JĘZYKOZNAWSTWO I NAUKI O INFORMACJI, ROK I

Logika Matematyczna: egzamin pisemny 29 czerwca 2015

Imię i Nazwisko: ..... DZIARSKIE SKRZATY

Wybierz dokładnie cztery z poniższych pięciu zadań i spróbuj je rozwiązać. Za każde poprawnie rozwiązane zadanie możesz otrzymać co najwyżej sto punktów. Uzyskanie co najmniej 200 punktów oznacza zdany egzamin. O liczbie przyznanych punktów oraz ocenie decyduję ja.

1. Udowodnij, że jest tezą systemu założeniowego klasycznego rachunku zdań:

$$(((p \to s) \wedge \neg r) \to \neg q) \to (((p \to s) \wedge q) \to r).$$

2. Pokaż metodą dowodów założeniowych, że następujący zbiór formuł jest sprzeczny:

$$\{\, p \to q,\ \ r \to s,\ \ \neg q \vee r,\ \ p \wedge \neg s \,\}$$

3. Dowolną poprawną metodą ustal, czy wniosek ***Drink nie jest zmieszany, o ile jest wstrząśnięty*** wynika logicznie z przesłanki: ***Drink jest wstrząśnięty, ale nie jest zmieszany***.

4. Ustal, czy następujące zdania tworzą zbiór tablicowo sprzeczny:

Każda Maskuła jest Plątwą. Co najmniej jedna Plątwa jest Ożuchą. Pewna Ożucha jest Maskułą.

Jeśli tworzą, to napisz odpowiedź pełnym zdaniem. Jeśli nie, to zbuduj interpretację, w której prawdziwe są te zdania.

5. Ustal, czy wniosek $\exists x \forall y\ (P(x,y) \to P(y,x))$ wynika tablicowo z przesłanki:

$$\forall x \forall y\ (P(x,y) \to P(y,x)) \wedge \exists x \forall y\ P(x,y).$$

PISZ I RYSUJ WYRAŹNIE. NIE PRZEMILCZAJ CZYNIONYCH ZAŁOŻEŃ. ODPOWIEDZI UZASADNIAJ. ODPOWIEDZI PODAWAJ PEŁNYM POPRAWNYM SKŁADNIOWO ZDANIEM.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM

JĘZYKOZNAWSTWO I NAUKI O INFORMACJI, ROK I

Logika Matematyczna: egzamin pisemny 29 czerwca 2015

Imię i Nazwisko: ..... ZWINNE ELFY

Wybierz dokładnie cztery z poniższych pięciu zadań i spróbuj je rozwiązać. Za każde poprawnie rozwiązane zadanie możesz otrzymać co najwyżej sto punktów. Uzyskanie co najmniej 200 punktów oznacza zdany egzamin. O liczbie przyznanych punktów oraz ocenie decyduję ja.

1. Udowodnij, że jest tezą systemu założeniowego klasycznego rachunku zdań:

$$(((p \to s) \wedge q) \to r) \to (((p \to s) \wedge \neg r) \to \neg q).$$

2. Pokaż metodą dowodów założeniowych, że następujący zbiór formuł jest sprzeczny:

$$\{\ p \vee \neg q,\ \ r \to q,\ \ \neg(s \wedge \neg r),\ \ s \wedge \neg p\ \}$$

3. Dowolną poprawną metodą ustal, czy wniosek ***Drink jest zmieszany, o ile nie jest wstrząśnięty*** wynika logicznie z przesłanki: ***Drink jest wstrząśnięty, ale nie jest zmieszany***.

4. Ustal, czy następujące zdania tworzą zbiór tablicowo sprzeczny:

Pewna Ożucha jest Plątwą. Wszystkie Maskuły są Ożuchami. Wśród Plątw jest Maskuła.

Jeśli tworzą, to napisz odpowiedź pełnym zdaniem. Jeśli nie, to zbuduj interpretację, w której prawdziwe są te zdania.

5. Ustal, czy wniosek $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x,x))$ wynika tablicowo z przesłanki:

$$\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \to Q(y,x))).$$

PISZ I RYSUJ WYRAŹNIE. NIE PRZEMILCZAJ CZYNIONYCH ZAŁOŻEŃ. ODPOWIEDZI UZASADNIAJ. ODPOWIEDZI PODAWAJ PEŁNYM POPRAWNYM SKŁADNIOWO ZDANIEM.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM

1. Dowód założeniowy formuły: $(((p \to s) \wedge \neg r) \to \neg q) \to (((p \to s) \wedge q) \to r)$. Budujemy dowód nie wprost:

1.	$(((p \to s) \wedge \neg r) \to \neg q)$	zał.
2.	$(p \to s) \wedge q$	zał.
3.	$\neg r$	z.d.n.
4.	q	OK: 2
5.	$\neg\neg q$	DN: 4
6.	$\neg((p \to s) \wedge \neg r)$	MT: 1,5
7.	$\neg(p \to s) \vee \neg\neg r$	NK: 6
8.	$\neg\neg\neg r$	DN: 3
9.	$\neg(p \to s)$	OA: 7,8
10.	$p \to s$	OK: 2
11.	$\perp$	9,10

Ponieważ w dowodzie nie wprost uzyskano parę formuł wzajem sprzecznych, więc badana formuła jest tezą systemu założeniowego klasycznego rachunku zdań.

Inny przykład dowodu nie wprost rozważanej formuły:

1.	$(((p \to s) \wedge \neg r) \to \neg q)$	zał.
2.	$(p \to s) \wedge q$	zał.
3.	$\neg r$	z.d.n.
4.	$p \to s$	OK: 2
5.	$(p \to s) \wedge \neg r$	DK: 4,3
6.	$\neg q$	RO: 1,5
7.	q	OK: 2
8.	$\perp$	6,7

2. Pokazujemy, że można wyprowadzić sprzeczność z podanych formuł:

1.	$p \to q$	założenie
2.	$r \to s$	założenie
3.	$\neg q \vee r$	założenie
4.	$p \wedge \neg s$	założenie
5.	p	OK: 4
6.	$\neg s$	OK: 4
7.	q	RO: 1,5
8.	$\neg r$	MT: 2,6
9.	$\neg q$	OA: 3,8
10.	$\perp$	sprzeczność: 7, 9.

Można jeszcze inaczej, np. wykorzystując tezę systemu założeniowego $(\neg q \vee r) \to (q \to r)$ oraz wtórną regułę Sylogizmu Hipotetycznego $\frac{p \to q,\ q \to r}{p \to r}$:

1.	$p \to q$	założenie
2.	$r \to s$	założenie
3.	$\neg q \vee r$	założenie
4.	$p \wedge \neg s$	założenie
5.	$(\neg q \vee r) \to (q \to r)$	teza wcześniej udowodniona
6.	$q \to r$	RO: 5, 3
7.	$p \to r$	reguła Sylogizmu Hipotetycznego: 1, 6
8.	p	OK: 4
9.	r	RO: 7, 8
10.	s	RO: 2, 9
11.	$\neg s$	OK: 4
12.	$\perp$	sprzeczność: 10, 11.

3. Znajdujemy struktury składniowe przesłanki i wniosku:

1. *Drink jest wstrząśnięty* – p
2. *Drink jest zmieszany* – q
3. Przesłanka: $p \wedge \neg q$
4. Wniosek: $p \to \neg q$.

Mogłaś wykorzystać każdą z następujących metod:

1. dowody założeniowe
2. tablice analityczne
3. metodę 0–1
4. skróconą metodę 0–1.

3.1. Dowody założeniowe.

Wystarczy pokazać, że formuła $(p \wedge \neg q) \to (p \to \neg q)$ jest tezą systemu założeniowego rachunku zdań, co jest zadaniem trywialnym:

1.	$p \wedge \neg q$	założenie
2.	p	założenie
3.	$\neg q$	OK: 1.

Skoro $(p \wedge \neg q) \to (p \to \neg q)$ jest tezą systemu założeniowego rachunku zdań, to – na mocy pełności metody założeniowej – formuła $(p \wedge \neg q) \to (p \to \neg q)$ jest tautologią KRZ, a to z kolei oznacza – na mocy semantycznego twierdzenia o dedukcji wprost – że formuła $p \to \neg q$ wynika logicznie z formuły $p \wedge \neg q$.

3.2. Tablice analityczne.

Tablica analityczna dla formuły $\neg((p \wedge \neg q) \to (p \to \neg q))$:

$$
\begin{array}{c}
(0)\ \neg((p \wedge \neg q) \to (p \to \neg q))\ ^{1.\neg\to} \\
| \\
(1_g)\ p \wedge \neg q\ ^{2.\wedge} \\
| \\
(1_d)\ \neg(p \to \neg q)\ ^{3.\neg\to} \\
| \\
(2_g)\ p \\
| \\
(2_d)\ \neg q \\
| \\
(3_g)\ p \\
| \\
(3_d)\ \neg\neg q \\
| \\
\times_{2_d,3_d}
\end{array}
$$

Tablica jest zamknięta, co oznacza (na mocy trafności i pełności metody tablic analitycznych w KRZ), że formuła $(p \wedge \neg q) \to (p \to \neg q)$ jest tautologią KRZ. A to z kolei oznacza, na mocy semantycznego twierdzenia o dedukcji wprost w KRZ, że formuła $p \to \neg q$ wynika logicznie z formuły $p \wedge \neg q$.

3.3. Metoda 0–1.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \to \neg q$	$(p \wedge \neg q) \to (p \to \neg q)$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1

Formuła $(p \wedge \neg q) \to (p \to \neg q)$ przyjmuje wartość 1 przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych. Na mocy semantycznego twierdzenia o dedukcji wprost w KRZ, formuła $p \to \neg q$ wynika logicznie z formuły $p \wedge \neg q$.

3.4. Skrócona metoda 0–1.

1. Przypuśćmy, że istnieje wartościowanie w zmiennych zdaniowych takie, że $Val(p \wedge \neg q, w) = 1$ oraz $Val(p \to \neg q, w) = 0$.
2. Skoro $Val(p \wedge \neg q, w) = 1$, to $Val(p, w) = 1$ oraz $Val(\neg q, w) = 1$, czyli $Val(q, w) = 0$.
3. Skoro $Val(p \to \neg q, w) = 0$, to $Val(p, w) = 1$ oraz $Val(\neg q, w) = 0$, czyli $Val(q, w) = 1$.
4. Mielibyśmy zatem: $Val(q, w) = 0$ oraz $Val(q, w) = 1$, co jest niemożliwe.
5. W konsekwencji, nie istnieje wartościowanie w zmiennych zdaniowych takie, że $Val(p \wedge \neg q, w) = 1$ oraz $Val(p \to \neg q, w) = 0$.
6. Oznacza to, że przy każdym wartościowaniu w zmiennych zdaniowych takim, że $Val(p \wedge \neg q, w) = 1$ mamy: $Val(p \to \neg q, w) = 1$.
7. Na mocy definicji, oznacza to, że formuła $p \to \neg q$ wynika logicznie z formuły $p \wedge \neg q$.

4. Wprowadźmy oznaczenia:

- $P(x)$ – x jest Plątwą
- $M(x)$ – x jest Maskułą
- $O(x)$ – x jest Ożuchą.

Rozważane zdania mają następujące schematy:

$$\exists x\ (P(x) \wedge O(x))$$
$$\forall x\ (M(x) \to P(x))$$
$$\exists x\ (O(x) \wedge M(x))$$

Budujemy tablicę analityczną rozpoczynającą się od tych formuł:

$\exists x\ (P(x) \wedge O(x))\ ^{1.\checkmark a}$

$\forall x\ (M(x) \to P(x))\ ^{3.*a}\ ^{4.*b}$

$\exists x\ (O(x) \wedge M(x))\ ^{2.\checkmark b}$

(1) $P(a) \wedge O(a)\ ^{5.\wedge}$

(2) $O(b) \wedge M(b)\ ^{6.\wedge}$

(3) $M(a) \to P(a)\ ^{8.\to}$

(4) $M(b) \to P(ab)\ ^{7.\to}$

(5_g) $P(a)$

(5_d) $O(a)$

(6_g) $O(b)$

(6_d) $M(b)$

(7_l) $\neg M(b)$ — $\times_{6_d,7_l}$

(7_p) $P(b)$

(8_l) $\neg M(a)$ — ♣

(8_p) $P(a)$ — ♠

Tablica ma dwie gałęzie otwarte, a zatem rozważane zdania tworzą zbiór tablicowo niesprzeczny. Są one wszystkie prawdziwe w następujących interpretacjach (odpowiadających gałęziom otwartym powyższej tablicy):

♣	P	M	O
a	+	−	+
b	+	+	+

♠	P	M	O
a	+	?	+
b	+	+	+

5. Budujemy tablicę analityczną dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku, czyli dla:
$\forall x \forall y\ (P(x,y) \to P(y,x)) \wedge \exists x \forall y\ P(x,y)$ oraz $\neg \exists x \forall y\ (P(x,y) \to P(y,x))$:

$\forall x \forall y\ (P(x,y) \to P(y,x)) \wedge \exists x \forall y\ P(x,y)\ ^{1.\wedge}$

$\neg \exists x \forall y\ (P(x,y) \to P(y,x))\ ^{3.*a}$

(1_g) $\forall x \forall y\ (P(x,y) \to P(y,x))\ ^{4.*a}$

(1_d) $\exists x \forall y\ P(x,y)\ ^{2.\checkmark a}$

(2) $\forall y\ P(a,y)$

(3) $\neg \forall y\ (P(a,y) \to P(y,a))$

(4) $\forall y\ (P(a,y) \to P(y,a))$

$\times_{3,4}$

Wszystkie gałęzie tablicy dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku są zamknięte, a to oznacza, że wniosek wynika tablicowo z przesłanek.

1. Dowód założeniowy formuły: $(((p \to s) \wedge q) \to r) \to (((p \to s) \wedge \neg r) \to \neg q)$. Budujemy dowód nie wprost:

1.	$((p \to s) \wedge q) \to r$	zał.
2.	$(p \to s) \wedge \neg r$	zał.
3.	$\neg\neg q$	z.d.n.
4.	$\neg r$	OK: 2
5.	$\neg((p \to s) \wedge q)$	MT: 1,4
6.	$\neg(p \to s) \vee \neg q$	NK: 5
7.	$\neg(p \to s)$	OA: 6,3
8.	$p \to s$	OK: 2
9.	$\perp$	7,8

Ponieważ w dowodzie nie wprost uzyskano parę formuł wzajem sprzecznych, więc badana formuła jest tezą systemu założeniowego klasycznego rachunku zdań.

Inny przykład dowodu nie wprost rozważanej formuły:

1.	$((p \to s) \wedge q) \to r$	zał.
2.	$(p \to s) \wedge \neg r$	zał.
3.	$\neg\neg q$	z.d.n.
4.	q	ON: 3
5.	$p \to s$	OK: 2
6.	$(p \to s) \wedge q$	DK: 5,4
7.	r	RO: 1,6
8.	$\neg r$	OK: 2
9.	$\perp$	7,8

2. Pokazujemy, że można wyprowadzić sprzeczność z podanych formuł:

1.	$p \vee \neg q$	założenie
2.	$r \to q$	założenie
3.	$\neg(s \wedge \neg r)$	założenie
4.	$s \wedge \neg p$	założenie
5.	s	OK: 4
6.	$\neg p$	OK: 4
7.	$\neg q$	OA: 1,6
8.	$\neg r$	MT: 2,7
9.	$s \wedge \neg r$	DK: 5,8
10.	$\perp$	sprzeczność: 3, 9.

Można jeszcze inaczej, np. stosując do założenia 3 regułę NK negowania koniunkcji:

1.	$p \vee \neg q$	założenie
2.	$r \to q$	założenie
3.	$\neg(s \wedge \neg r)$	założenie
4.	$s \wedge \neg p$	założenie
5.	$\neg s \vee \neg\neg r$	NK: 3
6.	s	OK: 4
7.	$\neg\neg s$	DN: 6
8.	$\neg\neg r$	OA: 5, 7
9.	r	ON: 9
10.	q	RO: 2, 9
11.	$\neg p$	OK: 4
12.	$\neg q$	OA: 1, 11
13.	$\perp$	sprzeczność: 10, 12.

3. Znajdujemy struktury składniowe przesłanki i wniosku:

1. *Drink jest wstrząśnięty* – p
2. *Drink jest zmieszany* – q
3. Przesłanka: $p \wedge \neg q$
4. Wniosek: $\neg p \to q$.

Mogłaś wykorzystać każdą z następujących metod:

1. dowody założeniowe
2. tablice analityczne
3. metodę 0–1
4. skróconą metodę 0–1.

3.1. Dowody założeniowe.

Wystarczy pokazać, że $(p \wedge \neg q) \to (\neg p \to q)$ jest tezą systemu założeniowego rachunku zdań, co jest zadaniem banalnym:

1.	$p \wedge \neg q$	założenie
2.	$\neg p$	założenie
3.	p	OK: 1
4.	q	reguła Dunsa Scotusa $\frac{p,\ \neg p}{q}$: 2, 3.

Skoro $(p \wedge \neg q) \to (\neg p \to q)$ jest tezą systemu założeniowego rachunku zdań, to – na mocy pełności metody założeniowej – formuła $(p \wedge \neg q) \to (\neg p \to q)$ jest tautologią KRZ, a to z kolei oznacza – na mocy semantycznego twierdzenia o dedukcji wprost – że formuła $\neg p \to q$ wynika logicznie z formuły $p \wedge \neg q$.

3.2. Tablice analityczne.

Tablica analityczna formuły: $\neg((p \wedge \neg q) \to (\neg p \to q))$

$$
\begin{array}{c}
(0)\ \neg((p \wedge \neg q) \to (\neg p \to q))\ ^{1.\neg\to} \\
| \\
(1_g)\ p \wedge \neg q\ ^{2.\wedge} \\
| \\
(1_d)\ \neg(\neg p \to q)\ ^{3.\neg\to} \\
| \\
(2_g)\ p \\
| \\
(2_d)\ \neg q \\
| \\
(3_g)\ \neg p \\
| \\
(3_d)\ \neg q \\
| \\
\times_{2_g,3_g}
\end{array}
$$

Tablica jest zamknięta, co oznacza (na mocy trafności i pełności metody tablic analitycznych w KRZ), że formuła $(p \wedge \neg q) \to (\neg p \to q)$ jest tautologią KRZ. A to z kolei oznacza, na mocy semantycznego twierdzenia o dedukcji wprost w KRZ, że formuła $\neg p \to q$ wynika logicznie z formuły $p \wedge \neg q$.

3.3. Metoda 0–1.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \to q$	$(p \wedge \neg q) \to (\neg p \to q)$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1

Formuła $(p \wedge \neg q) \to (\neg p \to q)$ przyjmuje wartość 1 przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych. Na mocy semantycznego twierdzenia o dedukcji wprost w KRZ, formuła $\neg p \to q$ wynika logicznie z formuły $p \wedge \neg q$.

3.4. Skrócona metoda 0–1.

1. Przypuśćmy, że istnieje wartościowanie w zmiennych zdaniowych takie, że $Val(p \wedge \neg q, w) = 1$ oraz $Val(\neg p \to q, w) = 0$.
2. Skoro $Val(p \wedge \neg q, w) = 1$, to $Val(p, w) = 1$ oraz $Val(\neg q, w) = 1$, czyli $Val(q, w) = 0$.
3. Skoro $Val(\neg p \to q, w) = 0$, to $Val(\neg p, w) = 1$ oraz $Val(q, w) = 0$, czyli $Val(p, w) = 0$.
4. Mielibyśmy zatem: $Val(p, w) = 1$ oraz $Val(p, w) = 0$, co jest niemożliwe.
5. W konsekwencji, nie istnieje wartościowanie w zmiennych zdaniowych takie, że $Val(p \wedge \neg q, w) = 1$ oraz $Val(\neg p \to q, w) = 0$.
6. Oznacza to, że przy każdym wartościowaniu w zmiennych zdaniowych takim, że $Val(p \wedge \neg q, w) = 1$ mamy: $Val(\neg p \to q, w) = 1$.
7. Na mocy definicji, oznacza to, że formuła $\neg p \to q$ wynika logicznie z formuły $p \wedge \neg q$.

4. Wprowadźmy oznaczenia:

- $P(x)$ – x jest Plątwą
- $M(x)$ – x jest Maskułą
- $O(x)$ – x jest Ożuchą.

Rozważane zdania mają następujące schematy:

$$\forall x\ (M(x) \to O(x))$$
$$\exists x\ (O(x) \wedge P(x))$$
$$\exists x\ (P(x) \wedge M(x))$$

Budujemy tablicę analityczną rozpoczynającą się od tych formuł:

$\forall x\ (M(x) \to O(x))\ ^{3.*a\ \ 4.*b}$

$\exists x\ (O(x) \wedge P(x))\ ^{1.\surd a}$

$\exists x\ (P(x) \wedge M(x))\ ^{2.\surd b}$

(1) $O(a) \wedge P(a)\ ^{5.\wedge}$

(2) $P(b) \wedge M(b)\ ^{6.\wedge}$

(3) $M(a) \to O(a)\ ^{8.\to}$

(4) $M(b) \to O(b)\ ^{7.\to}$

(5_g) $O(a)$

(5_d) $P(a)$

(6_g) $P(b)$

(6_d) $M(b)$

(7_l) $\neg M(b)$ — $\times_{6_d,7_l}$

(7_p) $O(b)$

(8_l) $\neg M(a)$ — ♣

(8_p) $O(a)$ — ♠

Tablica ma dwie gałęzie otwarte, a zatem rozważane zdania tworzą zbiór tablicowo niesprzeczny. Są one wszystkie prawdziwe w następujących interpretacjach (odpowiadających gałęziom otwartym powyższej tablicy):

♣	P	M	O
a	+	−	+
b	+	+	+

♠	P	M	O
a	+	?	+
b	+	+	+

5. Budujemy tablicę analityczną dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku, czyli dla:
$\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \to Q(y,x)))$ oraz $\neg(\exists x\ (P(x) \wedge Q(x,x)))$:

$\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \to Q(y,x)))\ ^{1.\surd a}$

$\neg(\exists x\ (P(x) \wedge Q(x,x)))\ ^{3.*a}$

(1) $P(a) \wedge \forall y\ (P(y) \to Q(y,a))\ ^{2.\wedge}$

(2_g) $P(a)$

(2_d) $\forall y\ (P(y) \to Q(y,a))\ ^{4.*a}$

(3) $\neg(P(a) \wedge Q(a,a))\ ^{5.\neg\wedge}$

(4) $P(a) \to Q(a,a)\ ^{6.\to}$

(5_l) $\neg P(a)$ — $\times_{1_g,5_l}$

(5_p) $\neg Q(a,a)$

(6_l) $\neg P(a)$ — $\times_{1_g,6_l}$

(6_p) $Q(a,a)$ — $\times_{5_p,6_p}$

Wszystkie gałęzie tablicy dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku są zamknięte, a to oznacza, że wniosek wynika tablicowo z przesłanek.