Naukoznawstwo

Michał Lipnicki
Zakład Logiki Stosowanej UAM
michal.lipnicki@amu.edu.pl

Logika formalna a metodologia nauk

Za Jerzym Kmitą przyjmiemy, że metodologia nauk opiera się na pojęciach i ustaleniach *logicznej teorii języka*. W związku z tym, zanim będziemy mogli kontynuować zgłębianie świata metodologii, zapoznamy się z podstawowymi zagadnieniami z zakresu składni i semantyki logicznej.

Zagadnienia omawiane na dzisiejszym wykładzie są w przemożnej większości zaczerpnięte z książki: Kmita, J., *Wykłady z logiki i metodologii nauk*, Warszawa 1975.

Logiczna teoria języka

Logiczna teoria języka jest to próba rekonstrukcji tej wiedzy, która jest wystarczająca i niezbędna do wykonania czynności językowej, której sensem jest zakomunikowanie określonego faktu.

Reguły formowania

Reguły formowania, to część kompetencji językowej, określająca reguły budowania zdań. Kompetencja ta jest wystarczająca i niezbędna do wytworzenia dowolnego wyrażenia językowego będącego zdaniem oznajmującym języka *J*.

Ponadto kompetencja ta jest również wystarczająca i niezbędna dla zinterpretowania danej sekwencji znaków jako zdania oznajmującego języka *J*.

Reguły formowania

W skład *reguł formowania* danego języka *J* wchodzą reguły:

- wyznaczające klasę prostych wyrażeń niezdaniowych języka *J* – reguły ustalające *słownik* języka *J*;
- reguły ustalające kategorie gramatyczne zdań oraz elementów dystynktywnych zdań;
- reguły ustalające sposób budowania zdań z wyrażeń o określonych kategoriach gramatycznych.

Pojęcie zdania

Terminem *zdanie* określa się w logice tylko zdania oznajmujące.

Syntaktyczne określenie zdania:

Z jest zdaniem języka *J* wtedy i tylko wtedy, gdy *Z* jest wyrażeniem o określonej strukturze, przepisanej przez reguły składni języka *J*.

Semantyczne określenie zdania:

Z jest zdaniem języka *J* wtedy i tylko wtedy, gdy jest w *J* prawdziwe lub fałszywe (posiada wartość logiczną).

Pragmatyczne określenie zdania:

Z jest zdaniem języka *J* wtedy i tylko wtedy, gdy *Z* wyraża w *J* jakąś myśl (*sąd* w sensie logicznym).

Pojęcie terminu jednostkowego

Terminem jednostkowym nazywamy imiona własne oraz deskrypcje przedmiotów indywidualnych.

Przykłady terminów jednostkowych to:

- Poznań,
- Lech Kaczyński,
- Tatry,
- aktualny prezydent Polski,
- samochód, którym podróżuje aktualny prezydent Polski.

Termin jednostkowy jest nazwą indywidualnego przedmiotu (może to być przedmiot fikcyjny).

W języku potocznym rolę terminów jednostkowych odgrywają często zaimki.

Kategorie gramatyczne

Kategorią gramatyczną wyrażenia *W* języka *J* nazywamy zbiór tych wszystkich wyrażeń języka *J*, którymi można zastąpić wyrażenie *W* w dowolnym zdaniu *Z*, uzyskując na powrót zdanie.

Wyrażenia należące do tej samej kategorii gramatycznej są nawzajem zastępowalne.

Na podstawie kategorii gramatycznej *zdań* i *terminów jednostkowych* można określić wszystkie pozostałe kategorie gramatyczne.

Kategorie gramatyczne

Predykat – jest to wyrażenie, które po dołączeniu do niego terminu jednostkowego daje zdanie.

W zdaniu „*Piotr idzie bardzo szybko*”, termin jednostkowy „*Piotr*” tworzy zdanie z predykatem jednoargumentowym „*idzie bardzo szybko*”.

Predykat *n*-argumentowy tworzy zdanie z *n* terminami jednostkowymi.

Kategorie gramatyczne

Oznaczmy kategorię zdania przez „*z*”, a kategorię terminów jednostkowych przez „*t*”.

Indeksy pozostałych kategorii gramatycznych są kombinacjami dwóch powyższych.

Chcąc ustalić kategorię wyrażenia W_1 rozpisujemy „ułamek”, którego mianownikiem jest indeks kategorii wyrażenia W_2, z którym W_1 tworzy wyrażenie W_3, a w liczniku indeks kategorii wyrażenia W_3.

Kategorie gramatyczne

Indeks kategorii gramatycznej predykatu jednoargumentowego ma postać *z/t,* mówi nam on, że predykat tworzy zdania z jednym terminem jednostkowym. Analogicznie predykat dwuargumentowy będzie miał indeks *z/tt*, ponieważ tworzy on zdanie z dwoma terminami jednostkowymi.

Funktory, są to wyrażenia, które z terminami jednostkowymi tworzą nowe terminy jednostkowe. Funktory mogą być jednoargumentowe (*t/t*) lub dwu i więcej argumentowe (*t/tt, t/ttt,* itd.).

Kategorie gramatyczne

Spójniki zdaniowe – wyrażenia o indeksie kategorii gramatycznej postaci: *z/z*, *z/zz*, *z/zzz*, itd.

Argumentami spójników są zdania.

Spójnikiem od jednego zdania (*z/z*) jest np. wyrażenie „*Nie jest prawdą, że*”. Spójnikiem od dwóch zdań (*z/zz*) „*jeżeli…, to…*”.

Kategorie gramatyczna

Kwantyfikatory, są to wyrażenia, które wraz z *predykatami* tworzą zdanie. Ich indeks k.g. ma postać (*z//z/t*).

Parafraza kwantyfikatorowa – przekształcanie potocznych zdań skwantyfikowanych na zdania zawierające kwantyfikatory.

Każdy student uczy się pilnie.

Ma następującą postać skwantyfikowaną:

$\forall x$ (jeżeli x jest studentem, to x uczy się pilnie).

Nieskwantyfikowane zdania pojedyncze nazwa się *zdaniami atomicznymi* (atomowymi). Nieskwantyfikowane zdania złożone nazywa się *zdaniami molekularnymi.*

Kategorie gramatyczne

Wszystkie scharakteryzowane dotychczas wyrażenia zalicza się do *stałych*.

Z kolei *zmienne* są to symbole, które reprezentują dowolne wyrażenie stałe o określonej kategorii gramatycznej.

Zmienne występują w obrębie predykatów (*x* jest ojcem *y*) lub funktorów (ojciec *x*).

Zmienną nazywamy *związaną* przez kwantyfikator, jeżeli znajduje się ona w zasięgu kwantyfikatora.

Zmienna niezwiązana kwantyfikatorem, to *zmienna wolna*.

Poprawnie skonstruowane zdanie zawierające zmienne musi mieć wszystkie zmienne związane.

Kategorie gramatyczne

Zmienne mogą być *indywiduowe,* jeżeli reprezentują terminy jednostkowe; *zdaniowe*, jeżeli reprezentują zdania; *predykatywne*, jeżeli reprezentują predykaty.

W dalszej części wykładu do reprezentacji zmiennych indywiduowych będziemy używać małych liter *x, y, z;* w celu reprezentacji zmiennych zdaniowych – małych liter *p, q, s, r;* natomiast zmienne predykatywne będą reprezentowane przez wielkie litery *F*, *P, R*, *S*, itd.

Kategorie gramatyczne

Sprawdzając, czy wyrażenie *W* języka *J* jest zdaniem oznajmującym *Z* tego języka postępujemy następująco:

1. Wypisujemy sekwencję indeksów przysługujących poszczególnym wyrażeniom wchodzącym w skład *W*;
2. Redukujemy ze sobą indeksy;
3. Jeżeli po redukcji indeksów wyrażenia *W* uzyskamy indeks *z* znaczy to, że wyrażenie jest zdaniem oznajmującym.

Kategorie gramatyczne

Weźmy zdanie: *Jan je bardzo łapczywie i (Jan) się zakrztusi.*

Po przypisaniu indeksów do poszczególnych wyrażeń otrzymujemy schemat:

$$t\ \frac{z}{t}\ \ \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{z}{t}}{z}}{t}}{z}}{t}\ \ \frac{\frac{z}{t}}{\frac{z}{t}}\ \ \frac{z}{zz}\ \ t\ \ \frac{z}{t}$$

Kategorie gramatyczne

Następnie redukujemy (skracamy) indeksy – pierwsze ze zdań składowych.

$$t\ \frac{z}{t}\ \frac{\frac{\frac{z}{t}}{\frac{z}{t}}}{\frac{\frac{z}{t}}{\frac{z}{t}}}\ \frac{z}{zz}\ t\ \frac{z}{t}$$

Po redukcji otrzymujemy:

$$t\ \frac{z}{t}\ \frac{z}{zz}\ t\ \frac{z}{t}$$

Redukujemy dalej:

$$\cancel{t}\ \frac{z}{\cancel{t}}\ \frac{z}{zz}\ \cancel{t}\ \frac{z}{\cancel{t}}$$

Otrzymujemy:

$$z\ \frac{z}{zz}\ z$$

Kategorie gramatyczne

Dokonujemy dwóch ostatnich redukcji

$$z \quad \frac{z}{zz} \quad z$$

Ostatecznie otrzymujemy *z,* zdanie „*Jan je bardzo łapczywie i (Jan) się zakrztusi”* spełnia warunek nakładany na zdania oznajmujące.

Reguły dedukcyjne

Znajomość reguł formowania jest niezbędna do zakomunikowania określonego faktu, nie jest jednak wystarczająca. Nie każde zdanie oznajmujące komunikuje jakiś fakt. Weźmy pod uwagę normy:

- *Należy zawsze mówić prawdę.*
- *Żaden człowiek nie powinien zabijać drugiego.*
- *Nie pożądaj żony bliźniego swego.*

Zdania tego typu nie komunikują faktów tylko wartości.

Możemy je wyłączyć ze zbioru zdań oznajmujących uznając, że fakty komunikują tylko zdania oznajmujące nienormatywne.

Reguły dedukcyjne

Ciągle będziemy jednak mieli do czynienia z pewnymi zdaniami oznajmującymi, które nie komunikują żadnego faktu.

- *Poznań leży nad Wartą i Poznań nie leży nad Wartą.*
- *Dziś jest czwartek, jutro zaś będzie sobota.*
- *Berlin znajduje się na zachód od Poznania, ale Poznań znajduje się na południe od Berlina.*

Na mocy reguł formowania języka polskiego są to zdania oznajmujące, znajomość języka polskiego pozwala również stwierdzić, że zdania te nie komunikują żadnego faktu.

Zdania te są *kontrtezami* (w tym przypadku języka polskiego) – są one jawnie fałszywe, absurdalne.

Reguły dedukcyjne

Znajomość reguł formowania nie wystarcza do tego, aby spośród wszystkich zdań oznajmujących wydzielić te niebędące kontrtezami.

Warto zauważyć, że zaprzeczając kontrtezę danego języka otrzymujemy *tezę* tego języka.

- *Nie jest tak, że Poznań leży nad Wartą i Poznań nie leży nad Wartą.*
- *Dziś jest czwartek, jutro zaś nie będzie sobota.*
- *Berlin znajduje się na zachód od Poznania, ale Poznań nie znajduje się na południe od Berlina.*

Reguły dedukcyjne

Wiedza na temat tego, jakie zdania danego języka *J* są jego tezami jest istotna, ponieważ wiąże się ona z wiedzą jakie zdania języka *J* są jego kontrtezami.

Zbiór tez każdego języka jest wyznaczony przez *reguły dedukcyjne*. Reguły dedukcyjne są dwojakiego rodzaju:

- *aksjomatyczne* – nakazują bezwarunkowo uznawać za tezy pewne określone, prawdziwe zdania języka *J;*
- *inferencyjne* – nakazują uznawać pewne określone zdania, o ile uznane zostały pewne inne zdania. Reguły inferencyjne ustalają, jakie zdania są tezami języka *J,* jeżeli jego tezami są pewne inne zdania.

Reguły aksjomatyczne

Reguły aksjomatyczne języka *J* wyodrębniają część tez języka *J*. Albo charakteryzują one postać tych zdania albo wymieniają te zdania języka *J*, które z pewnością są jego tezami. Zdania wyodrębnione przez reguły aksjomatyczne języka *J* nazywa się *aksjomatami* języka *J*.

Reguły inferencyjne

Reguły inferencyjne języka *J* orzekają jakie zdania są jego tezami, jeśli jego tezami są już jakieś inne zdania (np. aksjomaty).

Zdanie *Z'* języka *J* będzie tezą tego języka, o ile w języku *J* występuje taka reguła inferencyjna oraz takie zdanie *Z* będące tezą tego języka, że na mocy tej reguły inferencyjnej, jeżeli zdanie *Z* jest tezą języka *J*, to jest nią też zdanie *Z'*.

W takim przypadku zdanie *Z'* jest bezpośrednią konsekwencją inferencyjną zdania *Z*.

Konsekwencja inferencyjna może również być pośrednia.

Reguły dedukcyjne

Zakładając, że aksjomatami języka polskiego są wszystkie zdania o budowie:

Jeżeli a *znajduje się na zachód od* b*, to* b *znajduje się na wschód od* a.

Wówczas aksjomatem jest zdanie:

Jeżeli Berlin znajduje się na zachód od Poznania, to Poznań znajduje się na wschód od Berlina.

Reguły dedukcyjne

Jeżeli przyjmiemy, że w języku polskim obowiązuje następująca regułą inferencyjna „Jeżeli tezą jest zdanie postaci – jeśli *p,* to *q* – to tezą jest zdanie postaci – jeżeli nie *q*, to nie *p*.”

Ustaliliśmy, że tezą jest zdanie

Jeżeli Berlin znajduje się na zachód od Poznania, to Poznań znajduje się na wschód od Berlina.

Konsekwencją inferencyjną powyższego zdania będzie zdanie

Jeżeli Poznań nie znajduje się na wschód od Berlina, to Berlin nie znajduje się na zachód od Poznania.

Reguły dedukcyjne

Języki naturalne nie posiadają wyraźnie sformułowanych reguł dedukcyjnych, możemy tylko je postulować obserwując pewne określone użycia zdań danego języka.

Sposób wyboru tez języka naturalnego może zatem przedstawiać pewne trudności.

W przypadku języków sformalizowanych wystarczy:

1. Sprawdzić, czy dane zdanie jest aksjomatem języka *J*, jeżeli jest to mamy problem z głowy.
2. Jeżeli zdanie nie jest aksjomatem języka *J*, to należy sprawdzić, czy jest ono inferencyjną konsekwencją aksjomatów tego języka.

Reguły dedukcyjne

Aby rozstrzygnąć, czy dane zdanie języka naturalnego jest jego tezą należy odwołać się do nieformalnego kryterium praktycznego.

Stawiamy pytanie, czy zdanie to jest prawdziwe tylko na mocy znaczenia zawartych w nim słów, nie zaś ze względu na jakąkolwiek inną wiedzę. Jeżeli odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, to zdanie to jest tezą języka naturalnego.

Składnia logiczna

Reguły dedukcyjne wspólnie z regułami formowania wchodzą w skład kompetencji wystarczającej i niezbędnej dla konstruowania zdań oznajmujących języka *J* oraz w skład kompetencji wystarczającej i niezbędnej do zinterpretowania danego wyrażenia języka *J,* jako zdania oznajmującego tego języka.

Część logicznej teorii języka badająca reguły formowania i reguły dedukcyjne języka lub grupy języków nazywa się *składnią logiczną*.

Reguły dedukcyjne a pojęcie znaczenia

Pozwólmy sobie na razie termin „znaczenie” stosować intuicyjnie, w potocznym sensie.

Przypomnijmy, nie uznanie tezy języka *J*, wiąże się z nie respektowaniem znaczenia słów wchodzący w skład tej tezy.

Skoro tezy języka wyznaczone są przez jego reguły dedukcyjne, to można stwierdzić, że dana jednostka respektuje znaczenie wyrażeń języka *J* wtedy i tylko wtedy, gdy stosuje ona reguły dedukcyjne języka *J*, tj.

- uznaje za prawdziwe wszystkie aksjomaty tego języka;
- jeżeli uznaje za tezę zdanie *Z* języka *J*, to uznaje też za tezę zdanie *Z'* języka *J*, będące inferencyjną konsekwencją *Z*.

Reguły dedukcyjne a pojęcie znaczenia

W takim ujęciu znaczenie słów i większych jednostek językowych wyznaczone jest przez reguły dedukcyjne, które „stoją na straży” znaczeń wyrażeń tego języka.

Musimy uznawać za prawdziwe pewne określone zdania języka *J,* jeżeli wcześniej uznaliśmy za prawdziwe jakieś określone zdanie.

Reguły dedukcyjne a pojęcie znaczenia

Pojęcie równoznaczności dwóch zdań.

Zdania Z_1 i Z_2 danego języka J są równoznaczne w języku J, gdy tezami języka J są dwa okresy warunkowe „jeżeli Z_1, to Z_2" i „jeżeli Z_2, to Z_1".

W myśl powyższego dwa zdania języka polskiego „*Warszawa jest stolicą Polski*" i „*Warszawa jest siedzibą rządu Polski*" są równoznaczne, gdy tezami języka polskiego są okresy warunkowe „*Jeżeli Warszawa jest stolicą Polski, to Warszawa jest siedzibą rządu Polski*" i „*Jeżeli Warszawa jest siedzibą rządu Polski, to Warszawa jest stolicą Polski*".

Reguły dedukcyjne a pojęcie znaczenia

O dwóch dowolnych wyrażeniach W_1 i W_2 języka J powiemy, że są równoważne w języku J, wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa zdania Z_1 i Z_2 języka J, które różnią się tylko tym, że gdzie w Z_1 występuje W_1, tam w Z_2 występuje W_2 są ze sobą w języku J równoważne.

Reguły dedukcyjne a pojęcie znaczenia

Znaczenie można zdefiniować odwołując się do pojęcia równoznaczności.

Znaczenie wyrażenia *W* języka *J*, jest to ta własność wyrażenia *W*, która przysługuje wszystkim wyrażeniom równoznacznym w języku *J* z wyrażeniem *W,* i tylko tym wyrażeniom.

Reguły dedukcyjne wyznaczając zbiór tez danego języka, decydują o zachowaniu stosunku równoznaczności odpowiednich wyrażeń. Te z kolei, decydują o znaczeniu wyrażeń.

Wynikanie

Zdanie *Z'* języka *J* wynika w tym języku ze zdania *Z*, wtedy i tylko wtedy, jeżeli *Z'* jest bezpośrednią lub pośrednią konsekwencją inferencyjną aksjomatów języka *J* oraz zdania *Z*.

Twierdzenie o dedukcji:

Zdanie *Z'* języka *J*, jest konsekwencją inferencyjną w języku *J* zdania *Z* oraz aksjomatów języka *J* wtedy i tylko wtedy, gdy okres warunkowy „jeżeli *Z*, to *Z'*" jest tezą tego języka.

Składnia klasycznego rachunku logicznego

Istnieje specyficzna grupa tez języka, dających się rozpoznać po swojej specyficznej formie.

1. *Nie jest tak, że Poznań leży nad wartą oraz Poznań nie leży nad Wartą.*
2. *Nie jest tak, że Anna kocha Sławka i zdradza go z Mieczysławem wtedy i tylko wtedy, gdy Anna nie kocha Sławka lub nie zdradza go z Mieczysławem.*
3. *Jeżeli każdy Polak jest erudytą, to nie istnieje Polak, który nie jest erudytą.*

Wszystkie trzy powyższe zdania są tezami języka polskiego i wszystkie charakteryzują się specyficzną formą.

Składnia klasycznego rachunku logicznego

Formę tych zdań najłatwiej uchwycić podstawiając za zdania składowe zmienne zdaniowe a za spójniki - logiczne spójniki prawdziwościowe.

I. Nie jest tak: że p oraz nie p. $\neg(p \wedge \neg p)$

II. Nie jest tak: że p oraz q wtedy i tylko wtedy, gdy nie p lub nie q. $\neg[(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)]$

Trzecie zdanie jest zdaniem skwantyfikowanym, należy zatem w miejscu terminów jednostkowych użyć zmiennych indywiduwowych, a za wyrażenia predykatywne podstawić zmienne predykatywne.

III. Jeżeli $\forall x$ [jeśli $F(x)$, to $G(x)$], to nie jest tak że: $\exists x$ [$F(x)$ oraz nie $G(x)$].

$\forall x\ [F(x) \rightarrow G(x)] \rightarrow \neg\exists x\ [F(x) \wedge \neg G(x)]$

Składnia klasycznego rachunku logicznego

Specyficzną cechą formy logicznej zdań 1, 2, 3 jest to, że podstawiając pod zmienne dowolne stałe odpowiadające rodzajowi odpowiednich zmiennych uzyskamy znowu tezy języka.

Podstawiając za zmienną *p* w schemacie I zdanie 2+2=5 otrzymamy tezę języka:

i. Nie jest tak, że 2+2=5 oraz 2+2≠5.

Podstawiając w zdaniu II za zmienną *p* zdanie „*prezydent poleci na szczyt UE rządowym samolotem*”, a za zmienną *q* zdanie „*premier poleci na szczyt UE rządowym samolotem*”. Otrzymujemy tezę języka:

ii. *Nie jest tak, że prezydent poleci na szczyt UE rządowym samolotem i premier poleci na szczyt UE rządowym samolotem wtedy i tylko wtedy, gdy prezydent nie poleci na szczyt UE rządowym samolotem lub premier nie poleci na szczyt UE rządowym samolotem.*

Składnia klasycznego rachunku logicznego

W schemacie III podstawiając za zmienne predykatywne *F* i *G* odpowiednio „*jest winny*” i „*ma coś do ukrycia”*, otrzymujemy tezę języka polskiego treści:

iii. *Jeżeli każdy, kto jest winny ma coś do ukrycia, to nie istnieje taki winny, który nie ma nic do ukrycia.*

Tezy języka *J* o takiej formie logicznej, że każde zdanie języka *J* posiadające taką samą formę logiczną jest również tezą języka nazywamy *tautologią logiczną*.

Składnia klasycznego rachunku logicznego

Aby rozstrzygnąć, czy dane zdanie jest tautologią logiczną języka najpierw należy ustalić, jakie schematy logiczne są *schematami tautologicznymi*. Jeżeli jakieś zdanie podpada pod taki schemat, to jest tautologią.

Ustalanie, które z logicznych schematów zdań są schematami tautologicznymi jest zadaniem dyscypliny pomocniczej logicznej teorii języka – klasycznego rachunku logicznego, w skład którego wchodzą Klasyczny Rachunek Zdań (KRZ) i Klasyczny Rachunek Predykatów (KRP).

Składnia klasycznego rachunku logicznego

Na poziomie KRZ określa się, jakie schematy logiczne zbudowane wyłącznie ze spójników logicznych i zmiennych zdaniowych są schematami tautologicznymi.

Na poziomie KRP bierze się pod uwagę strukturę zdań pojedynczych reprezentowanych w KRZ przez zmienne zdaniowe i uwzględnia kwantyfikatory (stąd KRP często bywa nazywany Klasycznym Rachunkiem Kwantyfikatorów).

Klasyczny Rachunek Zdań

Na przykładzie KRZ zobaczymy:

a) jak wygląda język sformalizowany,

b) jak jest zbudowana dyscyplina formalna.

Posłużymy się implikacyjno-negacyjną postacią KRZ sformułowaną przez J. Łukasiewicza z dwoma terminami pierwotnymi negacją „¬” i implikacją „→”.

Reguły formowania KRZ

Reguły formowania KRZ:

a. reguła ustalająca słownik: znaki kształtu *p*, *q*, *r*, … oraz „¬” i „→” są słowami KRZ;
b. reguły ustalające kategorie gramatyczne wyrażeń KRZ:

- wyrażenie „¬” posiada indeks z/z (jest spójnikiem jednoargumentowym), wyrażenie „→” posiada indeks z/zz (jest spójnikiem dwuargumentowym), *p*, *q*, *r*, posiadają indeks *z*;

- jeżeli dowolne wyrażenie *A* posiada indeks *z, to* wyrażenie ¬*A* również posiada indeks *z;* jeżeli dowolne wyrażenia *A* i *B* posiadają indeks *z*, to „*A*→*B*” również posiada indeks *z*.

Reguła „b” rozstrzyga ostatecznie, jakim formułom przysługuje własność bycia zdaniem KRZ.

Reguły dedukcyjne KRZ

I. Reguły aksjomatyczne podają tezy implikacyjno-negacyjnego KRZ przyjęte bez dowodu:

- $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$,
- $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$,
- $\mathrm{p} \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$,

Reguły dedukcyjne KRZ

II. Reguły inferencyjne:

a. Reguła podstawiania – jeżeli A jest tezą KRZ, to tezą jest wyrażenie B powstałe z A przez zastąpienie w A dowolnego wyrażenia p, q, r, … dowolnym schematem rachunkowo-zdaniowym, na wszystkich pozycjach, na których wyrażenie to występowało w A.

b. Reguła odrywania – jeżeli tezami KRZ są wyrażenia postaci „$A \rightarrow B$" oraz A, to tezą KRZ jest wyrażenie B.

c. Reguła zastępowania – jeżeli tezą KRZ jest wyrażenie C to tezą KRZ jest wyrażenie D, powstałe z C, w ten sposób, że występujący w C schemat rachunkowo zdaniowy zastąpiony został schematem rachunkowo zdaniowym odpowiadającym mu na mocy definicji:

$A \wedge B =_{df} \neg(A \rightarrow \neg B)$

$A \vee B =_{df} \neg A \rightarrow B$

$A \equiv B =_{df} \neg[(A \rightarrow B)\ \neg(B \rightarrow A)]$

Reguły dedukcyjne KRZ

Przy pomocy reguł dedukcyjnych wyprowadzamy pochodne tezy KRZ.

Stosujemy regułę podstawiania do aksjomatu nr 1 – za zmienną q podstawiamy wyrażenie $(\neg p \rightarrow q)$, w efekcie otrzymujemy tezę:

IV. $[p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)] \rightarrow \{[(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)\}$

Poprzednik implikacji jest aksjomatem KRZ, skoro zatem cała formułą jest tezą, to tezą jest też następnik implikacji

V. $[(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)$

Do tezy nr V możemy zastosować regułę podstawiania; zgodnie z definicją „$A \vee B =_{df} \neg A \rightarrow B$" za wyrażenie $(\neg p \rightarrow q)$ podstawiamy $(p \vee q)$ i otrzymujemy tezę:

VI. $(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Schematy tautologiczne KRZ

Przykłady praw KRZ

1. Prawo sprzeczności: $\neg(p \wedge \neg p)$
2. Prawo wyłączonego środka: $p \vee \neg p$

Obydwa powyższe prawa przesądzają o tym, że: na mocy 1 dwa zdania sprzeczne nie mogą być jednocześnie prawdziwe (wykluczają się); na mocy 2 dwa zdania sprzeczne nie mogą być jednocześnie fałszywe (dopełniają się). Zdania, które się wykluczają się są ze sobą niezgodne. Niezgodność nie jest równa sprzeczności!

3. Prawa De Morgana:

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Nie jest prawdą, że koalicja zdobędzie poparcie opozycji lub uchwała zostanie przyjęta wtedy i tylko wtedy, gdy koalicja nie zdobędzie poparcia opozycji i uchwała nie zostanie przyjęta.

Schematy tautologiczne KRZ

4. Prawo *modus ponens*: $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$,

   Jeżeli masz znamię na lewej łopatce, to jesteś zaginionym synem wnuka drugiego męża ciotki kuzyna mojej matki, masz znamię na lewej łopatce, zatem jesteś zaginionym synem wnuka drugiego męża ciotki kuzyna mojej matki.

5. Prawo *modus tollens*: $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$,
6. Prawo komutacji: $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \equiv (q \rightarrow (p \rightarrow r))$
7. Prawo eksportacji i importacji: $((p \wedge q) \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow (q \rightarrow r))$.

Semantyka logiczna

Aby świadomie zakomunikować w języku *J* jakiś fakt (rozpoznać fakt komunikowany), trzeba nie tylko znać reguły składniowe języka *J,* trzeba również wiedzieć, jakie stany rzeczy odpowiadają poszczególnym zdaniom oznajmującym języka *J*.

Reguły odniesienia przedmiotowego – określają one przedmioty, do których odnosi się dane wyrażenie *W*.

Są to reguły semantyczne.

Semantyka logiczna

W celu przyporządkowania wyrażeniom odpowiadających im przedmiotów, należy najpierw je skategoryzować (jakie przedmioty odpowiadają wyrażeniom o poszczególnych kategoriach gramatycznych).

Kategorie przedmiotów to kategorie ontologiczne. Semantyka logiczna wykorzystuje kategorie wyodrębnione w ramach *teorii mnogości.*

Kategorie ontologiczne teorii mnogości mają charakter formalny. W efekcie przedmioty należące do tej samej kategorii teoriomnogościowej mogą mieć niewiele wspólnych cech pozaformalnych.

Semantyka logiczna

Podstawowe teoriomnogościowe kategorie ontologiczne:

1. obiekt indywidualny;
2. zbiór obiektów indywidualnych;
3. relacja między obiektami indywidualnymi;
4. zbiór lub relacja wyższego rzędu;
5. zbiór relacyjny (struktura relacyjna).

Semantyka logiczna

Termin „zbiór” jest wieloznaczny:

1. zbiór w sensie kolektywnym – w tym znaczeniu zbiór można rozpatrywać, jako przedmiot złożony z elementów, w taki sam sposób jak całość składa się z części.

   Dla zbiorów w sensie kolektywnym charakterystyczne jest to, że elementy ich elementów są też ich elementami.

   Np. zbiór narodów europejskich jest tożsamy ze zbiorem wszystkich europejczyków.

   Jeżeli *N*-y są wszystkimi elementami jakichś *M*-ów, to zbiór *N*-ów jest równy zbiorowi *M*-ów.

Semantyka logiczna

2. zbiór w sensie dystrybutywnym – w tym przypadku termin „zbiór” oznacza ogół tych przedmiotów, które posiadają pewną wspólną cechę. Odpowiada on zatem sensowi takich terminów jak „gatunek”, „rodzaj”.

   Elementami zbioru *M*-ów są *M*-y i tylko *M*-y.

   Zbiór narodów europejskich nie jest tożsamy ze zbiorem wszystkich europejczyków, ponieważ elementami zbioru narodów europejskich mogą być tylko narody europejskie, nie europejczycy.

Podstawowe pojęcia teorii mnogości

Teoria mnogości zajmuje się tylko zbiorami w sensie dystrybutywnym. Zbiorami w sensie kolektywnym zajmuje się *mereologia*.

W dalszej części wykładu używając terminu „zbiór” będziemy mieli na myśli zbiór w sensie dystrybutywnym.

Podstawowe pojęcia teorii mnogości

Zakładamy, że każdej cesze *F* odpowiada zawsze określony predykat jednoargumentowy *F(x)*.

Cesze parzystości odpowiada predykat „*x* jest liczbą parzystą”; cesze męskości – „*x* jest mężczyzną” itd.

Dany jest pewien przedmiot indywidualny α, którego nazwą jest termin jednostkowy „*a*”, oraz pewien predykat jednoargumentowy *F(x)*; zdanie, które powstanie z *F(x)*, przez zastąpienie w nim zmiennej „*x*” terminem jednostkowym „*a*” oznaczamy przez „*F(a)*”.

Obiekt α spełnia predykat *F(x)* wtedy i tylko wtedy, gdy *F(a)*.

Na przykład Sokrates i Leszek Miller spełniają predykat „*x* jest filozofem” wtedy i tylko wtedy, gdy Sokrates i Leszek Miller są filozofami. Sokrates jest filozofem, spełnia zatem dany predykat, Leszek Miller filozofem nie jest – nie spełnia powyższego predykatu.

Podstawowe pojęcia teorii mnogości

Związek między cechą a predykatem wyraża formuła:

Przedmiot α posiada cechę *F* wtedy i tylko wtedy, gdy α spełnia predykat „*F(x)*”.

Zbiór *F*-ów (przedmiotów posiadających cechę *F*) można określić jako ogół tych przedmiotów, które spełniają predykat *F*.

Jeżeli lista przedmiotów $a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n$, posiadających określoną cechę jest zbiorem skończonym i niezbyt wielkim, to określamy go przez wyliczenie jego elementów.

$$\{a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n,\}$$

W takim przypadku nie ma znaczenia w jakiej kolejności wymieniamy poszczególne elementy.

Podstawowe pojęcia teorii mnogości

Zbiory, których elementami są obiekty indywidualne spełniające pewien predykat jednoargumentowy, można utożsamić z gatunkami tych indywiduów. Np. zbiór wszystkich ssaków traktujemy jako identyczny z gatunkiem ssaków.

Zbiory, których elementami są uporządkowane pary obiektów indywidualnych spełniające pewien predykat dwuargumentowy nazywamy relacjami dwuczłonowymi.

Między przedmiotami α i β zachodzi relacja dwuczłonowa F, wtedy i tylko wtedy, jeżeli para uporządkowana $\langle \alpha, \beta \rangle$ spełnia predykat „F(x, y)”.

W tym przypadku kolejność elementów jest ustalona.

Podstawowe pojęcia teorii mnogości

Na przykład między Marylą Rodowicz i Dodą zachodzi relacja *bycia starszym od*, ponieważ para uporządkowana ⟨Maryla Rodowicz, Doda⟩ spełnia dwuargumentowy predykat „x jest starszy od y”.

Między liczbami 1 i −1 zachodzi *relacja bycia większym od* – para uporządkowana $\langle 1, -1 \rangle$ spełnia predykat dwuargumentowy „$x > y$”.

W powyższych przypadkach, jeślibyśmy zmienili kolejność elementów pary uporządkowanej, nie spełniałyby one odpowiednich predykatów.

Podstawowe pojęcia teorii mnogości

Teraz zajmiemy się pewnymi podstawowymi pojęciami odnoszącymi się do zbiorów.

Przyjmijmy, że małe litery alfabetu *„x”, „y”, „z”, ...* symbolizują zmienne indywiduowe; natomiast wielkie litery *„X”, „Y”, „Z”, ...*symbolizują zmienne zbiorowe (tzn. wolno podstawiać za nie nazwy zbiorów).

„$\alpha \in X$” – oznacza, że α należy do zbioru X (jest jego elementem)

Podstawowe pojęcia teorii mnogości

1. *Suma zbiorów* X i Y (symbolicznie $X \cup Y$) – jest to zbiór, którego elementami są wszystkie te przedmiotów, które należą do zbioru X lub do zbioru Y.

   $\forall x\ (x \in X \cup Y \equiv x \in X \vee x \in Y)$

   Sumą zbioru osób niegodziwych i zbioru osób będących kapitalistami jest zbiór osób będących niegodziwcami lub kapitalistami.

2. *Iloczyn zbiorów* X i Y (symbolicznie $X \cap Y$) – jest to zbiór, którego elementami są wszystkie te przedmioty, które należą do zbioru X i Y (części wspólnej zbioru X i Y).

   $\forall x\ (x \in X \cap Y \equiv x \in X \wedge x \in Y)$

   Iloczynem zbioru osób niegodziwych i zbioru osób będących kapitalistami jest zbiór niegodziwych kapitalistów.

Podstawowe pojęcia teorii mnogości

3. Zbiór X zawiera się w zbiorze Y (między X a Y zachodzi inkluzja) – symbolicznie „$X \subset Y$" – wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru X jest także elementem zbioru Y.

   $X \subset Y \equiv \forall x\ (x \in X \rightarrow x \in Y)$

   Zbiór kwadratów zawiera się w zbiorze prostokątów; zawiera się również w zbiorze kwadratów – równość zbiorów to szczególny przypadek inkluzji.

   Aby odróżnić inkluzję jednostronną od dwustronnej, tą pierwszą nazywamy *inkluzją właściwą*.

4. Zbiór X jest identyczny ze zbiorem pełnym (uniwersum) – symbolicznie U – wtedy i tylko wtedy, jeżeli każdy z rozważanych w danym języku przedmiotów należy do X.

   $X = U \equiv \forall x\ (x \in X)$

Podstawowe pojęcia teorii mnogości

5. Zbiór X jest identyczny ze *zbiorem pustym* – symbolicznie „$\varnothing$” – wtedy i tylko wtedy, gdy żaden przedmiot do niego nie należy.

   $X = \varnothing \equiv \neg\exists x\ (x \in X)$

6. Zbiór Y jest identyczny z *dopełnieniem* zbioru X – symbolicznie X' – wtedy i tylko wtedy, gdy jest on zbiorem tych wszystkich przedmiotów z U, które nie należą do X.

   $Y = X' \equiv \forall x\ (x \in Y \equiv \neg\, x \in X)$

Podstawowe pojęcia teorii mnogości

Stosunki między zbiorami:

1. X jest identyczny z $Y \equiv X \subset Y \wedge Y \subset X$
2. X jest podrzędny do $Y \equiv X \subset Y \wedge \neg Y \subset X$
3. X jest nadrzędny do $Y \equiv \neg X \subset Y \wedge Y \subset X$
4. X krzyżuje się z $Y \equiv \neg X \subset Y \wedge \neg Y \subset X \wedge X \cap Y \neq \varnothing$
5. X wyklucza się z $Y \equiv \neg X \subset Y \wedge \neg Y \subset X \wedge X \cap Y = \varnothing$

Rachunek relacji

Wszystkie wymienione przed chwilą pojęcia odnoszą się również do relacji, które są również zbiorami.

Na przykład inkluzję między relacjami można charakteryzować następująco.

$$R \subset S \equiv \forall x, y\ (xRy \rightarrow xSy)$$

Relacja R zawiera się w relacji S wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa przedmioty, między którymi zachodzi relacja R, wchodzą między sobą także w relację S.

Relacja kuzynostwa zawiera się w relacji pokrewieństwa.

Rachunek relacji

- Relacja jest *zwrotna* w zbiorze $X \equiv \forall x \in X\,(xRx)$
- Relacja jest *przeciwzwrotna* w zbiorze $X \equiv \forall x \in X\,\neg(xRx)$
- Relacja jest *niezwrotna* w zbiorze $X \equiv \neg\forall x \in X\,(xRx)$
- Relacja jest *symetryczna* w zbiorze $X \equiv \forall x, y \in X\,(xRy \rightarrow yRx)$
- Relacja jest *asymetryczna* w zbiorze $X \equiv \forall x, y \in X\,(xRy \rightarrow \neg\, yRx)$
- Relacja jest *niesymetryczna* w zbiorze $X \equiv \neg\forall x, y \in X\,(xRy \rightarrow yRx)$
- Relacja jest *przechodnia* w zbiorze $X \equiv \forall x, y, z \in X\,(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$
- Relacja jest *spójna* w zbiorze $X \equiv \forall x, y \in X\,(x \neq y \rightarrow xRy \vee yRx)$

Rachunek relacji

Pewne rodzaje relacji pełni szczególnie istotną rolę w nauce i życiu praktycznym, są to:

- *Porządek liniowy* w zbiorze *X* – relacja, która jest jednocześnie asymetryczna, przechodnia i spójna. Relacja tego typu ustala kolejność elementów danego zbioru.

- *Porządek częściowy* w danym zbiorze *X* – relacja, która jest jednocześnie asymetryczna i przechodnia.

- Relacja *równościowa*, która jest jednocześnie zwrotna, symetryczna i przechodnia. Relacja *R* tego typu wyznacza pewien podział zbioru, między którego elementami zachodzi.

Rachunek relacji

Dziedziną relacji *R* nazywamy zbiór wszystkich tych przedmiotów, które są pierwszymi elementami par należących do relacji *R*.

$x \in D(R) \equiv_{df} \exists y\ (xRy)$

Dziedziną relacji zwierzchnictwa jest zbiór osób mających podwładnych.

Przeciwdziedziną relacji R nazywamy zbiór wszystkich tych przedmiotów, które są drugimi elementami par należących do relacji *R*.

$x \in \bar{D}(R) \equiv_{df} \exists y\ (yRx)$

Przeciwdziedziną relacji zwierzchnictwa jest zbiór osób mających zwierzchników.

Zbiór, który jest sumą dziedziny i przeciwdziedziny relacji *R* nazywamy *polem* relacji *R* - symbolicznie *P*(*R*).

Rachunek relacji

Relacja *R* jest *funkcją* (relacją *jednoznaczną*), gdy każdemu elementowi swej dziedziny przyporządkowuje tylko jeden element przeciwdziedziny. Mówimy, że *funkcja* jest *określona* na zbiorze *X*, jeżeli *X* stanowi jej dziedzinę.

$$\forall x \in X \, \forall y, z \in Y \, (xRy \wedge xRz \rightarrow y = z)$$

Zwyczajowo funkcję oznacza się literą *F*. Zachodzenie funkcji *F* między przedmiotami *x* i *y* zapisujemy symbolicznie $F(x) = y$

Rachunek relacji

Relacja jest funkcją jedno-jednoznaczną, jeżeli każdemu elementowi swojej dziedziny przyporządkowuje dokładnie jeden element przeciwdziedziny; a każdemu elementowi przeciwdziedziny przyporządkowuje dokładnie jeden element dziedziny.

Przykładami relacji jedno-jednoznacznych są: relacja bycia stolicą, relacja bycia dwukrotnością określona na zbiorze liczb.

Rachunek relacji

Konwersem relacji R (symbolicznie $\breve{R}$) jest relacja, która zachodzi między przedmiotem pierwszym i drugim zawsze i tylko wtedy, gdy między drugim a pierwszym zachodzi relacja R.

$$x\breve{R}y \equiv_{\mathrm{df}} yRx$$

Relacja większości ($x>y$) jest konwersem relacji mniejszości ($x<y$), relacja starszeństwa jest konwersem relacji bycia młodszym itd.

System relacyjny

System relacyjny (struktura) jest to układ elementów tworzących pewien zbiór U. Poszczególne elementy U należą do zbiorów $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ zawartych w U. Między poszczególnymi elementami U zachodzą relacje $R_1, R_2, R_3, \ldots R_m$; zdarza się tak, że w systemie relacyjnym wyróżniamy pewne elementy z U: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_p$.

Zbiór U nazywamy *uniwersum systemu relacyjnego*, natomiast zbiory, relacje i obiekty indywidualne: $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n, R_1, R_2, R_3, \ldots R_m, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_p$ – nazywamy *charakterystyką systemu*.

W zapisie symbolicznym system relacyjny przedstawia się następująco:

$$S = \langle U; X_1, X_2, \ldots X_n, R_1, R_2, \ldots R_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p \rangle$$

System relacyjny

Przykład systemu relacyjnego

U – zbiór polskich miast,
X_1 – zbiór miast wielkopolskich,
X_2 – zbiór miast śląskich,
R_1 – relacja bezpośredniego połączenia kolejowego,
R_2 – relacja bezpośredniego połączenia autobusowego,
α_1 – Warszawa,
α_2 – Poznań,
α_3 – Wrocław.

Nazwijmy nas system *Smp* (system miast polskich) będzie się on przedstawiał następująco:

Smp = ⟨zbiór polskich miast; zbiór miast wielkopolskich, zbiór miast śląskich, relacja bezpośredniego połączenia kolejowego, relacja bezpośredniego połączenia autobusowego, Warszawa, Poznań, Wrocław⟩

System relacyjny

W celu omówienia podstawowych właściwości struktur posłużymy się ich prostymi przykładami, jakimi są *grafy skierowane*.

Graf można opisać jako strukturę postaci:

$G = \langle U; R \rangle$

U jest niepustym zbiorem skończonym, R jest relacją przeciwzwrotną łączącą elementy U.

Elementy, o których mowa to wierzchołki i oznacza się je symbolami „x_1”, „x_2”,… „x_n”.

Jeżeli między elementami grafu symbolizowanymi przez „x_1” i „x_2” zachodzi relacja R, to mówimy, że w grafie G istnieje linia skierowana od „x_1” do „x_2” i oznaczamy ją $\langle x_1; x_2 \rangle$.

System relacyjny

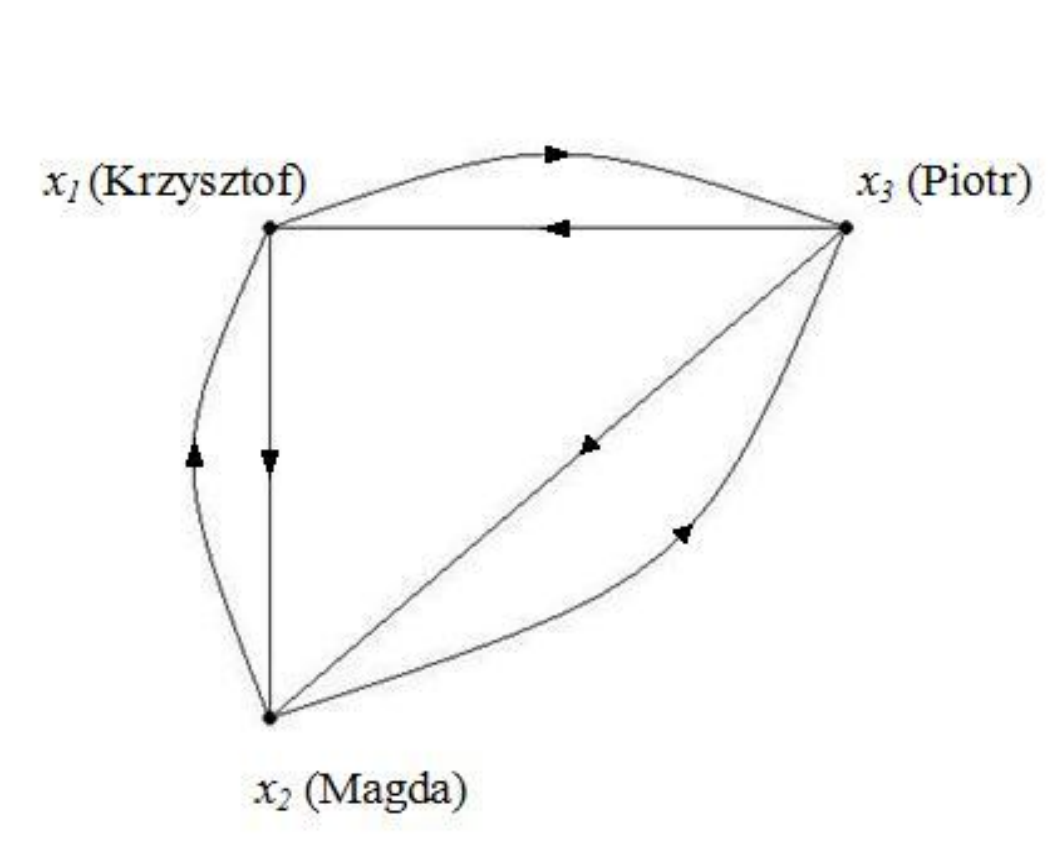
Przykład grafu skierowanego:

Niech uniwersum U grafu skierowanego G_1 stanowi zbiór U = {Krzysztof, Magda, Piotr}, relację R_1 grafu G_1 stanowi relacja bycia kochankiem.

W graficznej reprezentacji grafu, wierzchołki reprezentowane są przez punkty, jeżeli wierzchołki łączy dana relacja, to łączymy je linią odpowiednio skierowaną.

System relacyjny

Reprezentacja grafu $G_1 = \langle U; R_1 \rangle$



System relacyjny

Własności grafów:

- stopień zbieżności wierzchołka x – $id(x)$ – liczba linii zbiegających się w wierzchołku x.
- Stopień rozbieżności wierzchołka x – $od(x)$ – liczba linii wychodzących z wierzchołka x.
- Nadawca – jest to wierzchołek x taki, że:
  $id(x) = 0$ i $od(x) > 0$
- Odbiorca – jest to wierzchołek x taki, że:
  $id(x) < 0$ i $od(x) = 0$
- Ekspedytor – jest to wierzchołek x taki, że:
  $id(x) = 1$ i $od(x) = 1$
- Droga od wierzchołka x_i do wierzchołka x_j jest ot sekwencja linii i wierzchołków kształtu x_i, $\langle x_i\, x_k \rangle$, $x_k \ldots x_l$, $\langle x_l\, x_j \rangle$, x_j, taka, że żaden wierzchołek nie powtarza się w niej dwukrotnie.

System relacyjny

- Długość drogi od wierzchołka x_i do wierzchołka x_j – jest to liczba linii tej drogi.
- Droga geodezyjna od wierzchołka x_i do wierzchołka x_j – jest to najkrótsza z dróg od x_i do x_j.
- Odległość od wierzchołka x_i do wierzchołka x_j symbolicznie: $d(x_i, x_j)$ – jest to długość geodezyjnej od x_i do x_j.
- Wierzchołek x_i jest osiągalny z wierzchołka x_j, jeżeli istnieje droga od x_i do x_j.
- Baza wierzchołków grafu G – jest to każdy podzbiór wierzchołków grafu G, mający dwie własności:

  (1) Każdy wierzchołek grafu G nienależący do tego podzbioru, jest osiągalny z pewnego wierzchołka tego podzbioru

  (2) Nie istnieje żaden inny podzbiór o własności (1), który posiadałby mniej elementów.

System relacyjny

Jako system relacyjny można rozpatrywać takie zjawiska jak:

- grupa społeczna,
- hierarchia funkcji w rządzie,
- osobowość jednostki,
- akcja utworu literackiego.

Podobieństwo między strukturami

Zagadnieniom podobieństwa formalnego między strukturami przyjrzymy się na przykładzie grafów skierowanych.

Dane są dwa grafy skierowane: $G = \langle U; R \rangle$ oraz $G' = \langle U'; R' \rangle$

G' jest przekształceniem homomorficznym grafu G, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja F, mająca dziedzinę w U, a przeciwdziedzinę w U', taka, że:

$$\forall x, y \in U' \{xR'y \equiv \exists v, z \in U [F(v) = x \wedge F(z) = y \wedge vRz]\}$$

W takim wypadku mówimy, że funkcja F przekształca homomorficznie graf G w graf G'.

Podobieństwo między strukturami

G' jest homomorficzny względem grafu *G* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja *F* przekształcająca homomorficznie graf *G* na graf *G',* a zbiór wartości *F* jest równy *U'*.

W takim przypadku funkcja *F* jest homomorfizmem grafu *G* na graf *G'*.

Podobieństwo między strukturami

Graf *G'* jest izomorficzny z *G* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja *F* będąca homomorfizmem grafu *G* na graf *G'*, a ponadto konwers funkcji *F* jest również funkcją, której dziedziną jest *U'*, a przeciwdziedziną *U*. (znaczy to, że *F* jest funkcją jedno-jednoznaczną).

Podobieństwo między strukturami

Uogólniając pojęcia homomorfizmu i izomorfizmu powiemy, że:

- Relacja R odwzorowuje homomorficznie relację S na relacji T, wtedy i tylko wtedy, gdy:

(1) R jest relacją jednoznaczną;

(2) $D(R) = P(S)$; $\breve{D}(R) = P(T)$

(3) $\forall x\ \forall y\ \forall v\ \forall z\ [\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle v, z\rangle \in R \rightarrow (\langle x, v\rangle \in S \equiv \langle y, z\rangle \in T)]$

Na przykład relacja przyporządkowująca ludziom liczbę przeżytych przez nich lat odwzorowuje homomorficznie relację starszeństwa między ludźmi na relację większości między liczbami.

Podobieństwo między strukturami

- Relacja R odwzorowuje izomorficznie relację S na relacji T wtedy i tylko wtedy, gdy:

  (1) R jest relacją jedno-jednoznaczną,

  (2) $D(R) = P(S)$; $\breve{D}(R) = P(T)$;

  (3) $\forall x\ \forall y\ \forall v\ \forall z\ [\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle v, z\rangle \in R \rightarrow (\langle x, v\rangle \in S \equiv \langle y, z\rangle \in T)]$

  Na przykład relacja, która punktom na prostej przyporządkowuje liczby rzeczywiste odwzorowuje izomorficznie relację leżenia na lewo od, na relację mniejszości.

Podobieństwo między strukturami

A teraz w ramach odpoczynku od teorii, szczypta rozrywki intelektualnej – rozwiążemy sobie kilka zadań. (Zadania pochodzą z książki: Stanosz, B., *Ćwiczenia z logiki,* Warszawa 2008)

1. Wskaż relację, która odwzorowuje homomorficznie, na relacji większości między liczbami relację:
   - bycia wyższym,
   - bycia cięższym.

2. Relacje zachodzące między punktami danego terenu odwzorowujemy izomorficznie, przyporządkowując tym punktom punkty mapy, na relacjach zachodzących między punktami mapy. Wskaż relację *S* odwzorowywaną przez to przyporządkowanie na relacji:
   - leżenia na prawo,
   - leżenia na lewo.

Podobieństwo między strukturami

Następne zadanie pochodzi z książki *Zbiór zadań z językoznawstwa*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1990.

91. Poniżej przytoczone są zdania i wyrażenia w języku indonezyjskim oraz ich tłumaczenia na język polski, podane w zmienionej kolejności:

engkau guru adik saja	*mój młodszy brat (to) przyjaciel twojego nauczyciela*
guru adik sahabat engkau	*ty (jesteś) nauczycielem mojego młodszego brata*
adik saja sahabat guru engkau	*nauczyciel młodszego brata twojego przyjaciela*
saja guru sahabat engkau	*mój młodszy brat (to) twój nauczyciel*
adik saja guru engkau	*ja (jestem) nauczycielem twojego przyjaciela*

Polecenie 1.: Przyporządkuj właściwe tłumaczenie każdemu zdaniu i wyrażeniu indonezyjskiemu oraz ustal znaczenie poszczególnych wyrazów indonezyjskich.

Polecenie 2.: Opisz zauważone przez siebie reguły budowy zdań w języku indonezyjskim.

Polecenie 3.: W jaki inny sposób, na podstawie wykrytych przez Ciebie reguł budowy zdań indonezyjskich, można przetłumaczyć na język polski ciąg wyrazów indonezyjskich, przytoczony na drugim miejscu.

Podobieństwo między strukturami

91. Zauważmy, że w zdaniach indonezyjskich występuje tylko pięć wyrazów, podczas gdy w polskich tłumaczeniach — wyrazów jest piętnaście (jeżeli się przyjmie, że różne wyrazy to np. *mój* i *mojego*, *brat* i *brata* itp.). Jakie wyrazy polskie mogą być tłumaczone tak samo na język indonezyjski? Przede wszystkim najprawdopodobniej formy różnych przypadków tego samego wyrazu (*mój* i *mojego*, *brat* i *brata* itp.). Poza tym zauważmy, że w żadnym ze zdań indonezyjskich ani jeden wyraz nie powtarza się dwa razy. Tak więc, dwa wyrazy polskie występujące w jednym zdaniu nie mogą być tak samo tłumaczone na język indonezyjski. Wychodząc z tego założenia oraz z ogólnego wyobrażenia o tym, jakie cechy może mieć język naturalny, zakładamy że tak samo tłumaczy się na język indonezyjski wyraz *ja* i *mój* oraz *ty* i *twój*. Okazuje się jednak, że na podstawie tego założenia nie można „utożsamić" żadnych dwu pozostałych polskich wyrazów

Można zauważyć, że wyrazy *młodszy* i *brat* występują zawsze razem. Naturalne więc będzie założenie, że pojęcie 'młodszy brat' wyrażane jest w języku indonezyjskim za pomocą jednego wyrazu. W ten sposób dochodzimy do wniosku, że pięć występujących w zdaniu wyrazów indonezyjskich ma następujące znaczenia: 1) 'ja, mój'[1], 2) 'ty, twój'; 3) 'młodszy brat'; 4) 'przyjaciel'; 5) 'nauczyciel'.

Zbudujemy teraz dwie tabele pokazujące, w których zdaniach występują poszczególne wyrazy. Oznaczymy zdania indonezyjskie kolejnymi liczbami arabskimi, a polskie — rzymskimi.

	1	2	3	4	5
engkau	+	+	+	+	+
guru	+	+	+	+	+
adik	+	+	+		+
saja	+		+	+	+
sahabat		+	+	+	

	I	II	III	IV	V
ja, mój	+	+		+	+
ty, twój	+	+	+	+	+
młodszy brat	+	+	+	+	
nauczyciel	+	+	+	+	+
przyjaciel	+		+		+

Polskim odpowiednikiem wyrazu *sahabat* jest wyraz *przyjaciel*, ponieważ obydwa one występują tylko w trzech zdaniach. Wyrazom *egkau* i *guru* odpowiadają *ty, twój* i *nauczyciel* (chociaż nie wiadomo, które — któremu), ponieważ każdy z nich występuje w pięciu zdaniach. To samo dotyczy wyrazów *adik* i *saja* oraz *ja, mój* i *młodszy brat*, które występują w czterech zdaniach.

Zdanie 3. odpowiada zdaniu I, ponieważ obydwa one zawierają po pięć wyrazów. Zdania 1. i 5. odpowiadają zdaniom II i IV (chociaż nie wiadomo, które — któremu), ponieważ zarówno pierwsze dwa, jak i drugie dwa zawierają po cztery takie same wyrazy. Tak więc pozostają cztery możliwości ustalenia odpowiedniości między zdaniami polskimi i indonezyjskimi. Posługując się tłumaczeniem, stwierdzamy, że tylko jedna z nich zakłada racjonalne reguły budowy zdania indonezyjskiego. Przypuśćmy bowiem, że zdaniu 1. odpowiada IV, 5. — II, 2. — V, 4. — III, 3. — I; wtedy wyrazowi *adik* odpowiadałyby wyrazy *ja, mój*, a wyrazowi *saja* — *młodszy brat*. Przypuśćmy również, że wyrazowi *guru* odpowiada *nauczyciel*, a *engkau* — wyrazy *ty, twój*. W takim razie zdanie 2. dosłownie tłumaczyłoby się w sposób następujący: 'nauczyciel ja przyjaciel ty', tzn. przydawka następowałaby po rzeczowniku, a podmiot — po orzeczeniu (dokładniej: orzeczniku); natomiast ze zdania 5. wynikałoby, że jest odwrotnie, mianowicie że to przydawka poprzedza określany przez siebie rzeczownik, a podmiot — orzeczenie. Dalszy przegląd możliwości wskazuje na to, że zdaniom indonezyjskim udaje się przypisać racjonalną strukturę tylko wtedy, gdy zdaniu 1. odpowiada II, 5. — IV, 2. — III, 4. — V, 3. — I, czyli *engkau* — *ty, twój; guru* — *nauczyciel; adik* — *młodszy brat; saja* — *ja, mój; sahabat* — *przyjaciel*. Wówczas reguły budowy zdań indonezyjskich można sformułować następująco: przydawka następuje po wyrazie określanym, a wyraz pełniący funkcję podmiotu wraz ze swymi określeniami występuje przed wyrazem pełniącym funkcję orzeczenia i jego określeniami. Biorąc pod uwagę te reguły, zdanie 2. można przetłumaczyć także jako 'nauczyciel młodszego brata twojego przyjaciela', a więc zinterpretować je jako wyrażenie, a nie zdanie (brak orzeczenia).

---

[1] A także *mojego;* tu i dalej przytaczamy tylko po jednej formie każdego wyrazu.

Semantyczny model języka

Regułami *denotowania* nazywa się reguły odniesienia przedmiotowego języka *J*, przyporządkowujące:

1. Imionom własnym – obiekty indywidualne,
2. Predykatom jednoargumentowym – zbiory obiektów indywidualnych.
3. Predykatom dwuargumentowym – relacje między obiektami indywidualnymi.
4. Predykatom wyższego rzędu zbiory lub relacje wyższego rzędu.

Semantyczny model języka

Z kolei *denotacją*:

1. danego imienia własnego jest obiekt indywidualny, do którego odnosi się na mocy reguł denotowania imię własne;
2. danego predykatu jednoargumentowego – zbiór obiektów indywidualnych spełniających na mocy reguł denotowania dany predykat jednoargumentowy;
3. Danego predykatu dwuargumentowego – zbiór par uporządkowanych obiektów indywidualnych, które spełniają na mocy reguł denotowania dany predykat dwuargumentowy.

Semantyczny model języka

W przypadku deskrypcji nie jest konieczne wprowadzanie osobnych *reguł denotowania,* albowiem każda deskrypcja powstaje z odpowiedniego predykatu jednoargumentowego $F(x)$.

Na przykład deskrypcja *„najlepszy szaszłyk w mieście”* powstaje z predykatu „x jest najlepszym szaszłykiem w mieście”.

Semantyczny model języka

Jeżeli staniemy w obliczu jakiegoś języka *J* o ustalonych regułach formowania i regułach dedukcyjnych, lecz pozbawionego reguł denotowania, to w takim wypadku będziemy mieli do czynienia z *czystym rachunkiem*.

Aby taki *czysty rachunek* przekształcić w język *zinterpretowany semantycznie*, musimy go wyposażyć w reguły odniesienia przedmiotowego, czyli:

1. w regułę ustalającą uniwersum dla języka *J*,
2. w reguły denotowania przyporządkowujące wszystkim terminom pierwotnym *J* ich denotacje.

Semantyczny model języka

Jeżeli wzbogaciliśmy wcześniejszy czysty rachunek *J* o reguły odniesienia przedmiotowego *S*, wówczas system relacyjny

$$\langle U; X_1, X_2, \ldots X_n, R_1, R_2, \ldots R_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p \rangle$$

taki, że : (1) *U* jest identyczne z uniwersum ustalonym przez reguły *S* dla języka *J,* (2) wszystkie denotacje terminów pierwotnych języka *J* ustalone przez reguły *S* występują w charakterystyce systemu:

$$X_1, X_2, \ldots X_n, R_1, R_2, \ldots R_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$$

nazwiemy *dziedziną przyporządkowaną językowi J* przez reguły semantyczne *S* - $D_S(J)$

Semantyczny model języka

Nazwijmy językiem L język następującej postaci: terminami pierwotnymi L są: predykat jednoargumentowy „$P(x)$”, predykat dwuargumentowy „$Q(x, y)$”, termin jednostkowy „a”. Oprócz tego język ten wyposażony jest w kwantyfikatory, spójniki logiczne i zmienne indywiduowe.

Podlega zwykłym regułom formowania i regułom dedukcyjnym, które wymieniają następujące aksjomaty L:

1. $P(a)$,
2. $\forall x\, [P(x) \rightarrow \exists y\, (P(y) \wedge Q(y, x))]$,
3. $\neg\, \exists x\, [P(x) \wedge Q(a, x)]$,
4. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, [P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge Q(z, x) \wedge Q(z, y) \rightarrow x = y]$,
5. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, [P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge Q(x, z) \wedge Q(y, z) \rightarrow x = y]$,
6. $F(a) \wedge \forall x\, \forall y\, [P(x) \wedge P(y) \wedge Q(y, x) \wedge F(x) \rightarrow F(y)] \rightarrow \forall x\, [P(x) \rightarrow F(x)]$

Semantyczny model języka

Dla języka *L* można skonstruować następujące reguły odniesienia przedmiotowego S_1:

1. Reguła ustalająca uniwersum dla *L*: *U* = zbiór sportowców (*Us*).
2. Reguły denotowania:

(a) Den („*P*(*x*)”) = zbiór bokserów (*Zb*).

(b) Den („*Q*(*x*, *y*)”) = relacja antagonizmu (*Ra*).

(c) Den („*a*”) = Andrzej Gołota (*G*).

Dziedziną przyporządkowaną językowi *L* przez reguły semantyczne S_1 jest następującym systemem relacyjnym.

$D_{S1}(L) = \langle Us; Zb, Ra, G\rangle$

Semantyczny model języka

Przyporządkowanie $D_S(J)$ za pomocą reguł odniesienia przedmiotowego czystemu rachunkowi J, zmienia J w język zinterpretowany semantycznie, o którego zdaniach możemy rozstrzygać, czy są prawdziwe w $D_S(J)$.

Zdania prawdziwe w jednej dziedzinie mogą być fałszywe w innej i odwrotnie.

Kwestię prawdziwości zdań danego języka J rozstrzygamy kierując się *regułami prawdziwości*.

Semantyczny model języka

Zdanie Z języka J jest prawdziwe w dziedzinie $D_S(J)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. zdanie Z jest postaci „$F(a)$”, denotację predykatu „$F(x)$” stanowi w $D_S(J)$ zbiór K, denotację „a” stanowi przedmiot α i $\alpha \in K$;
2. bądź zdanie Z jest postaci „$F(a, b)$”, denotację predykatu „$F(x, y)$ stanowi w $D_S(J)$ relacja R, denotację terminów jednostkowych „a”, „b” stanowią przedmioty α, β oraz $\alpha R \beta$;
3. bądź zdanie Z jest postaci „$\forall x\ F(x)$” oraz predykat $F(x)$ posiada w $D_S(J)$ denotację równą uniwersum $D_S(J)$;
4. bądź zdanie Z jest postaci $\forall x\ \forall y\ F(x, y)$ oraz predykat $F(x, y)$ posiada jako denotację w $D_S(J)$ relację, do której należy każda para uporządkowana utworzona z elementów uniwersum $D_S(J)$.

Semantyczny model języka

Podane reguły nie uwzględniają zdań złożonych. Reguły prawdziwości dla tego typu zdań podają doskonale znane tabelki prawdziwościowe. Mówią one, w jaki sposób prawdziwość zdania złożonego zależy od zdań składowych, z których jest ono zbudowane

Zdanie składowe	Zdanie złożone
p	$\neg p$
1	0
0	1

Zdania proste		Zdania złożone			
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \equiv q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Semantyczny model języka

Pojęcie tautologii języka *J* można określić jako zdanie *Z* języka *J* posiadające taką własność, że jest prawdziwa w każdej dziedzinie $D_S(J)$ (o ile dziedzina ta posiada uniwersum niebędące zbiorem pustym). Pomimo że wartość logiczna zdań składowych może być różna w poszczególnych dziedzinach.

Efektywną metodą rozstrzygania, czy mamy do czynienia ze schematem tautologicznym jest metoda zero-jedynkowa.

Semantyczny model języka

Okazuje się, że przyjmując dziedzinę $D_{S1}(L)$ dla języka J fałszywy okazuje się aksjomat języka L nr 3, mówiący:

$\neg \exists x\, [P(x) \wedge Q(a, x)]$

Aksjomat ten byłby prawdziwy w $D_{S1}(L)$, jeżeli fałszywe byłoby zdanie

$\exists x\, [P(x) \wedge Q(a, x)]$

mówiące zgodnie z regułami S_1, że istnieje taki x, z którym Andrzej Gołota jest w stosunkach antagonistycznych. Zdanie to jednak jest prawdziwe, ponieważ taki ktoś istnieje - Tomasz Adamek. Zdanie to jest zatem prawdziwe a jego negacja fałszywa.

Aksjomat 3. języka L jest fałszywy w $D_{S1}(L)$.

Okazuje się, że $D_{S1}(L)$ nie jest *modelem semantycznym* języka L.

Semantyczny model języka

Modelem semantycznym danego języka *J* nazywamy każdą i tylko taką dziedzinę, w której prawdziwe są wszystkie tezy języka *J*.

Tezy danego języka *J* możemy podzielić na:

1. tautologie logiczne,
2. aksjomat pozalogiczne,
3. konsekwencje aksjomatów pozalogicznych.

Tautologie logiczne są prawdziwe w każdej niepustej dziedzinie; jeżeli w danej dziedzinie prawdziwe są aksjomaty pozalogiczne prawdziwe są też ich konsekwencje.

Zatem jeżeli w danej $D_S(J)$ prawdziwe są wszystkie aksjomaty pozalogiczne języka *J*, to $D_S(J)$ jest modelem semantycznym *J*.

Semantyczny model języka

Modelem semantycznym języka L będzie $D_{S2}(J)$ przyporządkowana językowi L przez następujące reguły S_2:

1. Reguła ustalająca uniwersum:
   U = zbiór liczb naturalnych: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (N);
2. Reguły denotowania:
   (a) Den („$P(x)$”) = N;
   (b) Den („$Q(x, y)$”) = relacja bycia następnikiem (*Nast.*);
   (c) Den („a”) = 0.

W celu sprawdzenia, czy $D_{S2}(J) = \langle N; N, Nast., 0\rangle$ rzeczywiście jest modelem semantycznym L należy sprawdzić prawdziwość aksjomatów pozalogicznych L w $D_{S2}(J)$.

Semantyczny model języka

Aksjomat 1 – $P(a)$ – głosi, że 0 jest liczbą naturalną;

Aksjomat 2 - $\forall x\ [P(x) \rightarrow \exists y\ (P(y) \wedge Q(y, x))]$ – głosi, że dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba naturalna będąca jej następnikiem.

Aksjomat 3 – $\neg\ \exists x\ [P(x) \wedge Q(a, x)]$ – głosi, że nie istnieje liczba naturalna, której następnikiem jest zero.

Aksjomat 4 – $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge Q(z, x) \wedge Q(z, y) \rightarrow x = y]$ – głosi, że każde dwie liczby naturalne o tym samym następniku są identyczne.

Aksjomat 5 – $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge Q(x, z) \wedge Q(y, z) \rightarrow x = y]$ – głosi, że każde dwie liczby będące następnikami tej samej liczby są identyczne

Aksjomat 6 – $F(a) \wedge \forall x\ \forall y\ [P(x) \wedge P(y) \wedge Q(y, x) \wedge F(x) \rightarrow F(y)] \rightarrow \forall x\ [P(x) \rightarrow F(x)]$ – głosi, że jeżeli cecha F przysługuje liczbie 0 oraz posiadanie cechy F przez dowolną liczbę naturalną implikuje posiadanie tej cechy przez jej następnik, to cechę F posiada każda liczba naturalna.

Semantyczny model języka

Wszystkie aksjomaty pozalogiczne języka L są prawdziwe w $D_{S2}(J)$, jest to zatem model semantyczny języka L.

Język L opisujący dziedzinę $D_{S2}(J)$, to pewna postać arytmetyki liczb naturalnych skonstruowanej przez włoskiego matematyka G. Peano.

Semantyczny model języka

Zdanie analityczne języka *J* – to zdanie prawdziwe we wszystkich modelach semantycznych *J*.

Zdanie kontradyktoryjne języka *J* – to zdanie fałszywe we wszystkich modelach semantycznych języka *J*.

Zdanie syntetyczne języka *J* – to zdanie, które nie jest analityczne, ani kontradyktoryjne w języku *J*.

Każda teza języka *J* jest zdaniem analitycznym; każda kontrteza języka *J* jest zdaniem kontradyktoryjnym.

Komunikowanie faktów

Każde zdanie języka *J* posiada w każdym modelu języka *J* *odniesienie przedmiotowe.*

- Jeżeli zdanie *Z* języka *J,* ma postać $F(a)$, a predykat $F(x)$ posiada w modelu *M* języka *J* jako denotację zbiór *K*, natomiast termin jednostkowy *„a”* posiada w modelu *M* jako denotację przedmiot α, to odniesienie przedmiotowe zdania *Z* w modelu *M* jest parą uporządkowaną $\langle K, \alpha \rangle$.

Na przykład zdanie języka polskiego *„Juliusz Słowacki jest poetą romantycznym”* ma postać $F(a)$, tym samym jego odniesieniem przedmiotowym jest stan rzeczy ⟨zbiór poetów romantycznych, Juliusz Słowacki⟩.

Komunikowanie faktów

- W przypadku, gdy zdanie języka *J* ma postać „*F*(*a, b*)” oraz predykat posiada „*F*(*x, y*)” posiada w modelu *M* języka *J* jako denotację relację *R*, zaś terminy jednostkowe „*a*”, „*b*” – przedmioty α i β, to odniesienie przedmiotowe zdania *Z* w modelu *M* jest trójką uporządkowaną $\langle R, \alpha, \beta \rangle$.

  Na przykład odniesienie przedmiotowe zdania „*Juliusz Słowacki reprezentuje ten sam prąd literacki, co Adam Mickiewicz*” – *F*(*a, b*) jest stanem rzeczy ⟨relacja reprezentowania tego samego prądu literackiego, Juliusz Słowacki, Adam Mickiewicz⟩.

Komunikowanie faktów

- Jeżeli zdanie Z języka J ma postać „$\forall x\ (F(x) \rightarrow G(y))$” oraz predykaty „ $F(x)$” i „$G(x)$” posiadają jako denotację w modelu M języka J zbiory K, L, to odniesienie przedmiotowe zdania Z w modelu M jest parą uporządkowaną $\langle K, L\rangle$.

  Odniesienie przedmiotowe zdania „*Każdy poeta romantyczny jest zwolennikiem indywidualizmu*” – $\forall x\ (F(x) \rightarrow G(y))$ jest stanem rzeczy ⟨zbiór poetów romantycznych, zbiór indywidualistów⟩.

Komunikowanie faktów

Fakt komunikowany przez dane zdanie *Z* jest w każdym przypadku jego odniesieniem przedmiotowym. Nie jest jednak tak, że każde odniesienie przedmiotowe zdania *Z* jest faktem.

Przy ustalaniu czy mamy do czynienia z faktem należy odwołać się do pojęcia prawdy.

Stan rzeczy komunikowany przez określone zdanie *Z* jest faktem tylko wtedy, gdy zdanie to jest prawdziwe w odpowiednim modelu semantycznym języka.

Komunikowanie faktów

Wiemy, że każdemu językowi przyporządkować można wiele różnych modeli semantycznych.

Konieczne jest zatem wyodrębnienie spośród nich modelu „właściwego” – *standardowego* (M_S), który, musi spełniać następujące warunki:

1. Uniwersum M_S posiada charakter fizykalny.
2. Imiona własne języka J posiadają w M_S ustalone denotacje.
3. Reguły denotowania dla predykatów, przyporządkowujące językowi J model M_S, są tak skonstruowane, że przy określonych przez te reguły denotacjach wszystkie zdania składające się na określoną wiedzę W są prawdziwe w M_S.

Komunikowanie faktów

Określone fakty komunikowane są w danym języku *J* zawsze na gruncie określonej wiedzy *W*.

Wiedza *W* jest złożona ze zdań sformułowanych w *J* i zawiera wszystkie zdania analityczne języka *J*, niektóre zdania syntetyczne języka *J* i ich konsekwencje.

Reguły denotowania muszą być tak dobierane, aby przy ustalonych przez nie denotacjach wszystkie zdania należące do *W* były prawdziwe.

Komunikowanie faktów

Zdania języka *J*, które posiadają w M_S z uwagi na wiedzę *W* odniesienie przedmiotowe niebędące faktem nazywamy *zdaniami fikcjonalnymi* języka *J*.

Rodzaje zdań niekomunikujących żadnych faktów ze względu na wiedzę *W*:

1. Zdania kontradyktoryczne języka *J*. („*Dotknęła go twarda ręka losu*”)
2. Niekontradyktoryczne zdania kontrempiryczne języka *J* z uwagi na wiedzę *W* (zdania syntetyczne języka *J* niezgodne z wiedzą *W*). („*Skamieniał ze strachu*”)
3. Fikcjonalne zdania niekontrempiryczne języka *J* – zdania zawierające terminy jednostkowe, których denotacjami nie są przedmioty fizyczne. („*Dr Lubicz mieszka w Warszawie*”).

Komunikowanie faktów

Podsumowując:

Aby z pełną świadomością, wykonać lub zinterpretować czynność, której sensem jest zakomunikowanie określonego faktu za pomocą wypowiedzi językowej, potrzeba i wystarczy znać:

1. Reguły składniowe języka *J*.
2. Reguły denotowania dla terminów języka *J* oraz zbiór twierdzeń tworzących wiedzę *W* – przyporządkowujące językowi *J* model M_S.

Przy czym charakter reguł składniowych i reguł denotowania dla imion własnych jest konwencjonalny.