WYKŁAD FAKULTATYWNY:

POZNANIE MATEMATYCZNE

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM

pogon@amu.edu.pl

1 Cel

Głównym celem wykładu jest refleksja nad naturą poznania matematycznego. Dla realizacji tego celu przewiduje się:

1. *Przystępne ukazanie głównych kierunków rozwoju matematyki*. Podane informacje historyczne dotyczą wybranych momentów przełomowych w dziejach matematyki. Twierdzimy, że można o nich mówić w sposób przystępny, bez straszenia audytorium bardzo skomplikowanymi konstrukcjami teoretycznymi.

2. *Przystępne omówienie praktyki badawczej matematyków*. Aby sensownie mówić o poznaniu matematycznym trzeba wiedzieć (choćby w przybliżeniu), co naprawdę robią matematycy. Informacje wyniesione z matematyki szkolnej nie dostarczają, naszym zdaniem, adekwatnego obrazu czym jest matematyka.

3. *Analizę współczesnych kognitywnych ujęć matematyki*. Literatura przedmiotu dotyczy m.in.: nabywania zdolności numerycznych, używania metafor poznawczych w procesie tworzenia pojęć matematycznych, umiejętności poprawnego formułowania oraz efektywnego rozwiązywania problemów.

Wykład przeznaczony jest dla studentów kognitywistyki UAM (lata: III, IV, V). Wymagane jest zaliczenie kursu *Matematyczne podstawy kognitywistyki*.

Refleksję nad poznaniem matematycznym uprawiać można na różnych płaszczyznach. Na wykładzie skupimy się na następujących dwóch:

1. *Epistemologia matematyki*. Dotyczy pracy badawczej profesjonalnych matematyków. Stara się charakteryzować kontekst odkrycia w matematyce. Bierze pod uwagę historyczne aspekty: tworzenia pojęć matematycznych oraz ustalania kryteriów poprawności stosowanych metod.

2. *Przyswajanie pojęć matematycznych*. Dotyczy ontogenezy pojęć i operacji matematycznych w umyśle. Stara się charakteryzować trudności napotykane w procesie uczenia się matematyki, diagnozować przyczyny popełniania błędów, proponować efektywne metody nauczania. Uwzględnia ustalenia dotyczące mechanizmów poznawczych.

Umiejętności matematyczne, które uczeń wynosi ze szkoły związane są przede wszystkim ze stosowaniem podanych algorytmów. Gorzej wygląda sprawa z pojmowaniem natury rozumowań matematycznych. Chcielibyśmy, aby słuchacze tego wykładu nabyli przekonanie, że matematyka jest przede wszystkim:

1. *Nauką o wzorcach*. Początki matematyki biorą się z reprezentacji (wybranych aspektów) świata. Konstruowanie takich reprezentacji pozwala ujawnić występujące w nich wzorce – swoiste regularności. Wzorce mogą być numeryczno-arytmetyczne (związane z ustalaniem stałości liczebności kolekcji), algebraiczne (związane z własnościami działań na obiektach, symetrie), porządkowe (związane z rozmieszczeniem obiektów względem danych relacji), mogą dotyczyć kształtu, przestrzeni, pozycji, odległości (konstrukcje geometryczne, topologiczne), mogą dotyczyć ruchu i zmiany (pojęcia analizy matematycznej, geometrii i topologii różniczkowej), mogą wreszcie dotyczyć samych rozumowań matematycznych (pojęcia logiki matematycznej), obliczalności (pojęcia teorii rekursji oraz różnych działów informatyki), częstości (rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna), itd.

2. *Nauką o rozwiązywaniu problemów*. Praktyka badawcza matematyki obejmuje wiele typów działalności. Przede wszystkim, jest to dowodzenie twierdzeń. Inne typy tej działalności to, m.in.: uogólnianie, abstrahowanie, tworzenie pojęć, stawianie hipotez, przedstawianie nowych (lepszych, prostszych, bardziej eleganckich) dowodów już znanych twierdzeń, wyobrażanie sobie, szukanie kontrprzykładów, prowadzenie rozumowań przez analogię (prowadzących np. do rozważania nowych dziedzin matematycznych), rozpatrywanie szczególnych przypadków, klasyfikowanie, szukanie nowych aksjomatów, sięganie po motywacje płynące z nauk empirycznych, poszukiwanie nowych punktów widzenia, przeprowadzanie (niekiedy żmudnych) rachunków, myślenie przekorne, itd. Na początku każdego z takich działań mamy do czynienia z problemem poznawczym. W jego rozwiązaniu korzystamy dostępnych, sprawdzonych już w działaniu metod, ale także z tworzonych na nowo heurystyk.

2 Spis tematów

1. *Uwagi historyczne I.* ***Przełomowe idee w matematyce (do 1800 roku)***. Tu ograniczamy się jedynie do wskazania tych momentów w dawniejszych dziejach matematyki, w których następowała ważna jakościowa zmiana w stylu jej uprawiania.

   (a) *Euklides, Eudoksos, Archimedes, Diofantos.*

   (b) *Fermat, Kartezjusz.*

   (c) *Newton, Leibniz.*

   (d) *Euler.*

2. *Uwagi historyczne II.* ***Rewolucja w matematyce XIX wieku***. Współczesna matematyka zaczyna się w wieku XIX. To wtedy właśnie zmienia się (i to dramatycznie) odniesienie przedmiotowe matematyki: rozpoczyna się rozważanie struktur matematycznych. Dochodzi do uporządkowania (pod względem logicznym) podstawowych działów matematyki.

   (a) *Teoria grup.*

   (b) *Geometrie nieeuklidesowe, geometria rzutowa, program Kleina.*

   (c) *Ciała liczbowe.*

   (d) *Podstawy analizy.*

   (e) *Teoria mnogości i topologia.*

3. *Uwagi historyczne III.* ***Wybrane działy matematyki współczesnej***. Nie jest oczywiście możliwe zwięzłe przedstawienie stanu badań matematyki współczesnej. Można jednak wskazać na pewne tendencje rozwojowe, które uwydatniły się w wieku XX.

   (a) *Matematyka dyskretna.*

   (b) *Rozgałęzienia analizy.*

   (c) *Algorytmy i obliczenia.*

4. *Praktyka badań matematycznych I.* ***Ustalanie standardów***. Pojęcia matematyczne były tworzone na drodze genetycznej bądź aksjomatycznej. Dlaczego pewne z nich uważamy za podstawowe, standardowe, normalne? Wskażemy, w jaki sposób sama matematyka odpowiada na to pytanie.

   (a) *Twierdzenia o klasyfikacji i twierdzenia o reprezentacji.*

(b) *Postacie kanoniczne, normalne, standardowe.*
(c) *Modele zamierzone.*

5. *Praktyka badań matematycznych II.* ***Wyznaczanie granic badawczych.*** Wyniki ukazujące, że czegoś zrobić nie można są niezwykle ważkie, ponieważ wyznaczają granice poznania. Podamy przykłady takich twierdzeń o niemożliwości.

   (a) *Twierdzenia o niemożliwości.*
   (b) *Konstrukcje kontrprzykładów.*
   (c) *Patologie.*

6. *Praktyka badań matematycznych III.* ***Wielkie programy matematyczne.*** Matematyka rozwija się spontanicznie, ale w pewnych momentach stajemy przed koniecznością refleksji: czy stosowane przez nas pojęcia są dobrze określone, czy używane metody mają należyte uzasadnienie, itp. Podamy przykłady proponowanych z rozmysłem programów badawczych, które miały na celu bądź uporządkowanie dotychczas zgromadzonej wiedzy, bądź wytyczały całkiem nowe kierunki badań.

   (a) *Arytmetyzacja analizy.*
   (b) *Program Hilberta.*
   (c) *Program Thurstona.*

7. *Filozofia matematyki I.* ***Tradycja: logicyzm, formalizm, intuicjonizm.*** Pierwsze spójne koncepcje dotyczące filozofii matematyki powstały w pierwszej połowie XX wieku. Każda z nich podlegała swoistej ewolucji.

   (a) *Logicyzm.*
   (b) *Formalizm.*
   (c) *Intuicjonizm.*

8. *Filozofia matematyki II.* ***Różne odmiany empiryzmu.*** Współcześnie coraz większą popularność zyskują koncepcje, które uwzględniają empiryczne aspekty matematyki. Chodzi przy tym zarówno o sam kontekst odkrycia w matematyce, jak też o rolę matematyki w innych naukach.

   (a) *Wigner.*
   (b) *Lakatos.*

(c) *Putnam*.
(d) *Chaitin*.
(e) *Wolfram*.

9. *Filozofia matematyki III*. ***Ontologia i epistemologia matematyki***. Filozofia matematyki podejmuje refleksję na temat sposobu istnienia przedmiotów matematycznych. Interesuje się także zagadnieniem osiągania prawdy matematycznej oraz używanych przy tym metod.

   (a) *Istnienie przedmiotów matematycznych*.
   (b) *Prawda a dowód*.
   (c) *Rozstrzygalność*.

10. *Kognitywne ujęcia matematyki I*. ***Zdolności numeryczne***. Większość eksperymentów poświęconych poznaniu matematycznemu dotyczy wykształcania się zdolności numerycznych.

    (a) *Dehaene*.
    (b) *SNARC*.
    (c) *Bariera czterech elementów*.

11. *Kognitywne ujęcia matematyki II*. ***Matematyka ucieleśniona: ustalenia i hipotezy***. Od kilkunastu lat coraz większą popularność zyskuje koncepcja matematyki ucieleśnionej, a dokładniej rola metafor poznawczych w genezie i funkcjonowaniu matematyki.

    (a) *Metafory poznawcze*.
    (b) *Podstawowa metafora nieskończoności*.
    (c) *Argumenty przeciwko platonizmowi*.

12. *Kognitywne ujęcia matematyki III*. ***Matematyka ucieleśniona: polemika***. Piszący te słowa nie jest zwolennikiem koncepcji matematyki ucieleśnionej, choć dopuszcza, iż pewne jej ustalenia mogą mieć wartość poznawczą.

    (a) *Krytyka ze strony matematyków*.
    (b) *Metafory poznawcze a kontekst odkrycia w matematyce*.
    (c) *Konsekwencje dla dydaktyki matematyki*.

13. *Kognitywne ujęcia matematyki IV*. ***Matematyka osadzona w kulturze***. Na podstawie danych archeologicznych, etnologicznych, lingwistycznych, itd. próbuje się analizować nie tylko rolę matematyki w kulturze, ale również ewentualny wpływ kultury na rozwój i funkcjonowanie matematyki.

    (a) *Matematyka w różnych kulturach*.

    (b) *Rola języka*.

    (c) *Eksperymenty*.

    (d) *Efekt zapadki*.

14. *Kognitywne ujęcia matematyki V*. ***Matematyka, świat, umysł***. Refleksja nad poznaniem matematycznym bierze pod uwagę wzajemne zależności między trzema sferami: platońskim światem idei matematycznych, rzeczywistością fizyczną oraz reprezentacjami tych dwóch sfer w umyśle.

    (a) *Heller*.

    (b) *Popper*.

    (c) *Próba podsumowania*.

15. *Dydaktyka matematyki*. ***Mathematical Problem Solving***. Refleksja nad poznaniem matematycznym powinna brać pod uwagę również to, w jaki sposób nauczamy matematyki. Poglądy na temat efektywnych metod w dydaktyce matematyki ulegały zmianom, z powodów merytorycznych, politycznych, światopoglądowych, technologicznych. Dydaktycy matematyki w dalszym ciągu odwołują się do ustaleń Piageta, ale popularność zyskują także nowe propozycje.

    (a) *Polya*.

    (b) *Schoenfeld*.

    (c) *Tall*.

3 Zasady zaliczenia

Wykład kończy się zaliczeniem z oceną. Podstawą uzyskania oceny jest napisanie eseju (6–8 stron). Przykładowe tematy esejów:

1. *Matematyka zwierzęca*.

2. *Eksperymenty dotyczące „zmysłu liczby”*.

3. *Rozumienie notacji matematycznej*.
4. *Matematyczne filmy edukacyjne*.
5. *Wyobraźnia przestrzenna*.
6. *Gry matematyczne*.
7. *Etnomatematyka*.
8. *Paradoksy matematyczne*.
9. *Sofizmaty matematyczne*.
10. *Błędy matematyczne*.
11. *Przyczyny lęku przed matematyką*.
12. *Dowcipy matematyczne*.

Dopuszczamy też oczywiście eseje na temat zaproponowany przez studenta, w uzgodnieniu z wykładowcą.

Bibliografia

Aberdein, A., Dove, I.J. (Eds.) 2013. *The argument of mathematics*. Springer Science+Business Media, Dordrecht.

Barbeau, E.J. 2000. *Mathematical Fallacies, Flaws, and Flimflam*. The Mathematical Association of America, Washington, DC.

Bourbaki, N. 1980. *Elementy historii matematyki*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Boyer, C.B. 1964. *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Bradis, V.M., Minkovskii, V.L., Kharcheva, A.K. 1999. *Lapses in mathematical reasoning*. Dover Publications, Mineola, New York.

Brożek, B., Hohol, M. 2014. *Umysł matematyczny*. Copernicus Center Press, Kraków.

Byers, W. 2007. *How Mathematicians Think. Using Ambiguity, Contradiction and Paradox to Create Mathematics*. Princeton University Press, Princeton and Toronto.

Corry, L. 2004. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Birkhäuser, Basel · Boston · Berlin.

Davis, J.P., Hersh, R. 1994. *Świat Matematyki*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Dehaene, S. 2011. *The number sense [How the mind creates mathematics]*. Oxford University Press, Oxford.

Devlin, K. 2005. *The Math Instinct. Why You're a Mathematical Genius (Along with Lobsters, Birds, Cats, and Dogs)*. Thunder's Mouth Press, New York.

Fitzgerald, M., James, I. 2007. *The Mind of the Mathematician*. The John Hopkins University Press, Baltimore.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 2003. *Counterexamples in Analysis*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Juszkiewicz, A.P. 1975–1977. *Historia matematyki. Od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa. Tom **1**: *Od czasów najdawniejszych do początku czasów nowożytnych* (1975). Tom **2**: *Matematyka XVII stulecia* (1976). Tom **3**: *Matematyka XVIII stulecia* (1977).

Kahneman, D. 2012. *Pułapki myślenia. O myśleniu szybkim i wolnym*. Media Rodzina, Poznań.

Kline, M. 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York Oxford.

Lakatos, I. 1976. *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge.

Lakoff, G., Núñez, R.E. 2000. *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books, New York.

Landerl, K., Kaufmann, L. 2013. *Dyskalkulia*. Harmonia Universalis, Gdańsk.

Lietzmann, W. 1958. *Gdzie tkwi błąd? Sofizmaty matematyczne i sygnały ostrzegawcze.* Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

Lockhart, P. 2009. *Mathematician's Lament. How School Cheats Us Out of Our Most Fascinating and Imaginative Art Form*. Bellevue Literary Press, New York.

Maxwell, E.A. 1959. *Fallacies in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.

Mioduszewski, J. 1996. *Ciągłość. Szkice z historii matematyki*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Murawski, R. 2002. *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Murawski, R. 2003. *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Murawski, R. 2008. *Filozofia matematyki. Zarys dziejów.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Nickerson, R.S. 2010. *Mathematical reasoning. Patterns, problems, conjectures, and proofs*. Psychology Press, New York London.

Parsons, C. 2008. *Mathematical Thought and Its Objects*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo.

Paulos, J.A. 2012. *Innumeracy. Matematyczna ignorancja i jej konsekwencje w dobie nowoczesnej technologii*. CeDeWu, Warszawa.

Pogonowski, J. 2011. Geneza matematyki wedle kognitywistów. *Investigationes Linguisticae* **23**, 106–147.

Polya, G. 1964. *Jak to rozwiązać? Nowy aspekt metody matematycznej.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Polya, G. 2009. *Mathematical Discovery on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. Ishi Press International, New York, Tokyo.

Polya, G. 2014. *Mathematics and Plausible Reasoning*. Vol.I: *Induction and Analogy in Mathematics*, Vol. II: *Patterns of Plausible Inference*. Martino Publishing, Mansfield Centre, CT.

Posamentier, A.S., Lehmann, I. 2013. *Magnificent Mistakes in Mathematics*. Prometheus Books, Amherst (New York).

Ruelle, D. 2007. *The Mathematician's Brain. A personal tour through the essentials of mathematics and some of the great minds behind them*. Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Stanovich, K.E. 2009. Rational and irrational thought: the thinking that IQ tests miss. *Scientific American Mind*, November-December 2009, 34–39.

Steen, L.A., Seebach, J.A., Jr. 1995. *Counterexamples in Topology*. New York: Dover Publications, Inc.

Tall, D. 2013. *How Humans Learn to Think Mathematically. Exploring the Three Worlds of Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.

Tieszen, R.L. 1989. *Mathematical intuition: phenomenology and mathematical knowledge*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Wise, G.L., Hall, E.B. 1993. *Counterexamples in Probability and Real Analysis*. New York: Oxford University Press.

Życiński, J. 2013. *Świat matematyki i jej materialnych cieni*. Copernicus Center Press, Kraków.