AKSJOMATY EKSTREMALNE

JERZY POGONOWSKI, UAM

ABSTRAKT. Termin *aksjomaty ekstremalne* odnosi się do tych aksjomatów, które miały zapewniać, iż zawierająca je teoria jednoznacznie charakteryzuje swój model (np.: aksjomat zupełności w geometrii, aksjomat ciągłości, schemat aksjomatu indukcji w arytmetyce, aksjomaty ograniczenia i aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych w teorii mnogości). Znane twierdzenia limitacyjne udowodnione w XX wieku ukazały ograniczenia, jeśli chodzi o możliwości jednoznacznej charakterystyki modeli. Carnap oraz Bachmann podjęli w 1936 roku próbę ogólnej charakterystyki aksjomatów ekstremalnych, jednak bez powodzenia. W odczycie przedstawimy uwagi historyczne, dotyczące aksjomatów ekstremalnych oraz poddamy analizie przyczyny, dla których pewne z tych aksjomatów pozostają nadal akceptowane, a inne są odrzucane. Ponieważ aksjomaty ekstremalne formułowane były z intencją scharakteryzowania danych wprzódy struktur matematycznych (modeli zamierzonych), więc przyjmować należy, że ich postać odzwierciedla intuicje matematyczne dotyczące tych właśnie, z reguły fundamentalnych, struktur. Proponujemy rozumienie intuicji matematycznych jako przekonań, żywionych przez zawodowych matematyków, a przy tym wspieranych zgromadzoną wcześniej wiedzą matematyczną. Ustalanie, jakiego typu są to przekonania jest, naszym zdaniem, możliwe na podstawie analizy matematycznych tekstów źródłowych.

1 Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne

1.1 Uwagi historyczne

W pierwszych wydaniach *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta aksjomat zupełności formułowany był następująco:

> Elementy (punkty, proste, płaszczyzny) systemu geometrii tworzą system, który nie może zostać rozszerzony bez jednoczesnego naruszenia

> pozostałych aksjomatów, tj. nie można dodać do tego systemu punktów, prostych i płaszczyzn innego systemu przedmiotów tak, aby powstały system spełniał wszystkie pozostałe aksjomaty.

Był to zatem aksjomat sformułowany w metajęzyku, dopiero później zastąpiony został aksjomatem ciągłości. Do metody aksjomatycznej Hilberta nawiązywali Amerykańscy Postulatyści (Veblen, Huntington) – początek XX wieku. W drugiej połowie XIX wieku powstają też pierwsze aksjomatyki dla liczb: naturalnych (Peano, 1889, Grassman 1861), wymiernych (Weber, 1895), rzeczywistych (Dedekind, 1872, Cantor, 1872).

Dla liczb naturalnych aksjomatem ekstremalnym miał być aksjomat indukcji matematycznej (w ujęciu Peana). W języku pierwszego rzędu rolę taką miałby pełnić schemat aksjomatu indukcji.

Dla liczb rzeczywistych aksjomatem ekstremalnym miałby być aksjomat ciągłości. Jak wiadomo, istnieje dokładnie jedno (z dokładnością do izomorfizmu) ciało uporządkowane w sposób ciągły.

W naiwnej teorii mnogości nie mówiło się o modelach tej teorii. Po jej aksjomatycznym ujęciu zastanawiano się nad ewentualnymi aksjomatami ekstremalnymi dla niej. Jedną z pierwszych propozycji był aksjomat ograniczenia Fraenkla (1922).

Aksjomat ekstremalny dla teorii mnogości zaproponował też Gödel w 1940 roku. Chodzi oczywiście o jego aksjomat konstruowalności, wykorzystany w dowodzie niesprzeczności aksjomatu wyboru oraz hipotezy kontinuum z aksjomatami systemu ZF.

Pierwszą próbę ogólnej charakterystyki (w teorii typów) aksjomatów ekstremalnych podjęli Carnap i Bachmann w 1936 roku.

Carnap próbował udowodnić *Gabelkaritssatz*, twierdzenie głoszące, że własności izomorfizmu i elementarnej równoważności są równe zakresowo. Oczywiście, izomorfizm implikuje elementarną równoważność, ale nie na odwrót. Warunki wystarczające dla takiej implikacji odwrotnej podali Lindenbaum i Tarski w 1936 roku.

1.2 Uwagi logiczne

Już twierdzenie Löwenheima-Skolema (1915) ukazuje, że w języku pierwszego rzędu niemożliwa jest jednoznaczna (z dokładnością do izomorfizmu) charakterystyka modeli teorii. W swoim czasie sporym zainteresowaniem cieszył się tzw. paradoks Skolema, który nie jest jednak paradoksem, lecz raczej *efektem* użycia języka pierwszego rzędu. To, że teoria mnogości (w języku pierwszego rzędu) ma model przeliczalny (o ile jest niesprzeczna), a w modelu tym prawdziwe jest twierdzenie o istnieniu mocy nieprzeliczalnych oznacza jedynie, że w owym modelu przeliczalnym nie istnieje bijekcja między zbiorem liczb naturalnych w tym modelu a owym zbiorem, który „widziany" jest zatem przez rozważany model jako nieprzeliczalny.

Jedną z konsekwencji twierdzenia o zwartości jest fakt istnienia modelu niestandardowego arytmetyki. Model niestandardowy arytmetyki skonstruował Skolem w 1934 roku, wykorzystując konstrukcję ultraproduktu.

Niezupełność arytmetyki (Gödel, Rosser) ukazuje, że jej model standardowy nie może zostać scharakteryzowany z dokładnością do elementarnej równoważności (a więc także z dokładnością do izomorfizmu). W istocie, arytmetyka Peana pierwszego rzędu jest teorią *dziką*: (o ile jest niesprzeczna, to) w każdej mocy mocy nieskończonej κ ma maksymalną możliwą liczbę wzajem nieizomorficznych modeli, czyli 2^{κ}.

Ponieważ arytmetykę można interpretować w teorii mnogości, więc niezupełność i nierozstrzygalność tej pierwszej ma swój odpowiednik także w przypadku tej drugiej.

Aksjomat konstruowalności Gödla jest niezależny od aksjomatów ZFC.

Metodą wymuszania (Cohen, Scott, Solovay i inni) wykazano niezależność od aksjomatów teorii mnogości wielkiego mnóstwa zdań tej teorii (m.in. uogólnionej hipotezy kontinuum).

2 Aksjomaty ekstremalne: aspekty matematyczne

2.1 Aksjomat zupełności w geometrii

Zastąpienie aksjomatu zupełności aksjomatem ciągłości pozwoliło na wyrażenie tego aksjomatu ekstremalnego w języku przedmiotowym (drugiego rzędu). W konsekwencji, otrzymujemy kategoryczność systemu geometrii Hilberta. Podobnie, dowodzi się kategoryczności systemu geometrii euklidesowej (wraz z aksjomatem o równoległych) przedstawionego w monografii Borsuk, Szmielew 1975, gdzie pojęciami pierwotnymi są: przestrzeń, rodziny prostych i płaszczyzn, trójargumentowa relacja $\mathbf{B}xyz$ leżenia między (punkt y leży między punktami x oraz z) oraz czteroargumentowa relacja $\mathbf{D}xyuv$ równoodległości punktów (punkt x jest tak samo odległy od y, jak u od v). W systemie tym aksjomat ciągłości przyjmuje postać następującą (Borsuk, Szmielew 1975, 140):

> Jeśli X, Y są niepustymi zbiorami punktów oraz istnieje punkt a taki, że jeżeli $p \in X$ oraz $q \in Y$, to $\mathbf{B}apq$, to istnieje punkt b taki, że jeśli $p \in X - \{b\}$ oraz $q \in Y - \{b\}$, to $\mathbf{B}pbq$.

Dodajmy niejako na marginesie, że np. system geometrii absolutnej wraz z zaprzeczeniem aksjomatu ciągłości ma model w zbiorze liczb algebraicznych (a więc zbiorze przeliczalnym).

Aksjomatyczny system geometrii Tarskiego jest teorią elementarną, której pojęciami pierwotnymi są predykaty $\mathbf{B}xyz$ oraz $\mathbf{D}xyuv$, które czytamy tak samo, jak powyżej. Tutaj aksjomat ciągłości nie jest pojedynczą formułą, ale *schematem aksjomatów* o następującej postaci:

$$\exists z \forall x \forall y \left((\varphi(x) \wedge \psi(y)) \to \mathbf{B}xyz \right) \to \exists u \forall x \forall y \left((\varphi(x) \wedge \psi(y)) \to \mathbf{B}xuz \right),$$

gdzie $\varphi(x)$ jest formułą, w której y, z, u nie są zmiennymi wolnymi, a $\psi(y)$ jest formułą, w której x, z, u nie są zmiennymi wolnymi. System geometrii Tarskiego jest *zupełny* oraz *rozstrzygalny*.

2.2 Aksjomat ciągłości

Istnieje wiele sformułowań aksjomatu ciągłości, wzajemnie równoważnych. Tak więc, do aksjomatów ciała uporządkowanego $(R, +, \cdot, 0, 1, <)$ można dodać, w charakterze aksjomatu ciągłości, każdy z następujących warunków:

1. Dla każdego przekroju (A, B) w $(R, <)$ albo w A istnieje element największy, albo w B istnieje element najmniejszy.

2. Dla każdego niepustego, ograniczonego z góry zbioru $A \subseteq R$ istnieje w R jego kres górny.

3. Dla każdego nieskończonego i ograniczonego zbioru $A \subseteq R$ istnieje w R punkt skupienia (w topologii porządkowej).

4. $(R, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem archimedesowym i dla każdego ciągu $(a_n) \subseteq R$ istnieje $a \in R$ taki, że $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

5. $(R, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem archimedesowym i dla każdego ciągu zstępujących przedziałów domkniętych (A_n) zachodzi $\bigcap\limits_n A_n \neq \emptyset$.

Zarówno Dedekind, jak i inni matematycy wypracowujący podstawy teorii liczb rzeczywistych podkreślali, że nie ma argumentów czysto fizycznych za ciągłością. Nie wiemy, czy świat fizyczny ma naturę ciągłą czy też dyskretną.

2.3 Aksjomat indukcji w arytmetyce

Aksjomat indukcji może zostać wyrażony przez pojedyncze zdanie w języku drugiego rzędu lub przez schemat aksjomatów w języku rzędu pierwszego:

1. Aksjomat. $\forall X\ (0 \in X \wedge \forall x\ (x \in X \rightarrow s(x) \in X) \rightarrow \forall x\ (x \in X))$,

   gdzie s jest symbolem operacji następnika.

2. Schemat. $(\psi(0) \wedge \forall x\ (\psi(x) \rightarrow \psi(s(x)))) \rightarrow \forall x\ \psi(x)$,

   gdzie $\psi(x)$ jest dowolną formułą z jedną zmienną wolną języka arytmetyki PA.

Każda z powyższych wersji aksjomatu indukcji jest aksjomatem *minimalności*. Miałby on gwarantować, że uniwersum modelu (*zamierzonego*) jest najmniejszym zbiorem (dyskretnie liniowo uporządkowanym, z elementem pierwszym oraz bez elementu ostatniego), w którym dowolna własność arytmetyczna (wyrażalna w języku teorii) przysługuje wszystkim elementom, o ile przysługuje elementowi pierwszemu oraz przysługuje następnikowi dowolnej liczby, jeśli tylko przysługuje owej liczbie.

Aksjomat zupełności dla arytmetyki w języku drugiego rzędu implikuje kategoryczność tej teorii. Natomiast schemat aksjomatu indukcji w języku pierwszego rzędu nie zapewnia kategoryczności (ani nawet zupełności). Udowodniono, że nie można go też zastąpić (równoważnym) skończonym zestawem aksjomatów indukcji, nie można też ograniczyć złożoności występujących w nim formuł, bez utraty całej jego „mocy dowodowej".

Współcześnie intensywnie bada się różne schematy ograniczonej indukcji. Bada się, „ile indukcji jest potrzebne" do otrzymania określonych części arytmetyki, ograniczając złożoność kwantyfikatorową formuł występujących w schemacie indukcji. Dla przykładu, konstrukcja funkcji rekurencyjnych oraz korzystanie ze schematu rekursji prostej wymaga schematu indukcji dla Σ_1-formuł.

Aksjomat indukcji u Peana (1889) oraz Dedekinda (1888) ma postać formuły drugiego rzędu, przy czym Dedekinda nie interesowały aspekty *logiczne* jego systemu. Liczby naturalne w jego *Was sind ud was sollen die Zahlen?* definiowane są jako *najmniejszy* zbiór N z elementem wyróżnionym 1 wyposażony w funkcję $f : N \rightarrow N$, do której przeciwdziedziny 1 nie należy taki, iż N jest domknięty względem f. Podobną funkcję wraz z warunkiem domkniętości wykorzystywał Frege (1884).

Wcześniej spotykamy aksjomat indukcji w *Lehrbuch der Arithmetik* Grassmana (1861), który definiował liczby naturalne jako (w dzisiejszej terminologii) uporządkowaną dziedzinę całkowitości, w której każdy niepusty zbiór elementów dodatnich ma element najmniejszy.

Uważa się, że aksjomatem indukcji posługiwał się Pascal, a jego ogólne sformułowanie znajdujemy u J. Bernoulliego. Jednak już matematycy w starożytnej Grecji znali zasadę *nieskończonego regresu*: aby pokazać, że żadna liczba nie ma własności ψ wystarczy pokazać, że dla każdej liczby n mającej własność ψ istnieje liczba $m < n$, która posiada własność ψ. Gdyby więc istniała liczba o własności ψ, to moglibyśmy otrzymywać coraz to mniejsze liczby o własności ψ, co odrzucano jako absurdalne. Później zasadę tę odkrył na nowo Fermat.

2.4 Aksjomaty ekstremalne w algebrze?

W algebrze i topologii dowodzi się twierdzeń wskazujących na wyjątkowość liczb rzeczywistych ze względu na połączenie ich własności: algebraicznych, porządkowych i topologicznych. W tym zatem sensie, liczby rzeczywiste tworzą *model zamierzony* stosownych teorii, mówiących o tych własnościach. Przypomnijmy najbardziej znane przykłady takich twierdzeń:

1. *Twierdzenie Frobeniusa. Każda łączna algebra z dzieleniem nad ciałem liczb rzeczywistych jest izomorficzna albo z ciałem liczb rzeczywistych, albo z ciałem liczb zespolonych, albo z algebrą kwaternionów.* (Istnieje też uogólnienie tego twierdzenia (*twierdzenie Hurwitza*), dodające w tezie *oktawy Cayleya*.)

2. *Twierdzenie Ostrowskiego. Każde ciało zupełne w metryce odpowiadającej normie archimedesowej jest izomorficzne z ciałem liczb rzeczywistych lub ciałem liczb zespolonych, a norma jest równoważna ze zwykłą wartością bezwzględną.*

3. *Twierdzenie Pontriagina. Każde spójne lokalnie zwarte ciało topologiczne jest izomorficzne z ciałem topologicznym liczb rzeczywistych, lub ciałem topologicznym liczb zespolonych, lub algebrą topologiczną kwaternionów.*

Ciała: liczb wymiernych, liczb rzeczywistych, liczb zespolonych pełnią rolę wyróżnioną w wielu działach matematyki. Są jednoznacznie scharakteryzowane przez połączenie stosownych warunków arytmetycznych, algebraicznych, porządkowych, topologicznych.

Aksjomatyka (drugiego rzędu) dla liczb rzeczywistych została podana w 1936 roku przez Tarskiego. Opisuje ona strukturę $(\mathbf{R}, <, +, 1)$, gdzie $<$ jest liniowym gęstym porządkiem ciągłym w sensie Dedekinda, $+$ jest operacją dodawania (zgodną z $<$), a 1 jest elementem wyróżnionym, spełniającym warunek $1 < 1 + 1$. Aksjomaty implikują, iż ta struktura jest liniowo uporządkowaną grupą przemienną względem dodawania, z elementem wyróżnionym 1. Można także pokazać, że aksjomaty implikują istnienie operacji dwuargumentowej, mającej wszystkie oczekiwane własności mnożenia. Aksjomat ciągłości przyjmuje w tym systemie postać następującą (Tarski 1965, 214):

> Jeśli K oraz L są dowolnymi zbiorami liczb spełniającymi warunek $x < y$ dla wszelkich $x \in K$ oraz $y \in L$, to istnieje liczba z taka, że: jeśli $x \in K, y \in L, x \neq z, y \neq z$, to $x < z$ oraz $z < y$.

Alfred Tarski podał również aksjomatykę (pierwszego rzędu) dla teorii ciał rzeczywiście domkniętych. Teoria ta jest zupełna. Dopuszcza eliminację kwantyfikatorów. Jest więc także rozstrzygalna.

Liczby hiperrzeczywiste tworzone są z użyciem konstrukcji ultraproduktu. Ciało liczb hiperrzeczywistych nie jest archimedesowe – zawiera elementy nieskończenie małe oraz nieskończenie duże. Jest elementarnie równoważne z ciałem liczb rzeczywistych, ale nie jest z nim izomorficzne.

Ciało F jest *formalnie rzeczywiste*, gdy dla dowolnych $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$: jeśli $a_1^2 + a_2^2 + \ldots, +a_n^2 = 0$, to $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$. Ten warunek jest z kolei równoważny każdemu z następujących warunków:

1. Element $-1 \in F$ nie jest sumą kwadratów elementów F. Z tego wynika, że F ma charakterystykę 0.

2. Istnieje element F, który nie jest sumą kwadratów elementów F oraz charakterystyka F jest różna od 2.

3. Ciało F może zostać uporządkowane, czyli istnieje liniowy porządek na F zgodny z działaniami arytmetycznymi.

Przez ciało *rzeczywiście domknięte* rozumiemy ciało formalnie rzeczywiste takie, że żadne jego właściwe rozszerzenie algebraiczne nie jest formalnie rzeczywiste.

Ciała rzeczywiście domknięte mają dokładnie te same własności pierwszego rzędu co liczby rzeczywiste. Zachodzi dla nich:

Twierdzenie Artina-Schreiera. Niech F będzie ciałem uporządkowanym przez ustalony porządek $<$. Wtedy F ma rozszerzenie algebraiczne, powiedzmy E, nazywane jego domknięciem rzeczywistym *takie, że E jest ciałem rzeczywiście domkniętym, a jego porządek, powiedzmy $\prec$, jest rozszerzeniem $<$. Takie E jest jedyne, z dokładnością do izomorfizmu.*

Każdy z poniższych warunków jest równoważny temu, że ciało F jest rzeczywiście domknięte:

1. Istnieje porządek liniowy w F (zgodny z działaniami arytmetycznymi) taki, że każdy element dodatni (względem tego porządku) jest kwadratem w F oraz każdy wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach w F ma co najmniej jeden pierwiastek w F.
2. F jest ciałem formalnie rzeczywistym takim, że każdy wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach w F ma co najmniej jeden pierwiastek w F oraz dla każdego $a \in F$ istnieje $b \in F$ taki, że $a = b^2$ lub $a = -b^2$.
3. F nie jest algebraicznie domknięte, ale jego domknięcie algebraiczne jest rozszerzeniem skończonym.
4. F nie jest algebraicznie domknięte, ale $F(\sqrt{-1})$ jest algebraicznie domknięte.
5. Istnieje porządek liniowy w F (zgodny z działaniami arytmetycznymi), który nie daje się rozszerzyć do porządku liniowego (zgodnego z działaniami arytmetycznymi) w żadnym właściwym rozszerzeniu algebraicznym ciała F.

Zachodzą jednak także następujące fakty:

1. Teoria ciał rzeczywiście domkniętych ma w każdej mocy nieskończonej κ maksymalną możliwą liczbę modeli wzajem nieizomorficznych, tj. 2^κ.
2. Istnieje dokładnie jedno (z dokładnością do izomorfizmu) ciało rzeczywiście domknięte mocy $\aleph_\alpha$ o typie porządkowym η_α, dla dowolnej liczby porządkowej α.
3. Przy założeniu uogólnionej hipotezy kontinuum wszystkie ciała rzeczywiście domknięte o η_1 własności są izomorficzne.

2.5 Aksjomaty ograniczenia w teorii mnogości

Abraham Fraenkel proponował swój *aksjomat ograniczenia* jako wyrażający fakt, że nie istnieją żadne inne zbiory oprócz tych, których istnienie można udowodnić z aksjomatów teorii mnogości. Chciał w ten sposób uzyskać jakąś formę zupełności dla teorii mnogości (pamiętajmy, że aksjomat ograniczenia sformułowano w 1922 roku, a więc przed wynikami Gödla dotyczącymi niezupełności).

Należy pamiętać, że aksjomat ograniczenia formułowany był dla teorii mnogości bez aksjomatu regularności. Fraenkel podkreśla, że ten system aksjomatów nie wyklucza istnienia zbiorów nieufundowanych, czyli takich nieskończonych łańcuchów zbiorów x_n, gdzie n jest liczbą naturalną, dla których zachodzi $x_{n+1} \in x_n$, dla wszystkich n. Aksjomat ograniczenia miałby umożliwić wykluczenie takich sytuacji.

Aksjomatem ograniczenia jest też aksjomat konstruowalności Gödla, który głosi, iż wszystkie zbiory są konstruowalne. Klasa zbiorów konstruowalnych powstaje przez indukcję pozaskończoną. W krokach następnikowych tworzymy rodzinę wszystkich podzbiorów definiowalnych zbioru z kroku poprzedniego, a w krokach granicznych bierzemy sumę zbiorów z kroków poprzedzających. Używamy więc w tym przypadku najsłabszej z możliwych operacji tworzenia zbioru potęgowego, zgodnej z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości.

Aksjomat konstruowalności nie został przyjęty w teorii mnogości, ale odegrał w niej bardzo istotną rolę, nie tylko w dowodzie niesprzeczności hipotezy kontinuum i aksjomatu wyboru. Kurt Gödel już w 1947 roku jasno opowiadał się raczej za dążeniem do poszukiwania jakiegoś aksjomatu *maksymalności* dla teorii mnogości, a nie aksjomatów *minimalności*.

Innym aksjomatem ograniczenia jest aksjomat kanoniczności Suszki. Głównym celem napisania rozprawy Suszko 1951 miała być eksplikacja *paradoksu Skolema*, nie odwołująca się przy tym do samego twierdzenia Löwenheima-Skolema, lecz raczej z odwołaniem do tych sformułowań obecnych w literaturze, które wywodzą paradoks Skolema ze „słabości wyrażeniowej" (języka) logiki pierwszego rzędu.

Także John Myhill zaproponował pewną wersję aksjomatu ograniczenia, wykorzystując arytmetyzację składni.

Aksjomaty ograniczenia były krytykowane już w czasie ich formułowania, w przypadku aksjomatu Fraenkla m.in. przez Johna von Neumanna oraz Ernsta Zermela. Bodaj najbardziej wnikliwą krytykę aksjomatów minimalności w teorii mnogości podano w Fraenkel, Bar Hillel, Levy 1973. Formułuje się tam, poddając następnie krytyce, dwa aksjomaty ograniczenia.

Głównym pomysłem na wyrażenie faktu, iż nie ma więcej zbiorów niż wymagają tego aksjomaty jest następujący schemat: *Jeśli Q jest własnością taką, że każdy zbiór, którego istnienie wynika z aksjomatów ma własność Q, to każdy zbiór ma własność Q*. Trzeba teraz wyrazić w sposób ścisły sformułowanie „Każdy zbiór, którego istnienie wynika z aksjomatów ma własność Q." Ponieważ rozważany system aksjomatów jest nieskończony, więc stwierdzenia tego nie wyrazimy jedną formułą. Bez wdawania się w szczegóły powiedzmy jedynie, że rozważana własność Q odnosi się do domknięcia uniwersum na podstawowe operacje tworzenia zbiorów, występujące w aksjomatach teorii mnogości. Tak rozumiejąc Pierwszy Aksjomat Ograniczenia dowodzi się np., że:

1. Pierwszy Aksjomat Ograniczenia jest równoważny koniunkcji aksjomatu ufundowania oraz zdania stwierdzającego, iż nie istnieją nieosiągalne liczby kardynalne. Można zatem udowodnić również konsekwencje nieistnienia takich liczb.

2. Przy sformułowaniu teorii mnogości w logice drugiego rzędu (lub w systemie ze zbiorami i klasami), aksjomaty w rodzaju Pierwszego Aksjomatu Ograniczenia pozwalają na udowodnienie kategoryczności takiej teorii mnogości.

3. Z Pierwszego Aksjomatu Ograniczenia *nie* można wywnioskować niczego na temat hipotezy kontinuum.

Drugi Aksjomat Ograniczenia to koniunkcja poniższych zdań:

1. Wszystkie zbiory są konstruowalne.

2. Nie istnieją zbiory przechodnie, które są modelami ZF.

Ze zdania a) wynika, że wszystkie zbiory są ufundowane. Jak wiadomo z pracy Gödla, a) implikuje także uogólnioną hipotezę kontinuum. Z kolei, zdanie b) implikuje, że nie istnieją nieosiągalne liczby kardynalne. Widać zatem, że Drugi Aksjomat Ograniczenia implikuje Pierwszy Aksjomat Ograniczenia.

Każdy z powyższych aksjomatów ogranicza liczbę istniejących zbiorów. Najważniejsze argumenty przeciw przyjmowaniu takich aksjomatów, to wedle autorów:

1. Pierwszy to argument z analogii. W przypadku aksjomatu indukcji w arytmetyce lub aksjomatu zupełności w geometrii są one przyjmowane nie dlatego, że czynią system aksjomatów kategorycznym, ani dlatego, że służą jakimś celom metamatematycznym, ale dlatego, iż po dodaniu tych aksjomatów otrzymujemy systemy, które w sposób doskonały oddają nasze intuicje dotyczące arytmetyki i geometrii. Powód dodania tych aksjomatów miałby zatem, wedle autorów, naturę *pragmatyczną*. Przez analogię, aksjomaty ograniczenia w teorii mnogości powinny być oceniane w zależności od tego, czy otrzymana po ich dodaniu teoria mnogości wiernie oddaje nasze intuicje dotyczące zbiorów.

2. Ograniczenie pojęcia zbioru do możliwie najwęższego zgodnego z aksjomatami ZFC jedynie dla względów ekonomii byłoby właściwie jedynie wtedy, gdybyśmy w sposób absolutny wierzyli, że te aksjomaty oraz ich konsekwencje są jedynymi matematycznie interesującymi stwierdzeniami o zbiorach. Autorzy twierdzą, że trudno przyjąć taką absolutną wiarę w odniesieniu do aksjomatów ZFC. A nawet gdyby to przyjąć, to należałoby raczej poszukiwać czegoś w rodzaju aksjomatu zupełności (jak w geometrii), a nie aksjomatu ograniczenia, oczywiście pod warunkiem, że tego typu aksjomat można byłoby precyzyjnie sformułować.

3. Kolejny argument związany jest ze sceptycznym stanowiskiem autorów wobec aksjomatu konstruowalności Gödla. Chodzi mianowicie o uzasadnienie tego fragmentu aksjomatu ograniczenia, który każe ograniczać „rozmiar" zbiorów. Przy tym, autorzy przypominają o dwóch czynnikach (oraz ich wzajemnych związkach) odgrywających ważną rolę w argumentach za lub przeciw przyjęciu jakiegoś stwierdzenia za aksjomat: *elegancji matematycznej* oraz *postawie platońskiej*.

   Elegancja matematyczna. Nie można powiedzieć, aby aksjomaty ograniczenia przyczyniały się do matematycznej elegancji teorii dlatego, iż możemy z ich pomocą udowodnić jakieś mocniejsze twierdzenia. Jeśli aksjomaty owe są użyteczne w dowodach takich twierdzeń to raczej poprzez fakt, iż po prostu zaprzeczają istnieniu zbiorów, które „nie pasują" do dowodzonego twierdzenia. Inaczej rzecz się ma np. z aksjomatem ufundowania.

   Postawa platońska. Aksjomaty ograniczenia poświadczają istnienie pewnych ustalonych uniwersów zbiorów (które to uniwersa same zbiorami nie są). Wiemy skądinąd, że uniwersum wszystkich zbiorów nie może być zbiorem. Pogodzenie tego faktu z postawą platońską może polegać na uznaniu, iż uniwersum wszystkich zbiorów nie jest ustalone, lecz raczej jest stale zdolne do „rozwijania się", czyli iż jesteśmy w stanie stale „produkować" coraz to większe zbiory. Jeśli teraz ogół wszystkich zbiorów (przy przyjęciu aksjomatu ograniczenia) miałby być bytem platońskim, to dlaczego nie moglibyśmy uznać go za nowy zbiór w szerszym uniwersum niż to, które wyznacza aksjomat ograniczenia? Pogodzenie ze sobą obrazu stale rosnącego uniwersum zbiorów oraz żądania, aby mówić o prawdzie lub fałszu stwierdzeń o *wszystkich* zbiorach prowadzi do założenia, że niektóre „tymczasowe" uniwersa są dowolnie bliskimi „aproksymacjami" ostatecznego, nieosiągalnego uniwersum. Sprawa ta znajduje swoje formalne rozwiązania w *zasadach odbicia*.

2.6 Aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych w teorii mnogości

Mówi się o *programie Gödla* w kontekście szukania nowych aksjomatów teorii mnogości. Oto co pisze np. Joan Bagaria (tłumaczenie: JP):

> Wedle Gödla jest pięć takich zasad: *Intuicyjny zasięg*, *Zasada Domknięcia*, *Zasada Odbicia*, *Ekstensjonalizacja* oraz *Jednostajność*. Pierwsza zasada, *Intuicyjnego zasięgu* to zasada intuicyjnego tworzenia zbiorów, która wcielona jest w aksjomaty ZFC. *Zasada Domknięcia* może zostać podłączona pod *Zasadę Odbicia*, którą można podsumować następująco: uniwersum V wszystkich zbiorów nie może zostać jedno-

znacznie scharakteryzowane, tj. odróżnione od wszystkich swoich odcinków początkowych przez jakąkolwiek własność wyrażalną w dowolnej rozsądnej logice wykorzystującej relację należenia. Słabą formą tej zasady jest dowodliwe w ZFC twierdzenie o odbiciu, autorstwa Montague i Levy'ego (zob. Kanamori 1994):

> *Dowolne zdanie języka teorii mnogości pierwszego rzędu, które zachodzi w V, zachodzi również w pewnym V_α.*
>
> *Zasada Odbicia* Gödla jest dokładnie rozszerzeniem tego twierdzenia na logiki wyższych rzędów, logiki infinitarne, itd.
>
> *Zasada Ekstensjonalizacji* stwierdza, że V spełnia ekstensjonalną postać Aksjomatu Zastępowania i jest wprowadzona dla uzasadnienia istnienia liczb kardynalnych nieosiągalnych. [...]
>
> *Zasada Jednostajności* stwierdza, że uniwersum V jest jednostajne, w tym sensie, że jego struktura jest wszędzie podobna. W sformułowaniu Gödla (Wang 1996, 8.7.5): *Te same lub podobne stany rzeczy pojawiają się stale na nowo (być może w bardziej skomplikowanych wersjach).* Mówi on też, że zasada ta mogłaby zostać nazwana *zasadą proporcjonalności uniwersum*, zgodnie z którą analogony własności małych liczb kardynalnych prowadzą do dużych liczb kardynalnych. Gödel twierdzi, że ta zasada umożliwia wprowadzenie liczb kardynalnych mierzalnych lub silnie zwartych, jako iż te pojęcia dotyczące dużych liczb kardynalnych otrzymywane są przez uogólnienie pewnych własności ω na liczby kardynalne nieprzeliczalne.

Program powyższy wiąże się zatem z poszukiwaniem aksjomatów ekstremalnych, wyrażających maksymalność uniwersum zbiorów.

Wedle Andrzeja Mostowskiego wyróżnić można dwie zasady budowania coraz to nowych aksjomatów nieskończoności:

1. Pierwsza z nich może być nazywana *zasadą przechodzenia od nieskończoności potencjalnej do aktualnej* i znajdujemy ją już w pracach Dedekinda. Tworzymy nowe zbiory, wykorzystując *aksjomat nieskończoności* oraz *aksjomat zastępowania*. Uniwersum zbiorów jest potencjalnie nieskończone, zamknięte na pewne operacje. Postulujemy istnienie *zbioru*, który sam jest domknięty na owe operacje. Posługując się tą zasadą, uzyskujemy liczby kardynalne nieosiągalne oraz pewne inne.

2. Druga zasada to *zasada istnienia zbiorów osobliwych*. Przypuśćmy, że konstruując zbiory za pomocą operacji opisanych w aksjomatach teorii mnogości, które przyjęliśmy dotychczas, napotykamy stale na zbiory o pewnej

własności P. Jeśli nie ma oczywistych powodów, które skłaniałyby nas do przyjęcia twierdzenia, że każdy zbiór ma własność P, to przyjmujemy nowy aksjomat, stwierdzający, że istnieją zbiory nie posiadające własności P. W ten sposób otrzymujemy np. liczby mierzalne.

Aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych są ściśle związane z mocą dowodową oraz względną niesprzecznością teorii. Dla przykładu, założenie istnienia liczb mocno nieosiągalnych pozwala udowodnić niesprzeczność teorii ZFC.

Istnieją także matematyczne powody dla rozważania dużych liczb kardynalnych (np. w związku z badaniami definiowalnych podzbiorów prostej rzeczywistej). Dla przykładu:

1. Jeśli istnieje liczba mierzalna, to każdy Σ^1_2-zbiór liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie Lebesgue'a oraz ma własność Baire'a (Solovay).

2. Jeśli istnieje liczba mierzalna, to każdy Π^1_1-zbiór liczb rzeczywistych jest zdeterminowany (Martin).

3. Jak wiadomo z pracy Gödla, jeśli założymy aksjomat konstruowalności, to istnieje Δ^1_2 podzbiór prostej, który nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i który nie ma własności Baire'a, oraz istnieje nieprzeliczalny zbiór klasy Π^1_1, który nie zawiera żadnego podzbioru doskonałego.

4. Z kolei, jeśli założymy aksjomat determinacji rzutowej PD, to wszystkie zbiory rzutowe mają własność Baire'a i są mierzalne w sensie Lebesgue'a oraz każdy nieprzeliczalny zbiór rzutowy zawiera podzbiór doskonały. Aksjomat PD głosi, że zdeterminowany jest każdy rzutowy podzbiór zbioru ω^ω.

Nowe aksjomaty formułowane być mogą też w terminach *twierdzeń podziałowych*. Własności podziałowe zbiorów istotnie zależą od ich mocy: inne twierdzenia otrzymujemy dla zbiorów skończonych, inne dla przeliczalnych, a jeszcze inne dla nieprzeliczalnych. Nierozstrzygalne na gruncie arytmetyki PA zdanie Parisa-Harringtona odwołuje się do twierdzeń podziałowych.

3 Aksjomaty ekstremalne: aspekty kognitywne

3.1 Modele zamierzone

Współczesne ogólne prace dotyczące aksjomatów ekstremalnych są nieliczne: Hintikka 1986, 1991, Schiemer 2010a, 2010b. Kształtowania się pojęć zupełności i kategoryczności dotyczą np. prace Awodey, Reck 2002a, 2002b, Corcoran 1980, 1981.

Wyniki logiczne i matematyczne dotyczące modeli teorii matematycznych (głównie twierdzenia limitacyjne) wskazują, między innymi, na pragmatyczne uwarunkowania pojęcia *model zamierzony*. W większości przypadków modeli zamierzonych nie można scharakteryzować ani syntaktycznie, ani semantycznie.

Współczesna teoria modeli (umownie: od twierdzenia Morleya z 1965 roku) skupia się głównie na badaniach dotyczących definiowalności. Charakteryzuje się także np. liczbę wzajem nieizomorficznych modeli.

Współcześnie bada się warunki, przy których elementarna równoważność implikuje izomorfizm (własność Fraenkla-Carnapa, np.: George 2006).

Związane z modelami zamierzonymi jest rozważanie *punktów widzenia* w teorii mnogości (Borelowskiego, konstruktywnego, predykatywnego). Pisze o tym Friedman, zastanawiając się nad kwestią, na ile za zjawiska niezupełności odpowiedzialne są obiekty *patologiczne*. Gdy np. ograniczymy się do zbiorów i odwzorowań Borelowskich, to pewne ważne zdania teorii mnogości, które są niezależne od aksjomatów, uzyskują dla takich zbiorów określoną wartość logiczną.

3.2 Intuicja matematyczna

Zwerbalizowane intuicje. Ponieważ aksjomaty ekstremalne miały dotyczyć jednoznacznej charakterystyki modeli zamierzonych, a modele zamierzone są jakoś wyróżnione poprzez intuicyjne przekonania o nich żywione, więc refleksja nad aksjomatami ekstremalnymi nie może pominąć uwzględnienia intuicji matematycznych. Chcemy rozumieć intuicje matematyczne jako zwerbalizowane przekonania (dotyczące obiektów matematycznych i ich własności). Przekonania te mogą być po części uzasadnione dotychczas zgromadzoną wiedzą matematyczną.

Ustalanie standardów. Modele zamierzone wiążą się z takimi pojęciami, jak: standard, normalność, naturalność. Ustalanie standardów matematycznych dokonuje się m.in. poprzez twierdzenia o klasyfikacji i reprezentacji, badanie niezmienników, sprowadzanie obiektów do postaci normalnych (kanonicznych, standardowych, naturalnych).

Źródła intuicji: uposażenie poznawcze, przymus symboliczny, empiria. Niewątpliwie, przekonania intuicyjne jakoś wywodzą się z doświadczenia potocznego i są po części zdeterminowane ludzkim uposażeniem poznawczym. Źródłem intuicji matematycznych są także przekonania narzucane nam w procesie edukacyjnego przymusu symbolicznego. Wreszcie, źródeł intuicji dopatrywać się można również w obserwacjach i eksperymentach empirycznych.

Dynamika intuicji: paradoksy, patologie. W odróżnieniu od intuicji doświadczenia potocznego, intuicje matematyczne charakteryzują się większą zmiennością. Przyczynami tej zmienności (oprócz, oczywiście, kumulacji wiedzy matematycznej) są m.in.: paradoksy napotykane w dziejach matematyki oraz patologie, pojawiające się samorzutnie (np.: liczby ujemne oraz urojone), bądź specjalnie konstruowane (np.: liczne konstrukcje w topologii ogólnej). Ten drugi typ patologii jest oznaką żywotności i krzepy matematyki. Obiekty patologiczne konstruujemy specjalnie, dla ukazania zasięgu obowiązywania twierdzeń lub dla wysubtelnienia intuicji dotyczących rozważanych pojęć.

Pułapki i błędy intuicji. Dowodzenie jest potwierdzaniem intuicji. W kontekście odkrycia intuicja poprzedza dowód. Ostatecznym arbitrem jest jednak zawsze dedukcja. Intuicje mogą być zwodnicze, prowadzić do błędów matematycznych, niedozwolonych uproszczeń w dowodach, fałszywych stwierdzeń, itp.

3.3 Matematyczność Przyrody

Poznanie matematyczne: wymuszone przez ontologię? Przyznajemy, że teza o matematyczności Natury (a właściwie słabsza teza o *matematyzowalności* Natury) brzmi dla nas atrakcyjnie, ale traktujemy ją jako myślenie życzeniowe. Uważamy jednak, że kontekst odkrycia w matematyce czerpie ważne inspiracje z empirii.

Agnostycyzm matematyczny. Nie chcąc arbitralnie rozstrzygać sporów w filozofii matematyki możemy, jak nam się zdaje, przyjąć stanowisko umownie nazwane *agnostycyzmem matematycznym*. Streszcza się ono w przekonaniu, że wiara (bądź niewiara) w istnienie platońskich bytów matematycznych nie ma decydującego wpływu na praktykę badawczą matematyków.

Bibliografia

Awodey, S. Reck, E.H. 2002a. Completeness and Categoricity. Part I: Nineteenth-century Axiomatics to Twentieth-century Metalogic. *History and Philosophy of Logic* **23**, 1–30.

Awodey, S. Reck, E.H. 2002b. Completeness and Categoricity. Part II: Twentieth-century Metalogic to Twenty-first-Century Semantics. *History and Philosophy of Logic* **23**, 77–94.

Bagaria, J. 2005. Natural Axioms of Set Theory and the Continuum Problem. W: P. Hájek, L.V. Villanueva, D. Westerståhl (red.) *Proceedings of the 12th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science* Kings College Publications, London

R. Baer, R. 1928. Über ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre. *Mathematische Zeitschrift* **27**, 536–539.

Baldus, R. 1928. Zur Axiomatik der Geometrie I. Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom. *Mathematische Annalen* **100**, 321–333.

Bernays, P. 1955. Betrachtungen über das Vollständigkeitsaxiom und verwandte Axiome. *Mathematische Zeitschrift* **63**, 219–229.

Błaszczyk, P. 2007. *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda "Stetigkeit und irrationale Zahlen"*. Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków.

Borsuk, K., Szmielew, W. 1975. *Podstawy geometrii*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Carnap, R. 1930. Bericht über Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik. *Erkenntnis* **1**, 303–307.

Carnap, R. Bachmann, F. 1936. Über Extremalaxiome. *Erkenntnis* **6**, 166–188.

Corcoran, J. 1980. Categoricity. *History and Philosophy of Logic*, vol. **1**, 1980, 187–207.

Corcoran, J. 1981. From Categoricity to Completeness. *History and Philosophy of Logic* **2**, 113–119.

Fraenkel, A.A., Bar-Hillel, Y.,Levy. 1973. *Foundations of set theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam London.

Gaifman, H. 2004. Nonstandard models in a broader perspective. In: Ali Enayat, Roman Kossak (eds.) *Nonstandard Models in Arithmetic and Set Theory.* AMS Special Session Nonstandard Models of Arithmetic and Set Theory, January 15–16, 2003, Baltimore, Maryland, *Contemporary Mathematics* **361**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1–22.

George, B. 2006. Second-Order Characterizable Cardinals and Ordinals. *Studia Logica* Volume **84**, Number **3**, 425–449.

Hintikka, J. 1986. Extremality assumptions in the Foundations of Mathematics. *Philosophy of Science Association*, **2**, 247–252.

Hintikka, J. 1991. Carnap, the universality of language and extremality axioms. *Erkenntnis* **35**, **1–3**, 325–336.

Lindenbaum, A., Tarski, A. 1936. Über die Beschränkheit der Ausdruckmittel deduktiver Theorien. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* **7**, 1934–1935, 15–22.

Mostowski, A. 1967. O niektórych nowych wynikach meta-matematycznych dotyczących teorii mnogości. *Studia Logica* **20**, 99–116.

Myhill, J. 1952. The hypothesis that all classes are nameable. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 38, 979).

Schiemer, G. 2010a. Fraenkel's Axiom of Restriction: axiom choice, intended models, and categoricity. W: B. Löwe and T. Müller (Eds.) *Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*. College Publications, London, 307–340.

Schiemer, G. 2010b. *Carnap's early semantics*. PhD Dissertation, Universität Wien.

Suszko, R. 1951. Canonic axiomatic systems. *Studia Philosophica* **IV**, 301–330.

Tennant, N. 2000. Deductive versus Expressive Power: a Pre-Gödelian Predicament. *Journal of Philosophy* **XCVII**, 257–277.

Woodin, W.H. 1988. Supercompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **85**, 6587–6591.