiedzi na pewne typy pytań. Pojęcie scenariusza erotetycznego wprowadził Andrzej Wiśniewski w 2001 roku (Wiśniewski 2003). Rafał Dutkiewicz rozważał systemy odrzuceniowe dla kilku rachunków logicznych, w których wykorzystywał pojęcia w pewnym sensie podobne do określonych przez Urbańskiego syntetycznych inferencji (Dutkiewicz 1988). W Poznaniu powstały dalsze prace dot. MTS (np. Leszczyńska-Jasion i Chlebowski 2019).

Cytowana literatura

Dutkiewicz, R. 1988. *Z badań nad metodą tabel semantycznych*. Lublin.

Kalmár, L. 1936. Zurückführung des Entscheidungsproblem auf den Fall von Formeln mit einer einzigen, binären Funktionsvariablen. *Compositio Mathematica* 4, 137–144.

Leszczyńska-Jasion, D., Chlebowski, Sz. 2019. Synthetic tableaux with unrestricted cut for first-order theories. *Axioms* 8 (4) (special issue Deductive Systems), 231–255.

Urbański, M. 2001. Remarks on synthetic tableaux for classical propositional calculus. *Bulletin of the Section of Logic* 30 (4), 195–203.

Urbański, M. 2002. *Tabele syntetyczne a logika pytań*. Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin.

Wiśniewski, A. 2003. Erotetic search scenarios. *Synthese* 134, 389–427.