

POSZUKIWANY/POSZUKIWANA

*Czyli o tautologiach, kontrtautologiach i zbiorach zdań
semantycznie niesprzecznych*

DZIŚ

W nocy ujęto kilkunastu groźnych przestępców.

Udało się ich przesłuchać tylko pobieżnie.

Na podstawie ich zeznań należy ustalić, czy należą do gangu *Perfidnych Rozbójników Logicznych*.

Wiadomo, że ich wypowiedzi wyróżniają się specyficzną konstrukcją logiczną.

Należą do trzech typów.



TYP 1 – ANTYTAUTOLOGIK ZŁOŚLIWY

Nigdy nie wypowiada zdań,
których schematy nazywanych
TAUTOLOGIAMI.



„Formuła rachunku zdań jest *tautologią* tego działu logiki zawsze i tylko wtedy, gdy jest schematem zdań wyłącznie prawdziwych”

(Stanosz 1985)

Innymi słowy:

Gdy przy każdym wartościowaniu
otrzymujemy zdanie prawdziwe.

ZADANIE

Należy **udowodnić**, że przesłuchiwane osoby należą do typu 1.



Trzeba więc pokazać, że wypowiedane przez nich zdania **nie są** schematami tautologii.

Jak to zrobić?

Oczywiście przy pomocy **drzew semantycznych.**

PODEJRZANY 1



Skoro jeżeli wczoraj grałem w pokera lub byłem w kinie to nie jest tak, że napadłem na bank, więc nie grałem w pokera i byłem w kinie lub napadłem na bank.

$$((p \vee q) \rightarrow \neg r) \rightarrow ((\neg p \wedge q) \vee r)$$

Wniosek: Natychmiast aresztować!

PODEJRZANY 2



Skoro, jeżeli wczoraj napadłem na bank to jestem przestępcą lub byłem w złym czasie w złym miejscu, to jeżeli jestem przestępcą i byłem w złym czasie w złym miejscu, to nie jest prawdą, że napadłem wczoraj na bank.

$$(p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow \neg p)$$

Wniosek: Uwięzić natychmiast!

PODEJRZANY 3



Skoro policja przesłuchuje tylko przestępców i nie jest prawdą, że ja jestem przestępcą lub, że mam w domu czarnego kota, to jednocześnie policja przesłuchuje tylko przestępców i ja jestem przestępcą, a równocześnie jestem właścicielem czarnego kota.

$$(p \wedge \neg(q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$$

Wniosek: Niewinny! Zwolnić natychmiast!

PODSUMUJMY

Aby udowodnić niewinność, a więc dowieść, że schemat badanego zdania **jest tautologią** czynimy, co następuje:

1. Zakładamy, że schemat ten nie jest tautologią *a więc*
2. Że istnieje wartościowanie, przy którym jest on fałszywy, *stąd*
3. Zaprzeczony schemat umieszczamy w pniu drzewa *a następnie*
4. Sprawdzamy, czy zamkną się wszystkie gałęzie
5. *Jeżeli TAK* – badany schemat jest tautologią

PODSUMUJMY

Taki sposób dowodzenia nazywamy **dowodem apagogicznym**

innymi słowy: **dowodem nie wprost.**

Opiera się on na prawdzie starej jak świat:

$$pV \rightarrow p.$$

Zatem jeśli chcę dowieść, że p , to wystarczy wykluczyć, że $\neg p$.

I tak właśnie czynimy 😊: Udowadniając, że schemat danej formuły jest tautologią po prostu wykluczamy, że nią nie jest.

TYP 2 – KONTRTAUTOLOGIK POSPOLITY



Jego cechą charakterystyczną jest wypowiedzianie zdań będących wyłącznie schematami **kontrtautologii**.

„Formuły, które przy każdym wartościowaniu przyjmują wartość 0 nazywamy kontrtautologiami KRZ.”

(Pogonowski 2008)

Innymi słowy: gdy przy żadnym z podstawień nie otrzymujemy formuły prawdziwej.

Jak go rozgryźć?

Znów apagogicznie, czyli

1. Zakładamy, że badana formuła jest prawdziwa.
2. Budujemy drzewo semantyczne.
3. Jak wszystkie gałęzie się zamkną – podejrzanego należy uwięzić – wypowiedziane przez niego zdanie miało **schemat kontrtautologii**.



PODEJRZANY 4

Nie zabijam zupełnie niewinnych staruszek lub kradnę dzieciom lizaki, zawsze i tylko wtedy gdy nie jest prawdą, że skoro zabijam niewinne staruszki (święć Panie nad ich duszą) to kradnę dzieciom lizaki.



$$(\neg p \vee q) \equiv \neg(p \rightarrow q)$$

Wniosek: Winny! Skazać natychmiast!

PODEJRZANY 5

Jednoznacznie jest tak, że jeżeli mam plecy w Pałacu Prezydenckim to mnie nie aresztujecie i równocześnie nie kupicie sobie nowych samochodów i równocześnie skoro kupicie sobie nowe samochody i nie mam pleców w Pałacu Prezydenckim, to mnie aresztujecie. O ja biedny, nieszczęśliwy...



$$((p \rightarrow \neg q) \wedge \neg r) \wedge ((r \vee \neg p) \rightarrow q)$$

Wniosek: Niewinny! Zwolnić natychmiast. Być może ma plecy...

PODEJRZANY 6

Mój wygląd jest efektem działań policji lub miałem wczoraj bardzo groźny wypadek, zawsze i wyłącznie wtedy gdy skoro jeżeli mój wygląd jest efektem działań policji, to miałem wczoraj groźny wypadek, więc miałem wczoraj groźny wypadek. Tak czy siak – mocno jestem poobijany.



$$(p \vee q) \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$$

Wniosek: Niewinny! Zwolnić! Odwieźć do lekarza.

TYP 3 – SPRZECZNIK WREDNAWY

Ten typ jest bardziej rozmowny. Wypowiada zazwyczaj kilka zdań. Ich cechą jest to, że stanowią **zbiór zdań semantycznie sprzecznych**.

Zbiór zdań semantycznie sprzecznych – zbiór takich zdań, dla których nie istnieje takie wartościowanie, że wszystkie te zdania są równocześnie prawdziwe.



TYP 3 – SPRZECZNIK WREDNAWY

Jak sobie z nim poradzić?

Oczywiście apagogicznie, czyli nie wprost. A dokładniej:

1. Zakładamy niewinność, czyli, że wszystkie zdania są prawdziwe
2. Wpisujemy je w korzeniu (0.1, 0.2 ...)
3. Jeżeli wszystkie gałęzie się zamkną – zbiór zdań jest semantycznie sprzeczny, a podejrzany winny.



PODEJRZANY 7

Jestem śmiertelnie przerażony tym, co się dzieje, zatem nie może być tak, że z zimną krwią zabiłem dwóch umięśnionych facetów lub że nie okradłem banku. Naprawdę bardzo się boję. Skoro zatem okradłem bank, to na pewno również zabiłem dwóch umięśnionych ochroniarzy płci męskiej.

$$\{(p \rightarrow \neg(q \vee \neg r); p; (r \rightarrow q))\}$$

Wniosek: Przeczy sam sobie. Uwięzić natychmiast.



PODEJRZANY 8

Wspierającym zorganizowaną przestępczość był Marszałek lub Prezydent. Przewodniczący wspierał zorganizowaną przestępczość, o ile Prezydent wspierał. Prymas wspierał, jeśli Marszałek wspierał. Ale przecież — na litość boską — ani Prymas, ani Przewodniczący nie wspierali nigdy przenigdy zorganizowanej przestępczości.

$$\{(p \vee q); (q \rightarrow r); (p \rightarrow s); (\neg s \wedge \neg r)\}$$

Wniosek: Nie dość, że bezczelny, to jeszcze winny. Uwięzić na długie lata!



NA KONIEC

Następni podejrzani zostali już przesłuchani przez pewnego detektywa. Wnioski zostały wyciągnięte.



Waszym zadaniem jest **udowodnić**, że wnioski te są prawdziwe i jedynie słuszne.

TYP: ANTYTAUTOLOGIKUS

Werdykt: NIEWINNY

(zatem schemat wypowiedzianego przez niego zdania **jest** tautologią)



Zeznanie:

Skoro jest tak, że nie porywam pięknych brunetek lub nie porywam też blondynek i równocześnie porywam piękne brunetki, to z całą pewnością nie porywam brunetek.

$$((\neg p \vee \neg q) \wedge p) \rightarrow \neg q$$

Werdykt jest POPRAWNY.

TYP: KONTRTAUTOLOGIKUS

Werdykt: WINNY

(zatem schemat wypowiedzianego przez niego zdania **jest** kontrtautologią)

Zeznanie:

Mam przyjaciół w Komedzie Głównej Policji lub w Ministerstwie Sprawiedliwości, zawsze i tylko wtedy gdy skoro, jeżeli mam przyjaciół w KGP, to mam ich w MS, to mam też przyjaciół w Ministerstwie Sprawiedliwości.



$$(p \vee q) \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$$

Werdykt jest NIEPOPRAWNY.

TYP SPRZECZNIK

Werdykt: NIEWINNY

(zatem wypowiedziane przez niego zdania **nie są** semantycznie sprzeczne)

Zeznanie:

Skoro nie jestem szefem gangu to odpowiadam tylko częściowo za wszystkie to okropności. Jeżeli z kolei jestem szefem gangu, to mam największy udział w zyskach. A (powiem Wam w tajemnicy) jestem szefem gangu. Jednak nie mam największego udziału w zyskach lub nieprawdą jest, że tylko częściowo odpowiadam za te wszystkie okropności.

$$\{(\neg p \rightarrow q); (p \rightarrow r); p; (\neg r \vee \neg q)\}$$

Werdykt jest POPRAWNY.



PODSUMUJMY

Wiemy:

- ✓ Co to jest TAUTOLOGIA
- ✓ Co to jest KONTRTAUTOLOGIA
- ✓ Co to jest DOWÓD APAGOGICZNY

PODSUMUJMY

Umiemy (przy pomocy drzew semantycznych):

- ✓ *nie wprost* dowieść, że schemat zdania jest tautologią
- ✓ *nie wprost* dowieść, że schemat zdania jest kontrtautologią

ZA TYDZIEŃ

Sprawdzimy, czy policja potrafi wyciągać właściwe wnioski z dostępnych przesłanek,

czyli

o wnioskowaniach logicznych słów kilka.

Bibliografia:

B. Stanosz, *Wprowadzenie do logiki formalnej. Podręcznik dla humanistów.*, Warszawa 1985

J. Pogonowski, *Wykłady z logiki matematycznej*, rok akademicki 2007/2008; źródło:

www.logic.amu.edu.pl