KLASYCZNY RACHUNEK LOGICZNY:

# TABLICE ANALITYCZNE

(PRELIMINARIA MATEMATYCZNE I LOGICZNE)

(DRZEWA, INFORMACJE O KRZ I KRP)

JERZY POGONOWSKI

ZAKŁAD LOGIKI STOSOWANEJ UAM

http://www.logic.amu.edu.pl

Niniejsza notatka stanowi pierwszą wersję wstępu do skryptu TABLICE ANALITYCZNE i zawiera preliminaria matematyczne i logiczne.

Na pozostałe części skryptu składają się:

- TABLICE ANALITYCZNE W KRZ
- TABLICE ANALITYCZNE W KRP
- REZOLUCJA I UNIFIKACJA.

Skrypt powstał na bazie wykładów z LOGIKI MATEMATYCZNEJ dla studentów *Językoznawstwa i Nauk o Informacji UAM*. W zamierzeniu, nie jest on wykładem logiki, lecz jedynie prezentacją jednej z metod dowodowych.

W wersji przeznaczonej do ewentualnego druku wprowadzona zostanie jednolita numeracja, opuszczone zostaną powtórzenia, itd.

Autor będzie wielce wdzięczny za wszystkie uwagi krytyczne dotyczące obecnej wersji notatek.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

# 1. Preliminaria matematyczne

Podajemy definicje wykorzystywanych pojęć matematycznych.

## 1.1. Zbiory i relacje

Zakładamy, że pojęcia:

- zbioru,
- relacji,
- funkcji,
- injekcji, surjekcji, bijekcji

są czytelnikowi znane ze szkoły.

Zakładamy, że czytelnik pamięta podstawowe operacje na zbiorach (iloczyn, suma, różnica, dopełnienie, iloczyn kartezjański):

- $X \cap Y = \{x \in U : x \in X \text{ oraz } x \in Y\}$
- $X \cup Y = \{x \in U : x \in X \text{ lub } x \in Y\}$
- $X \cup Y = \{x \in U : x \in X \text{ oraz } x \notin Y\}$
- $X' = \{x \in U : x \notin X\}$
- $X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ oraz } x \in Y\}$

gdzie $U$ jest rozważanym uniwersum.

Zbiór $X$ jest ***zawarty*** w zbiorze $Y$, gdy każdy element zbioru $X$ jest elementem zbioru $Y$. Piszemy wtedy: $X \subseteq Y$. Zbiór ***pusty*** $\emptyset$ to zbiór, który nie ma żadnego elementu. Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru $X$ oznaczamy przez $2^X$. Zbiór wszystkich funkcji ze zbioru $X$ w zbiór $Y$ oznaczamy przez $X^Y$.

Jeśli $R \subseteq X \times X$ jest relacją i $(x, y) \in R$, to piszemy też $xRy$. Mówimy wtedy, że $x$ jest $R$***-poprzednikiem*** $y$, a $y$ jest $R$***-następnikiem*** $x$

Dla dowolnej relacji $R \subseteq X \times X$, mówimy że element $x$ jest:

- $R$-***minimalny***, gdy nie istnieje $y \in X$ taki, że $yRx$
- $R$-***maksymalny***, gdy nie istnieje $y \in X$ taki, że $xRy$
- $R$-***najmniejszy***, gdy $xRy$ dla wszystkich $y \in X$
- $R$-***największy***, gdy $yRyx$ dla wszystkich $y \in X$.

Przypominamy niektóre podstawowe własności relacji dwuargumentowych. Mówimy, że relacja $R \subseteq X \times X$ jest:

- ***zwrotna***, gdy $xRx$ dla wszystkich $x \in U$
- ***przeciwzwrotna***, gdy $xRx$ nie zachodzi dla żadnego $x \in U$
- ***symetryczna***, gdy dla wszystkich $x, y \in U$: jeśli $xRy$, to $yRx$

- ***asymetryczna***, gdy dla wszystkich $x, y \in U$: jeśli $xRy$, to nie zachodzi $yRx$
- ***antysymetryczna***, gdy dla wszystkich $x, y \in U$: jeśli $x \neq y$, to $xRy$ lub $yRx$
- ***przechodnia***, gdy dla wszystkich $x, y, z \in U$: jeśli $xRy$ oraz $yRz$, to $xRz$
- ***spójna***, gdy dla każdego $x \in U$ istnieje $y \in U$ taki, że: $xRy$ lub $yRx$
- ***relacją równoważności***, gdy jest zwrotna, symetryczna i przechodnia
- ***częściowym porządkiem***, gdy jest antysymetryczna i przechodnia
- ***ostrym częściowym porządkiem***, gdy jest asymetryczna i przechodnia
- ***liniowym porządkiem***, gdy jest spójnym porządkiem częściowym
- ***ostrym liniowym porządkiem***, gdy jest spójnym ostrym porządkiem częściowym
- ***dobrym porządkiem***, gdy jest porządkiem częściowym i dla każdego niepustego zbioru $X \subseteq U$ istnieje element $x$ taki, że dla wszystkich $y \in X$ zachodzi $xRy$ (czyli gdy każdy niepusty podzbiór $X$ uniwersum ma element $R$-najmniejszy).

Jeśli $R \subseteq X \times Y$ oraz $S \subseteq Y \times Z$ są relacjami, to ***złożeniem*** relacji $R$ i $S$ jest relacja $R \circ S \subseteq X \times Z$ zdefiniowana warunkiem: $xR \circ Sz$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $y \in Y$ taki, że $xRy$ oraz $ySz$. Jeśli $R \subseteq X \times X$, to $R \circ R$ oznaczamy też przez $R^2$.

Zbiór jest ***nieskończony***, gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. W przeciwnym przypadku jest ***skończony***.
Zbiór wszystkich liczb naturalnych: 0, 1, 2, ... oznaczamy przez $N$.

## 1.2. Indukcja matematyczna

Przez ***zasadę indukcji matematycznej*** rozumiemy następujący schemat rozumowania. Niech $W$ będzie dowolną własnością mogącą przysługiwać liczbom naturalnym. Jeśli własność $W$ przysługuje liczbie 0 oraz to, że własność $W$ przysługuje liczbie $n$ implikuje, że $W$ przysługuje liczbie $n + 1$, to własność $W$ przysługuje wszystkim liczbom naturalnym.

## 1.3. Drzewa

***Grafem*** nazywamy dowolną parę $\langle X, R\rangle$, gdzie $X$ jest zbiorem, a $R$ jest podzbiorem $X \times X$. Elementy zbioru $X$ nazywamy ***wierzchołkami***, a elementy zbioru $R$ ***krawędziami*** grafu $\langle X, R\rangle$.

Mówimy, że relacja $R$ na zbiorze $X$ jest (ostrym) ***częściowym porządkiem*** w $X$, jeśli jest ona asymetryczna i przechodnia w $X$ (lub, co na to samo wychodzi: przeciwzwrotna i przechodnia w $X$).

***Drzewem (o korzeniu*** $x_0$) nazwiemy każdy układ $\langle X, R, x_0\rangle$ taki, że:

- $\langle X, R\rangle$ jest grafem;
- $x_0$ jest elementem $R$-najmniejszym w $X$;
- $R$ jest przechodnia w $X$;
- $R$ jest asymetryczna w $X$;
- dla każdego elementu zbioru $X - \{x_0\}$, zbiór jego wszystkich $R$-poprzedników jest dobrze uporządkowany przez relację $R$.

Zauważmy, że jeśli $\langle X, R, x_0 \rangle$ jest drzewem, to:

- zbiór wszystkich $R$-poprzedników każdego elementu zbioru $X - \{x_0\}$ jest liniowo uporządkowany;
- relacja $R$ jest przeciwzwrotna w $X$.

Niech $D = \langle X, R, x_0 \rangle$ będzie drzewem o korzeniu $x_0$.

***Liśćmi*** drzewa $D$ nazywamy wszystkie te jego wierzchołki, które nie mają $R$-następników.

Jeśli $D$ jest drzewem, to przez $r_D$ oznaczmy korzeń $D$, przez $|D|$ zbiór wszystkich wierzchołków $D$, przez $e(D)$ zbiór wszystkich krawędzi $D$, a przez $L_D$ zbiór wszystkich liści drzewa $D$.

Jeśli $(x, y) \in R$ jest krawędzią w $D$, to $x$ nazywamy ***przodkiem*** $y$, a $y$ nazywamy ***potomkiem*** $x$.
Jeśli $(x, y) \in R - R^2$ jest krawędzią w $D$, to $x$ nazywamy ***bezpośrednim przodkiem*** $y$, a $y$ nazywamy ***bezpośrednim potomkiem*** $x$.

Każdy podzbiór zbioru wierzchołków drzewa $D$, który jest uporządkowany liniowo przez $R$ nazywamy ***łańcuchem*** w $D$. Każdy łańcuch maksymalny (względem inkluzji) w $D$ nazywamy ***gałęzią*** w $D$. Zamiast terminu *łańcuch* używa się również terminu ***ścieżka***. Przez ***długość*** łańcucha $P$ rozumiemy liczbę elementów zbioru $P$.

***Pniem*** drzewa $D$ nazywamy część wspólną wszystkich gałęzi $D$.

***Rzędem*** wierzchołka $x$ nazywamy moc zbioru wszystkich potomków $x$. ***Rzędem*** drzewa $D$ jest kres górny rzędów wszystkich wierzchołków drzewa $D$.

Drzewo $D$ jest ***skończone***, jeśli zbiór jego wierzchołków jest skończony. Drzewo $D$ jest ***nieskończone***, jeśli zbiór jego wierzchołków jest nieskończony. Drzewo $D$ jest ***rzędu skończonego***, jeśli jego rząd jest liczbą skończoną.

Przez indukcję definiujemy ***poziomy*** drzewa:

- poziom ***zerowy*** to zbiór jednoelementowy, złożony z korzenia drzewa;
- poziom ***k+1*** to zbiór wszystkich bezpośrednich następników wierzchołków poziomu ***k***.

***Wysokością*** drzewa jest największa liczba $n$ taka, że istnieje poziom $n$ w drzewie. Jeśli drzewo ma wierzchołki poziomu $n$ dla każdej liczby naturalnej $n$, to mówimy, że wysokość drzewa jest ***nieskończona*** (równa $\omega$).

Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma najwyżej $n$ bezpośrednich potomków, nazywamy ***drzewem $n$-arnym***. W szczególności:

- Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma najwyżej dwóch bezpośrednich potomków nazwiemy ***drzewem nierozwojowym w sensie watykańskim***, w skrócie ***nw-drzewem***.
- Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków nazywamy ***drzewem dwójkowym*** (używa się też terminu ***drzewo binarne***).

Ważnym twierdzeniem, z którego wielokrotnie będziemy korzystać, jest następujący:

LEMAT KÖNIGA.

Jeśli drzewo $D$ rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.

DOWÓD.

Przypuśćmy, że $D$ jest nieskończone. Zdefiniujemy gałąź nieskończoną $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w $D$ przez indukcję.
Za element $x_0$ bierzemy korzeń drzewa $D$. Ponieważ $D$ jest nieskończone, więc $x_0$ ma nieskończenie wiele $R$-następników.
Przypuśćmy, że $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zostały zdefiniowane tak, że $x_i$ należy do $i$-tego poziomu drzewa $D$ oraz $x_i$ ma nieskończenie wiele $R$-następników. Z założenia, $x_{n-1}$ ma tylko skończenie wiele ***bezpośrednich*** $R$-następników. Ponieważ $x_{n-1}$ ma nieskończenie wiele $R$-następników, więc co najmniej jeden z jego bezpośrednich $R$-następników

także ma nieskończenie wiele $R$-następników. Wybieramy więc element $x_n$ z $n$-tego poziomu drzewa $D$ o tej właśnie własności. Wtedy $x_n$ ma nieskończenie wiele $R$-następników. Ponieważ jest tak dla każdego $n$, pokazaliśmy istnienie nieskończonej gałęzi $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w drzewie $D$.

Q.E.D.

Lemat Königa można też wysłowić następująco:

- Jeśli $D$ jest drzewem rzędu skończonego i dla każdej liczby naturalnej $n$ w $D$ istnieją łańcuchy o co najmniej $n$ elementach, to $D$ ma łańcuch nieskończony.

Mówimy, że $\langle Y, Q, y_0\rangle$ jest ***poddrzewem*** drzewa $\langle X, R, x_0\rangle$, gdy:

1) $Y \subseteq X$, $Q = R \cap Y^2$

2) $\langle Y, Q, y_0\rangle$ jest drzewem o wierzchołku $y_0$.

Jeśli $D_1$ jest poddrzewem $D_2$, to piszemy $D_1 \ll D_2$.

Jeśli $P$ jest gałęzią (skończoną) w drzewie $D$, to niech $P_{\mho}$ oznacza liść drzewa $D$ należący do $P$.

Niech $D_1 = \langle X, R, x_0\rangle$ i $D_2 = \langle Y, Q, y_0\rangle$ będą drzewami, $X \cap Y = \emptyset$, niech $P$ będzie gałęzią w $D_1$ i niech drzewo $D_3 = \langle Z, S, z_0\rangle$ będzie zdefiniowane w sposób następujący:

- $Z = X \cup Y$
- $z_0 = x_0$
- $S \cap X^2 = R$
- $S \cap Y^2 = Q$
- $(P_{\mho}, y_0) \in S$.

Mówimy wtedy, że drzewo $D_3$ jest ***przedłużeniem*** drzewa $D_1$ na gałęzi $P$ o drzewo $D_2$ i piszemy:

$$D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2 \sqsubset D_3.$$

Przedłużanie polega zatem, intuicyjnie mówiąc, na „doczepianiu” drzewa do liści innego drzewa. Zauważmy, że jest to relacja czteroargumentowa.

Dla dowolnych drzew $D_1$ oraz $D_3$ oraz gałęzi $P$ drzewa $D_1$, jeśli istnieje $D_2$ takie, że $D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2 \sqsubset D_3$, to piszemy $D_1 \sqsubset_{P_{\mho}} D_3$. Dla dowolnych drzew $D_1$ oraz $D_3$, piszemy $D_1 \sqsubset D_3$, jeśli istnieje gałąź $P$ w $D_1$ taka, że $D_1 \sqsubset_{P_{\mho}} D_3$.

Piszemy $D = D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2$, jeśli istnieje $D_3$ takie, że $D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2 \sqsubset D_3$. Piszemy $D = D_1 \sqcup D_2$, jeśli istnieje gałąź $P$ w $D_1$ taka, że $D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2 \sqsubset D$.

Relacje $\ll$ oraz $\sqsubset$ są częściowymi porządkami (w ustalonej rodzinie drzew). Nie będą nam potrzebne żadne specjalne operacje na drzewach (m.in. wyznaczone przez te porządki), oprócz pewnego specjalnego sumowania drzew. Niech mianowicie $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots\}$ będzie rodziną (być może nieskończoną) drzew, dobrze uporządkowaną przez relację $\sqsubset$. Przez ***sumę*** rodziny $\mathcal{D}$ rozumiemy najmniejsze drzewo, które jest przedłużeniem wszystkich drzew z $\mathcal{D}$. Tak zdefiniowaną sumę rodziny $\mathcal{D}$ oznaczamy przez $\bigsqcup \mathcal{D}$.

Wszystkie wierzchołki dowolnego drzewa można liniowo uporządkować (odpowiednio je kodując). Szczególnie ważne są dwa tego typu porządki:

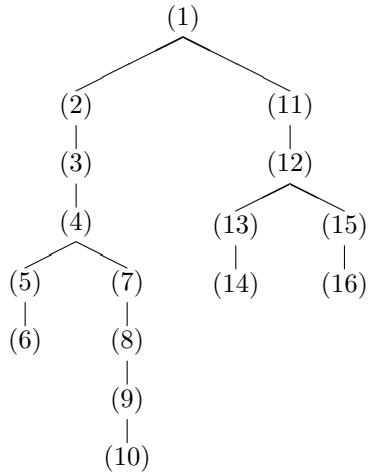
- „Porządek poprzeczny”. Niech dana będzie ściśle rosnąca funkcja $f$ ze zbioru wierzchołków drzewa $D$ w zbiór liczb naturalnych $\mathcal{N}$. Wierzchołek $x$ $f$-poprzedza wierzchołek $y$ wtedy i tylko wtedy, gdy: poziom $x$ jest mniejszy od poziomu $y$ lub, gdy $x$ i $y$ są na tym samym poziomie drzewa, $f(x) < f(y)$.

- „Porządek wzdłużny”. Niech dana będzie ściśle rosnąca funkcja $f$ ze zbioru wierzchołków drzewa $D = \langle X, R, x_0 \rangle$ w zbiór liczb naturalnych $\mathcal{N}$. Tym razem $f$-porządek wierzchołków drzewa $D$ określimy przez indukcję. Za bezpośredni $f$-następnik korzenia $x_0$ drzewa $D$ (czyli za $x_1$) bierzemy ten z elementów pierwszego poziomu drzewa, dla którego wartość funkcji $f$ jest najmniejsza. Jeśli $x_1$ nie jest liściem, to rozpatrujemy z kolei zbiór wszystkich jego bezpośrednich $R$-następników, dla znalezienia kolejnego elementu $f$-porządku, tj. elementu $x_2$: będzie to ten z bezpośrednich $R$-następników wierzchołka $x_1$, dla którego wartość funkcji $f$ jest najmniejsza. Jeśli $x_1$ jest liściem, to za następny w $f$-porządku (czyli za $x_2$) bierzemy ten z bezpośrednich $R$-następników $x_0$ różnych od $x_1$, dla którego wartość funkcji $f$ jest najmniejsza. Przypuśćmy, że wierzchołki $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ zostały już ustawione w ciąg liniowy. Spośród bezpośrednich $R$-następników wierzchołka $x_{n-1}$ wybieramy ten, dla którego wartość funkcji $f$ jest najmniejsza i niech będzie to kolejny wierzchołek w budowanym $f$-porządku, tj. wierzchołek $x_n$. Jeśli wierzchołek ten nie jest liściem, to rozpatrujemy z kolei zbiór wszystkich jego bezpośrednich $R$-następników, dla znalezienia kolejnego elementu $f$-porządku, tj. elementu $x_{n+1}$. Jeśli $x_n$ jest liściem, to za następny w $f$-porządku (czyli za $x_{n+1}$) bierzemy ten z bezpośrednich $R$-następników $x_{n-1}$ różnych od $x_n$, dla którego wartość funkcji $f$ jest najmniejsza.

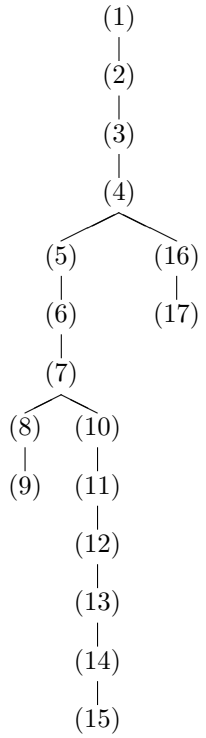
Rozważać będziemy tzw. ***drzewa znakowane***. Przez ***drzewo znakowane*** (elementami ze zbioru $L$) rozumiemy parę uporządkowaną $(D, f)$, gdzie $D$ jest drzewem, a $f$ jest funkcją ze zbioru wierzchołków drzewa $D$ w zbiór $L$. Zwykle $L$ będzie pewnym zbiorem formuł. Znakowanie drzew formułami pozwala w precyzyjny sposób mówić o ***wystąpieniach*** danej formuły w drzewie.

Graficzne reprezentacje drzew są rysunkami, na których wierzchołki (jakoś znakowane — punktami, liczbami, formułami, itd.) połączone są liniami, odpowiadającymi krawędziom. Przy tym, jeśli $\langle X, R, x_0 \rangle$ jest drzewem, to na rysunku zaznaczamy tylko krawędzie należące do $R - R^2$ (przy tym, poprzedniki $R$ umieszczane są nad następnikami).

Dla przykładu, pokażmy dwa rysunki drzew:

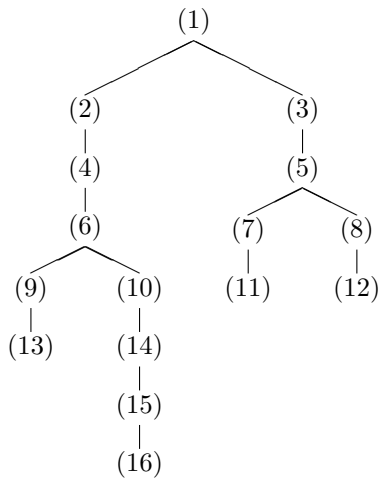


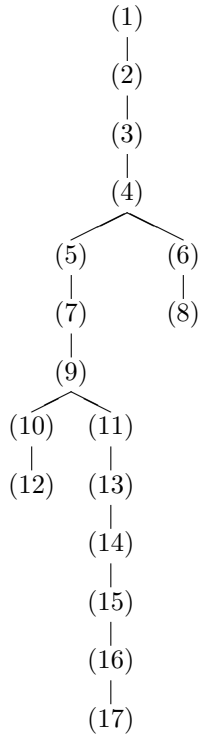

W tym drzewie są cztery gałęzie, zaczynające się w korzeniu drzewa (wierzchołek oznaczony przez $(1)$) i kończące się liśćmi drzewa: $(6)$, $(10)$, $(14)$ oraz $(16)$. Pień drzewa jest tu zbiorem jednoelementowym: $\{(1)\}$.




W drzewie powyższym są trzy gałęzie, zaczynające się w korzeniu drzewa (wierzchołek oznaczony przez $(1)$), kończące się liśćmi: $(9)$, $(15)$ oraz $(17)$. Pień drzewa stanowią wierzchołki o numerach: $(1)$, $(2)$, $(3)$ oraz $(4)$.

W obu powyższych drzewach wierzchołki ponumerowano wedle porządku wzdłużnego. Popatrzmy, dla porównania, na takie same porządki drzewowe, których wierzchołki ponumerowane są wedle porządku poprzecznego:

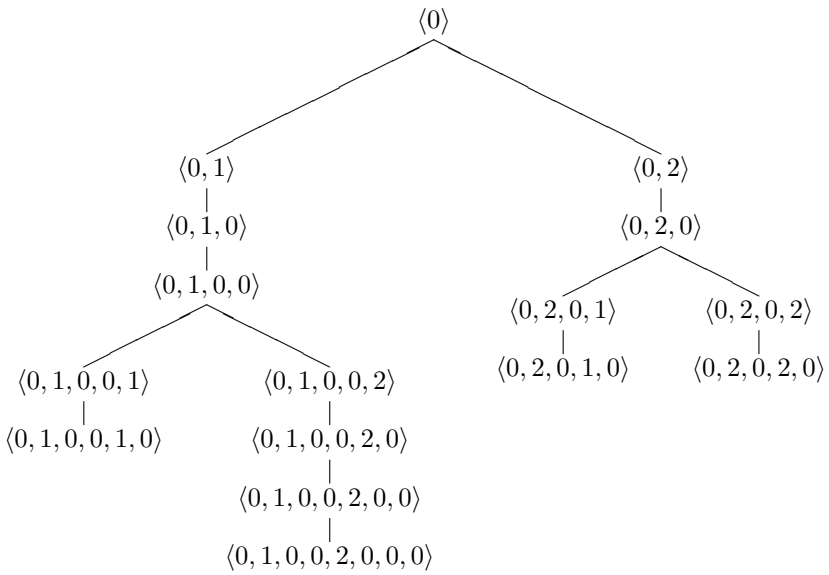





Wierzchołki nw-drzewa mogą być także kodowane ***ciągami*** liczb (tu: 0, 1 oraz 2) np. wedle następującej zasady:

- korzeń drzewa otrzymuje kod $\langle 0 \rangle$
- jeśli wierzchołek o kodzie $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ ma dokładnie jednego bezpośredniego potomka, to ów potomek otrzymuje kod $\langle n_1, \ldots, n_m, 0 \rangle$
- jeśli wierzchołek o kodzie $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków, to otrzymują oni kody: $\langle n_1, \ldots, n_m, 1 \rangle$ oraz $\langle n_1, \ldots, n_m, 2 \rangle$.

Można też użyć w kodowaniach jedynie dwóch liczb, np. 0 i 1.
Wierzchołki pierwszego z powyżej rozważanych drzew zakodowane zostaną tak:



# 2. Preliminaria logiczne

Podajemy podstawowe definicje dotyczące składni i semantyki KRZ oraz KRP.

## 2.1. Klasyczny Rachunek Zdań

Podajemy podstawowe definicje dotyczące składni i semantyki KRZ.

### 2.1.1. Składnia języka KRZ

W skład ***alfabetu*** języka KRZ wchodzą:

- ***zmienne zdaniowe***: $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (zbiór wszystkich tych zmiennych oznaczymy przez $V_{KRZ}$)
- ***spójniki (prawdziwościowe)***:
  - $\neg$ (***negacja***),
  - $\wedge$ (***koniunkcja***),
  - $\vee$ (***alternatywa*** [nierozłączna]),
  - $\rightarrow$ (***implikacja*** [materialna]),
  - $\equiv$ (***równoważność*** [materialna]).
- ***symbole pomocnicze***: (,) — nawias lewy oraz nawias prawy.

Zbiór $F_{KRZ}$ wszystkich ***formuł*** języka KRZ definiowany jest indukcyjnie:

- (1) każda zmienna zdaniowa jest formułą
- (2) jeśli $\alpha \in F_{KRZ}$, to $\neg(\alpha)$ jest elementem $F_{KRZ}$
- (3) jeśli $\alpha \in F_{KRZ}$ oraz $\beta \in F_{KRZ}$, to: $(\alpha) \wedge (\beta) \in F_{KRZ}$, $(\alpha) \vee (\beta) \in F_{KRZ}$, $(\alpha) \rightarrow (\beta) \in F_{KRZ}$, $(\alpha) \equiv (\beta) \in F_{KRZ}$
- (4) każda formuła KRZ jest bądź zmienną zdaniową, bądź powstaje z formuł KRZ poprzez zastosowanie reguły (2) lub reguły (3).

Zwróćmy uwagę, że procedura rozstrzygania, czy dowolny (skończony) ciąg elementów alfabetu języka KRZ jest formułą KRZ jest ***efektywna***: w skończonej liczbie kroków (biorących pod uwagę jedynie kształt symboli oraz ich kolejność) daje odpowiedź.

Przyjmiemy pewne umowy notacyjne:

- opuszczamy nawiasy otaczające pojedyncze zmienne (np. zamiast $\neg(p_i)$ piszemy $\neg p_i$);
- zmienne zdaniowe zapisujemy zwykle: $p$, $q$, $r$, $s$, $t$;
- symbole $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ oznaczają dowolne formuły języka KRZ;
- symbole $X$, $Y$, $Z$ oznaczają (w tym rozdziale) dowolne zbiory formuł języka KRZ.

### 2.1.2. Semantyka języka KRZ

Niech dane będą dwa różne przedmioty: 0 oraz 1. Nieważne, czym one są, istotne jest aby były różne. Pierwszy z nich (tj. 0) możesz nazwać ***Fałszem*** (albo np. ***Ściemą***), drugi (tj. 1) możesz nazwać ***Prawdą*** (albo np. ***Odlotem***). Elementy zbioru $\{0, 1\}$ nazwiemy ***wartościami logicznymi***.

***Wartościowaniem*** formuł w KRZ nazywamy każdą funkcję $h : F_{KRZ} \to \{0, 1\}$ taką, że:

- $h(\neg(\alpha)) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 0$
- $h((\alpha) \wedge (\beta)) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 1$ i $h(\beta) = 1$
- $h((\alpha) \vee (\beta)) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 0$ i $h(\beta) = 0$
- $h((\alpha) \to (\beta)) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 1$ i $h(\beta) = 0$
- $h((\alpha) \equiv (\beta)) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = h(\beta)$.

UWAGA. Inna możliwość (którą zaraz przedstawimy) wprowadzenia pojęcia wartościowania jest następująca:

- ***wartościowaniem zmiennych zdaniowych*** (wzz) nazywamy dowolną funkcję $h : V_{KRZ} \to \{0, 1\}$ (a więc dowolny nieskończony ciąg o wyrazach 0 i 1)
- ***wartość*** formuły przy danym wzz określamy indukcyjnie, korzystając z wybranych funkcji prawdziwościowych skojarzonych ze spójnikami prawdziwościowymi.

Dowolną funkcję, która każdemu skończonemu ciągowi wartości logicznych przyporządkowuje wartość logiczną nazywamy ***funkcją prawdziwościową***.

| arg | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Pierwsza kolumna tabeli podaje wszystkie wartości argumentu, kolumny o numerach 1–4 podają wartość dla tego argumentu każdej z czterech jednoargumentowych funkcji prawdziwościowych. Funkcja o wartościach z kolumny 3 nazywana jest ***Negacją***. Oznaczmy ją symbolem $Ng$. Zatem:

$$Ng(0) = 1, \qquad Ng(1) = 0.$$

| $a_1$ | $a_2$ | 1 | **2** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | **8** | 9 | **10** | 11 | 12 | 13 | **14** | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Pierwsze dwie kolumny podają wszystkie układy wartości argumentów, kolumny o numerach 1–16 podają wartość dla tego układu argumentów każdej z szesnastu dwuargumentowych funkcji prawdziwościowych.

Wprowadzamy oznaczenia dla niektórych z tych funkcji:

| Funkcja o wartościach z kolumny | nazywana jest | i oznaczana |
|---|---|---|
| 2 | ***Koniunkcją*** | $Kn$ |
| 8 | ***Alternatywą*** | $Al$ |
| 14 | ***Implikacją*** | $Im$ |
| 10 | ***Równoważnością*** | $Rw$ |

Jeśli $w$ jest wzz, to niech $w_i$ oznacza $i$-ty element ciągu $w$. Funkcja $Val : (F_{KRZ} \times \{0,1\}^N) \longrightarrow \{0,1\}$ przyporządkowuje każdej parze $(\alpha, w)$ złożonej z formuły $\alpha$ oraz wzz $w$ jednoznacznie wyznaczoną wartość logiczną, nazywaną ***wartością formuły*** $\alpha$ ***przy wzz*** $w$.

Definicja funkcji $Val$ jest indukcyjna (tzw. ***indukcja strukturalna*** po budowie formuły $\alpha$):

- $Val(p_i, w) = w_i$;
- $Val(\neg(\alpha), w) = Ng(Val(\alpha, w))$;
- $Val((\alpha) \wedge (\beta), w) = Kn(Val(\alpha, w), Val(\beta, w))$;
- $Val((\alpha) \vee (\beta), w) = Al(Val(\alpha, w), Val(\beta, w))$;
- $Val((\alpha) \rightarrow (\beta), w) = Im(Val(\alpha, w), Val(\beta, w))$;
- $Val((\alpha) \equiv (\beta), w) = Rw(Val(\alpha, w), Val(\beta, w))$.

Powinno być jasne, że każda funkcja jednoargumentowa postaci $Val(\ , w) : F_{KRZ} \rightarrow \{0,1\}$ dla pewnego wzz $w$ jest wartościowaniem formuł języka KRZ.

Niech funkcja $\pi : F_{KRZ} \times \{0,1\} \rightarrow F_{KRZ}$ będzie określona warunkiem: $\pi(\alpha, w) = \alpha$ dla dowolnej formuły $\alpha$ oraz wzz $w$.

Każde wartościowanie $h$ formuł języka KRZ można jednoznacznie przedstawić w postaci:

$$h(\pi(\alpha, w)) = Val(\alpha, w).$$

Mamy zatem wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między obydwoma sposobami wprowadzania pojęcia wartościowania formuł języka KRZ. Możemy posługiwać się każdym z nich, co też będziemy czynić.

Wartość formuły przy danym wzz zależy tylko od skończonej liczby elementów tego wzz (bo każda formuła zawiera jedynie skończoną liczbę zmiennych). Ustalanie wartości formuły przy danym wzz jest procedurą ***obliczalną***: dla dowolnej formuły oraz wzz można w skończonej liczbie prostych, mechanicznych kroków (jawnie opisanych w podanych wyżej tabelkach) ustalić wartość tej formuły przy tym wzz. Przy tym, jeśli formuła $\alpha$ zawiera $n$ zmiennych zdaniowych, to przy ustalaniu jej wartości wystarczy brać pod uwagę najwyżej $2^n$ wzz.

***Tautologią KRZ*** nazywamy każdą formułę języka KRZ, która przy każdym wartościowaniu przyjmuje wartość 1. Tak więc, formuła $\alpha$ ***jest*** tautologią KRZ, gdy dla każdego wartościowania $h$, mamy: $h(\alpha) = 1$. Formuła $\alpha$ ***nie jest*** tautologią KRZ, gdy istnieje wartościowanie $h$ takie, że $h(\alpha) = 0$. Tautologiami KRZ są zatem dokładnie te formuły $\alpha$, dla których $Val(\alpha, w) = 1$ dla każdego wzz $w$. Formuła $\alpha$ nie jest tautologią KRZ, gdy istnieje co najmniej jedno wzz $w$ takie, że $Val(\alpha, w) = 0$.

Formuły, które przy każdym wartościowaniu przyjmują wartość 0 nazywamy ***kontrtautologiami*** KRZ. Formuła $\alpha$ ***nie jest*** zatem kontrtautologią KRZ, gdy przy co najmniej jednym wartościowaniu $h$ mamy: $h(\alpha) = 1$.

Wszystkie formuły języka KRZ podzielić można na trzy klasy:

- tautologie KRZ
- kontrtautologie KRZ
- pozostałe formuły (nie będące ani tautologiami, ani kontrtautologiami).

Wynikanie logiczne to relacja między zbiorami formuł. Powiemy, że zbiór $Y$ ***wynika logicznie*** (w KRZ) ze zbioru $X$, gdy przy każdym wartościowaniu, przy którym wszystkie formuły zbioru $X$ mają wartość 1, również wszystkie formuły zbioru $Y$ mają wartość 1.

Zbiór $Y$ ***nie*** wynika logicznie ze zbioru $X$, gdy istnieje co najmniej jedno wartościowanie, przy którym wszystkie formuły z $X$ mają wartość 1, a pewna formuła ze zbioru $Y$ ma wartość 0.

Gdy $Y$ wynika logicznie z $X$, to piszemy $X \models_{krz} Y$, a gdy $Y$ jest zbiorem jednoelementowym $\{\alpha\}$, to piszemy $X \models_{krz} \alpha$ (mówimy wtedy krótko, że formuła $\alpha$ wynika logicznie ze zbioru $X$).

Tautologie KRZ to dokładnie te formuły, które wynikają logicznie ze zbioru pustego $\emptyset$.

Mówimy, że zbiór $X$ formuł języka KRZ jest:

- ***semantycznie niesprzeczny***, gdy istnieje wartościowanie $h$ takie, że $h(\alpha) = 1$ dla wszystkich $\alpha \in X$;
- ***semantycznie sprzeczny***, gdy $X$ nie jest semantycznie niesprzeczny.

Z powyższej definicji wynika, że $X$ jest semantycznie sprzeczny, gdy dla każdego wartościowania $h$ oraz dla wszystkich $\alpha \in X$ mamy: $h(\alpha) = 0$.

Aby pokazać, że $X$ jest semantycznie niesprzeczny wystarczy znaleźć ***jedno*** wartościowanie $h$ takie, że dla wszystkich $\alpha \in X$ mamy: $h(\alpha) = 1$.

Aby pokazać, że $X$ jest semantycznie sprzeczny trzeba pokazać, że dla ***żadnego*** wartościowania $h$ ***nie zachodzi*** $h(\alpha) = 1$ dla wszystkich $\alpha \in X$.

***Regułą*** (regułą wnioskowania) nazywamy dowolną relację $R \subseteq 2^{F_{KRZ}} \times F_{KRZ}$, której poprzedniki są skończonymi zbiorami formuł.

Każdy układ postaci $(X, \alpha) \in R$ nazywamy ***sekwentem*** reguły $R$. Poprzedniki relacji $R$ nazywamy ***przesłankami reguły*** $R$, a następniki ***wnioskami reguły*** $R$.

Reguła $R$ jest ***niezawodna***, gdy dla każdego $(X, \alpha) \in R$ zachodzi: $X \models_{krz} \alpha$, czyli gdy $\alpha$ wynika logicznie z $X$. W przeciwnym przypadku $R$ jest ***zawodna***.

Z powyższej definicji widać, że reguła $R$ jest:

- niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy dla ***dowolnego*** jej sekwentu $(X, \alpha) \in R$ oraz ***każdego*** wartościowania, przy którym wszystkie elementy $X$ (tj. przesłanki) mają wartość 1, także $\alpha$ (tj. wniosek) ma wartość 1;
- zawodna, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: ***co najmniej jeden*** sekwent $(X, \alpha) \in R$ oraz ***co najmniej jedno*** wartościowanie przy którym wszystkie elementy $X$ mają wartość 1, a $\alpha$ ma wartość 0.

UWAGA. Reguły wnioskowania interesujące z logicznego punktu widzenia opisywane są zwięźle przez podanie kształtu wszystkich sekwentów składających się na regułę, np. tak, jak w poniższych przykładach.

Oto schematyczne zapisy kilku ważnych niezawodnych reguł wnioskowania (zapis poniższy wskazuje kształt wszystkich sekwentów poszczególnych reguł):

| | | | |
|---|---|---|---|
| (r1) | $(\{\alpha \to \beta, \alpha\}, \beta)$ | (r5) | $(\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha\}, \beta)$ |
| (r2) | $(\{\alpha \to \beta, \neg\beta\}, \neg\alpha)$ | (r6) | $(\{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha\}, \alpha \equiv \beta)$ |
| (r3) | $(\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\}, \alpha \to \gamma)$ | (r7) | $(\{\alpha \to (\beta \to \gamma)\}, (\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$ |
| (r4) | $(\{\alpha, \neg\alpha\}, \beta)$ | (r8) | $(\{(\alpha \wedge \beta) \to \gamma\}, \alpha \to (\beta \to \gamma))$ |

Regułę wnioskowania o przesłankach $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ oraz wniosku $\beta$ zapisujemy często w postaci:

$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta},$$

albo w postaci: $\dfrac{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{array}}{\beta}$

Reguła $R$ ***zachowuje własność bycia tautologią*** wtedy i tylko wtedy, gdy: dla każdego $(X, \alpha) \in R$, jeśli wszystkie elementy zbioru $X$ są tautologiami KRZ, to także $\alpha$ jest tautologią KRZ.

TWIERDZENIE. Każda reguła niezawodna zachowuje własność bycia tautologią.

DOWÓD. Niech $R$ będzie niezawodna i przypuśćmy, że nie zachowuje ona własności bycia tautologią. Istnieje zatem sekwent $(X, \alpha) \in R$ taki, że $X$ jest zbiorem tautologii, a $\alpha$ nie jest tautologią. Istnieje więc wartościowanie $h$ takie, że $h(\alpha) = 0$. Oczywiście $h(\beta) = 1$ dla każdej formuły $\beta$ z $X$. Zatem $X \nvDash \alpha$, a to jest sprzeczne z niezawodnością $R$. Zachodzi więc teza twierdzenia.

***Ćwiczenie.*** Udowodnij, że reguły (r1)-(r8) są niezawodne.

***Spójniki logiczne*** w danym języku etnicznym (tu: polskim) to wyrażenia: *i*, *lub*, *jeśli..., to...*, *nieprawda, że*, itp.

***Zdaniem prostym*** (języka etnicznego) nazywamy każde zdanie $A$ takie, że:

- żadna część $A$ nie jest zdaniem
- $A$ jest zdaniem w sensie logicznym, tj. może być prawdziwe lub fałszywe.

***Zdania złożone*** to zdania, które nie są proste. Bierzemy pod uwagę tylko złożenia zdań z użyciem spójników logicznych.

***Schematem*** zdania $A$ nazywamy formułę języka KRZ otrzymaną z $A$ poprzez zastąpienie zdań prostych zmiennymi zdaniowymi, a wyrażeń reprezentujących spójniki logiczne spójnikami prawdziwościowymi.

***Schematem wnioskowania*** złożonego ze zbioru przesłanek $\mathcal{A}$ oraz wniosku $A$ nazywamy układ $(X, \alpha)$, gdzie:

- $X$ jest zbiorem schematów zdań z $\mathcal{A}$
- $\alpha$ jest schematem $A$.

Wnioskowanie $(\mathcal{A}, A)$ nazywamy ***dedukcyjnym***, jeśli jego schemat jest sekwentem reguły niezawodnej. Wnioskowanie jest zatem dedukcyjne, gdy schemat jego wniosku wynika logicznie ze zbioru schematów jego przesłanek.

UWAGA. Pamiętaj: wnioskowania przeprowadzamy w językach etnicznych, schematy wnioskowań i reguły to konstrukcje z języka KRZ.

Mówimy, że zbiór $\mathcal{A}$ zdań języka etnicznego jest ***semantycznie niesprzeczny***, gdy zbiór schematów wszystkich zdań $\mathcal{A}$ jest semantycznie niesprzecznym zbiorem formuł języka KRZ.

Mówimy, że zbiór $\mathcal{A}$ zdań języka etnicznego jest ***semantycznie sprzeczny***, gdy zbiór schematów wszystkich zdań $\mathcal{A}$ jest semantycznie sprzecznym zbiorem formuł języka KRZ.

Mówimy, że zdanie $A$ języka etnicznego jest ***prawdą logiczną***, gdy schemat $A$ jest tautologią KRZ.

Mówimy, że zdanie $A$ języka etnicznego jest ***fałszem logicznym***, gdy schemat $A$ jest kontrtautologią KRZ.

**Twierdzenie o dedukcji wprost** (wersja semantyczna).

Dla dowolnych $X \subseteq F_{KRZ}$, $\alpha \in F_{KRZ}$, $\beta \in F_{KRZ}$ zachodzą następujące implikacje:

- Jeśli $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \beta$, to $X \models_{krz} \alpha \to \beta$.
- Jeśli $X \models_{krz} \alpha \to \beta$, to $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \beta$.

Na mocy powyższego twierdzenia (oraz praw eksportacji i importacji) reguła $\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta}$ jest niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy implikacja $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \beta$ jest tautologią KRZ.

Prawo importacji: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$
Prawo eksportacji: $((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$

***Ćwiczenie***: pokaż, że te prawa są tautologiami KRZ.

**Twierdzenie o dedukcji nie wprost** (wersja semantyczna).

Dla dowolnych $X \subseteq F_{KRZ}$, $\alpha \in F_{KRZ}$, $\beta \in F_{KRZ}$ zachodzą następujące równoważności:

- $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krz} \neg\alpha$.
- $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krz} \alpha$.

Z twierdzenia o dedukcji nie wprost korzystamy przeprowadzając dowody nie wprost (dowody ***apagogiczne***).

## 2.2. Klasyczny Rachunek Predykatów

Podajemy podstawowe definicje dotyczące składni i semantyki KRP.

### 2.2.1. Składnia języka KRP

Niech $I, J, K$ będą dowolnymi zbiorami. Rozpatrzmy alfabet $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \Sigma_5 \cup \Sigma_6$, gdzie:

$\Sigma_1 = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ — ***zmienne indywiduowe***,

$\Sigma_2 = \{P_i^{n_i}\}_{i \in I}$ $(n_i \in \mathcal{N})$ — ***predykaty***,

$\Sigma_3 = \{f_j^{n_j}\}_{j \in J}$ $(n_j \in \mathcal{N})$ — ***symbole funkcyjne***,

$\Sigma_4 = \{a_k\}_{k \in K}$ — ***stałe indywiduowe***,

$\Sigma_5 = \{\wedge, \vee, \to, \neg, \equiv, \forall, \exists\}$ — ***stałe logiczne***,

$\Sigma_6 = \{\ ,\ ,\ ,\ (\ ,\ )\}$ — ***symbole pomocnicze***.

Stosujemy następującą terminologię:

- $P_i^{n_i}$ nazywamy $n_i$-***argumentowym predykatem***,
- $f_j^{n_j}$ nazywamy $n_j$-***argumentowym symbolem funkcyjnym***,
- symbol $\forall$ nazywamy ***kwantyfikatorem generalnym***,
- symbol $\exists$ nazywamy ***kwantyfikatorem egzystencjalnym***,
- symbole: $\wedge$ (***koniunkcja***), $\vee$ (***alternatywa***), $\to$ (***implikacja***), $\neg$ (***negacja***) i $\equiv$ (***równoważność***) omówione zostały powyżej,
- symbole pomocnicze to: przecinek oraz lewy i prawy nawias.

Zbiór $\sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ nazwiemy ***sygnaturą***. W dalszym ciągu mówić będziemy o pewnej ustalonej sygnaturze $\sigma$. Zwykle rozważa się przypadek, gdy $I = J = K = N$= zbiór wszystkich liczb naturalnych.

***Wyrażeniem*** języka KRP nazywamy każdy skończony ciąg symboli alfabetu tego języka. Interesują nas jednak nie dowolne ciągi symboli języka KRP, lecz jedynie niektóre, o budowie składniowej dopuszczającej sensowne interpretacje.

Definicja ***termu*** języka KRP jest indukcyjna:

(i) wszystkie zmienne indywiduowe $x_n$ oraz wszystkie stałe indywiduowe $a_k$ są termami;

(ii) jeśli $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są dowolnymi termami, to wyrażenie $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ jest termem;

(iii) nie ma innych termów (języka KRP) prócz zmiennych indywiduowych oraz stałych indywiduowych oraz tych termów, które można skonstruować wedle reguły (ii).

Termy, w których nie występują żadne zmienne nazywamy ***termami bazowymi***.

***Formułą atomową*** języka KRP nazywamy każde wyrażenie postaci $P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_i}$ są dowolnymi termami.

Definicja ***formuły*** języka KRP jest indukcyjna:

(i) każda formuła atomowa jest formułą;

(ii) jeśli $\alpha$ jest dowolną formułą, to wyrażenia $\neg(\alpha)$, $\forall x_n\ (\alpha)$, $\exists x_n\ (\alpha)$ są formułami;

(iii) jeśli $\alpha$ i $\beta$ są dowolnymi formułami, to wyrażenia $(\alpha) \wedge (\beta)$, $(\alpha) \vee (\beta)$, $(\alpha) \rightarrow (\beta)$, $(\alpha) \equiv (\beta)$ są formułami;

(iv) nie ma innych formuł (języka KRP) prócz tych, które można utworzyć wedle reguł (i)–(iii).

Wyrażenie $\alpha$ w dowolnej formule o postaci $\forall x_n\ (\alpha)$ lub o postaci $\exists x_n\ (\alpha)$ nazywamy ***zasięgiem*** odpowiedniego kwantyfikatora.

Zmienna $x_n$ występująca na danym miejscu w formule $\alpha$ jest ***na tym miejscu związana***, jeżeli jest ona podpisana pod którymś z kwantyfikatorów lub też znajduje się w zasięgu jakiegoś kwantyfikatora, pod którym podpisana jest również zmienna $x_n$.

Jeżeli zmienna $x_n$, występująca na danym miejscu w formule $\alpha$, nie jest na tym miejscu związana, to mówimy, że jest ona ***na tym miejscu wolna w*** $\alpha$.

Mówimy, że $x_n$ jest ***zmienną wolną w*** $\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej na jednym miejscu zmienna ta jest wolna w $\alpha$.

Mówimy, że term $t$ jest ***podstawialny*** za zmienną $x_i$ do formuły $\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna $x_i$ nie znajduje się w $\alpha$ jako zmienna wolna w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego którąś ze zmiennych występujących w $\alpha$.

Formuły nie zawierające żadnych zmiennych wolnych nazywamy ***zdaniami*** (języka KRP).

Definicja operacji $S(t, x, A)$ ***podstawiania termu*** $t$ ***za zmienną*** $x_i$ (w dowolym termie $A$ lub formule $A$ języka KRP) ma postać indukcyjną (poniżej $t$ jest termem, $x_i$ jest zmienną, $a_j$ jest stałą, $\alpha$ i $\beta$ są formułami, a reszta oznaczeń jest oczywista):

- $S(t, x_i, x_j)$ jest termem $x_j$, gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, x_j)$ jest termem $t$, gdy $i = j$
- $S(t, x_i, a_j)$ jest termem $a_j$
- $S(t, x_i, f_j(t_1, \ldots, t_n))$ jest termem $f_j(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_n))$
- $S(t, x_i, P_j(t_1, \ldots, t_n))$ jest formułą $P_j(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_n))$

- $S(t, x_i, \neg(\alpha))$ jest formułą $\neg S(t, x_i, \alpha)$
- $S(t, x_i, \forall x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ S(t, x_i\alpha)$, gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, \forall x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ (\alpha)$, gdy $i = j$
- $S(t, x_i, \exists x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ S(t, x_i\alpha)$, gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, \exists x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ (\alpha)$, gdy $i = j$
- $S(t, x_i, \alpha \wedge \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \wedge S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \vee \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \vee S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \rightarrow \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \rightarrow S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \equiv \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \equiv S(t, x_i, \beta)$.

### 2.2.2. Semantyka języka KRP

Nazwiemy ***interpretacją języka o sygnaturze*** $\sigma$ dowolny układ $\langle M, \sigma, \triangle\rangle$, gdzie $M$ jest zbiorem, a $\triangle$ funkcją (***funkcją denotacji***) o dziedzinie $\sigma$, która przyporządkowuje:

- każdej stałej indywiduowej $a_k$ element $\triangle(a_k) \in M$;
- każdemu predykatowi $P_i^{n_i}$ relację $n_i$-argumentową $\triangle(P_i^{n_i}) \subseteq M^{n_i}$;
- każdemu symbolowi funkcyjnemu $f_j^{n_j}$ funkcję $n_j$-argumentową $\triangle(f_j^{n_j}) : M^{n_j} \rightarrow M$.

Wtedy ***strukturami relacyjnymi sygnatury*** $\sigma$ są dowolne układy $\langle M, \triangle[\sigma]\rangle$, gdzie $\triangle$ jest funkcją denotacji, a $\triangle[\sigma]$ oznacza ciąg (indeksowany elementami zbioru $I \cup J \cup K$) wszystkich wartości funkcji $\sigma$. Jeśli $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ jest strukturą relacyjną, to $M$ nazywamy uniwersum $\mathfrak{M}$.

***Wartościowaniem zmiennych w uniwersum*** $M$ nazywamy dowolny nieskończony przeliczalny ciąg $w = \langle w_n\rangle$ elementów zbioru $M$. Gdy

$$w = \langle w_n\rangle = \langle w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots\rangle$$

jest wartościowaniem w $M$ oraz $m \in M$, to przez $w_i^m$ oznaczamy wartościowanie:

$$\langle w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, m, w_{i+1}, \ldots\rangle.$$

Jeśli $t$ jest termem sygnatury $\sigma$, $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ strukturą relacyjną sygnatury $\sigma$ oraz $w = \langle w_i\rangle$ jest wartościowaniem zmiennych w $M$, to ***wartość termu*** $t$ ***w strukturze*** $\langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ ***przy wartościowaniu*** $w$, oznaczana przez $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t)$ określona jest indukcyjnie:

- gdy $t$ jest zmienną $x_i$, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = w_i$;
- gdy $t$ jest stałą $a_k$, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(a_k)$;
- gdy $t$ jest termem złożonym postaci $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są termami, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(f_j^{n_j})(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_{n_j}))$.

Można pokazać, że wartość termu przy danym wartościowaniu zmiennych zależy jedynie od wartości nadanych przy tym wartościowaniu zmiennym występującym w rozważanym termie.

Niech $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ będzie strukturą relacyjną sygnatury $\sigma$, $w$ wartościowaniem w $M$, a $\alpha$ formułą sygnatury $\sigma$. Definicja relacji $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ ***spełniania formuły*** $\alpha$ ***w strukturze*** $\mathfrak{M}$ ***przez wartościowanie*** $w$ ma następującą postać indukcyjną:

$\mathfrak{M} \models_w P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi

$$\triangle(P_i^{n_i})(\triangle_w(t_1), \ldots, \triangle_w(t_{n_i}));$$

$\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \wedge (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$;

$\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \vee (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub $\mathfrak{M} \models_w \beta$;

$\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \rightarrow (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \beta$;

$\mathfrak{M} \models_w \neg(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$;

$\mathfrak{M} \models_w \forall x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla każdego $m \in M$;

$\mathfrak{M} \models_w \exists x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla pewnego $m \in M$.

***Ćwiczenie.*** Podaj definicję dla przypadku $\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \equiv (\beta)$.

Jeśli $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich $\alpha$ ze zbioru $X$, to mówimy, że $\mathfrak{M}$ jest ***modelem*** $X$ i piszemy $\mathfrak{M} \models X$. Mówimy, że $\alpha$ ***wynika logicznie*** z $X$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru $X$ jest też modelem $\{\alpha\}$. Piszemy wtedy $X \models_{krp} \alpha$. Ogólniej, mówimy, że ze zbioru $X$ ***wynika logicznie*** (na gruncie KRP) zbiór $Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru $X$ jest też modelem zbioru $Y$. Piszemy wtedy $X \models_{krp} Y$. Jeśli nie zachodzi $X \models_{krp} Y$, to piszemy $X \not\models_{krp} Y$. Podobnie, jeśli nie zachodzi $X \models_{krp} \alpha$, to piszemy $X \not\models_{krp} \alpha$

***Tautologią*** (klasycznego rachunku predykatów sygnatury $\sigma$) nazywamy każdą formułę (sygnatury $\sigma$), która jest prawdziwa we wszystkich strukturach relacyjnych (sygnatury $\sigma$).

Jeśli $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich $\alpha$ ze zbioru $\Psi$, to mówimy, że $\mathfrak{M}$ jest ***modelem*** $\Psi$ i piszemy $\mathfrak{M} \models \Psi$. Mówimy, że $\alpha$ ***wynika logicznie*** z $\Psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model $\Psi$ jest też modelem $\{\alpha\}$.

***Uwaga notacyjna.*** W dalszym ciągu będziemy czasem używać pewnych, powszechnie stosowanych, uproszczeń notacyjnych. Omówione zostaną one podczas wykładu. W tym miejscu zwróćmy natomiast uwagę na różne konteksty użycia symbolu „$\models$" i na znaczenia odnośnych wyrażeń zawierających ten symbol (tu $X$ i $Y$ są dowolnymi zbiorami formuł języka KRP, $\alpha$ dowolną formułą tego języka, $\mathfrak{M}$ dowolną strukturą relacyjną (ustalonej sygnatury), a $w$ dowolnym wartościowaniem ):

- $\mathfrak{M} \models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla wszystkich $w$.
- $\mathfrak{M} \not\models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$ dla co najmniej jednego $w$.
- $\mathfrak{M} \models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich $\alpha \in X$.
- $\mathfrak{M} \models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\alpha \in X$ oraz dla wszystkich $w$: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.
- $\mathfrak{M} \not\models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\alpha \in X$ taka, że $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.
- $\mathfrak{M} \not\models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\alpha \in X$ oraz $w$ takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.
- $X \models_{krp} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej struktury $\mathfrak{M}$: jeśli $\mathfrak{M} \models X$, to $\mathfrak{M} \models Y$.
- $X \not\models_{krp} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models Y$.
- $X \models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej struktury $\mathfrak{M}$: jeśli $\mathfrak{M} \models X$, to $\mathfrak{M} \models \alpha$.
- $X \not\models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.
- $X \not\models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie $w$ takie, że: $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.

***Uwaga terminologiczna.*** W polskiej literaturze przedmiotu terminów ***struktura relacyjna***, ***system relacyjny*** oraz ***struktura algebraiczna*** używa się wymiennie. Gdy sygnatura nie zawiera predykatów, to mówimy o ***algebrach***, gdy zaś sygnatura nie zawiera ani stałych ani symboli funkcyjnych, to mówimy o strukturach relacyjnych ***czystych***.

Przypomnijmy kilka twierdzeń dotyczących własności pojęć semantycznych. Dowody przeprowadza się przez indukcję strukturalną po budowie wyrażeń (termów i formuł), zob. np. Batóg 2003.

TWIERDZENIE 2.2.2.1.

Niech $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ będą wartościowaniami w uniwersum $M$ struktury $\langle M, \triangle[\sigma] \rangle$. Jeżeli $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych występujących w termie $t$, to:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t).$$

TWIERDZENIE 2.2.2.2.

Jeżeli $w = \langle w_n \rangle$ i $v = \langle v_n \rangle$ są wartościowaniami w uniwersum $M$ struktury $\langle M, \triangle[\sigma] \rangle$ oraz:

$$v = \langle w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle,$$

to:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t')) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t').$$

TWIERDZENIE 2.2.2.3.

Niech $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ będą wartościowaniami w uniwersum $M$ struktury $\langle M, \triangle[\sigma] \rangle$. Jeżeli $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły $\alpha$, to:

$$\mathfrak{M} \models_w \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_v \alpha.$$

TWIERDZENIE 2.2.2.4.

Jeżeli $\alpha$ jest zdaniem, a $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ są dowolnymi wartościowaniami w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, to:

$$\mathfrak{M} \models_w \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_w \alpha.$$

TWIERDZENIE 2.2.2.5.

Jeśli $\alpha$ jest zdaniem, to następujące warunki są równoważne:

- (1) Istnieje wartościowanie $w = \langle w_n \rangle$ w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ takie, że $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.
- (2) Dla każdego wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ mamy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.

TWIERDZENIE 2.2.2.6.

Jeśli $t$ jest termem podstawialnym za zmienną $x_i$ do $\alpha$, a $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ są wartościowaniami w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ oraz

$$v = \langle w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle,$$

to:

$$\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_v \alpha.$$

TWIERDZENIE 2.2.2.7.

Relacja $\models_{krp}$ ma następujące własności:

- (1) $\models_{krp}$ jest zwrotna: $X \models_{krp} X$ dla każdego $X$.
- (2) $\models_{krp}$ jest przechodnia: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $Y \models_{krp} Z$, to $X \models_{krp} Z$, dla wszystkich $X$, $Y$, $Z$.

- (3) $\models_{krp}$ jest monotoniczna względem pierwszego argumentu: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $X \subseteq Z$, to $Z \models_{krp} Y$.
- (4) $\models_{krp}$ jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, to $X \models_{krp} Z$.
- (5) $\emptyset \models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha$ jest tautologią KRP.

***Regułą*** (regułą wnioskowania) nazywamy dowolną relację $R \subseteq 2^{F_{KRP}} \times F_{KRP}$, której poprzedniki są skończonymi zbiorami formuł.

Każdy układ postaci $(X, \alpha) \in R$ nazywamy ***sekwentem*** reguły $R$. Poprzedniki relacji $R$ nazywamy ***przesłankami reguły*** $R$, a następniki ***wnioskami reguły*** $R$.

Reguła $R$ jest ***niezawodna***, gdy dla każdego $(X, \alpha) \in R$ zachodzi: $X \models_{krp} \alpha$, czyli gdy $\alpha$ wynika logicznie z $X$. W przeciwnym przypadku $R$ jest ***zawodna***.

Reguła $R$ ***zachowuje własność bycia tautologią*** wtedy i tylko wtedy, gdy: dla każdego $(X, \alpha) \in R$, jeśli wszystkie elementy zbioru $X$ są tautologiami KRP, to także $\alpha$ jest tautologią KRP.

Każda reguła niezawodna zachowuje własność bycia tautologią.

Przez ***regułę generalizacji*** rozumiemy następującą regułę wnioskowania:

$$(RG) \quad \frac{\alpha}{\forall x_n\ \alpha}.$$

Reguła odrywania:

$$(RO) \quad \frac{\alpha \to \beta, \quad \alpha}{\beta}$$

jest znana z KRZ.

Reguła odrywania oraz reguła generalizacji są regułami niezawodnymi w KRP. W konsekwencji, zachowują także własność bycia tautologią KRP.

Również następujące reguły są niezawodne w KRP:

- $$\frac{\forall x_n\ \alpha}{S(t, x_n, \alpha)},$$
  o ile term $t$ jest podstawialny za $x_m$ w $\alpha$.
- $$\frac{S(t, x_n, \alpha)}{\exists x_n\ \alpha},$$
  o ile term $t$ jest podstawialny za $x_m$ w $\alpha$.
- $$\frac{\forall x_n\ (\alpha \to \beta)}{\alpha \to \forall x_n\ \beta},$$
  o ile $x_n$ nie jest wolna w $\alpha$.
- $$\frac{\forall x_n\ (\alpha \to \beta)}{\exists x_n\ \alpha \to \beta},$$
  o ile $x_n$ nie jest wolna w $\beta$.

Twierdzenia o dedukcji (w wersji semantycznej) mają w KRP podobna postać, jak w KRZ:

TWIERDZENIE 2.2.2.8. ***Twierdzenie o dedukcji wprost*** (wersja semantyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł $X$ oraz formuł $\alpha$ i $\beta$ zachodzi następująca równoważność:

$$X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \beta \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } X \models_{krp} \alpha \rightarrow \beta.$$

TWIERDZENIE 2.2.2.9. ***Twierdzenie o dedukcji nie wprost*** (wersja semantyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł $X$ oraz formuł $\alpha$ i $\beta$ zachodzą następujące równoważności:

- (a) $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krp} \neg\alpha$.
- (b) $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krp} \alpha$.

# 3. Uwagi historyczne o metodzie tablic analitycznych

Pierwsze systematyczne użycia omawianej metody (około pół wieku temu) wiąże się zwykle z nazwiskami E. Betha, K. Schütte'go, J. Hintikki oraz S. Kripke'go. Lewis Carroll stosował prototyp metody tablic analitycznych w roku 1896.

Informacje historyczne znaleźć można np. w: *Handbook of Tableau Methods* 1999, Marciszewski, Murawski 1995, Annelis 1990. Największą popularność metoda ***tablic analitycznych*** zyskała dzięki pracom Raymonda Smullyana (np. Smullyan 1968) oraz Richarda Jeffreya (np. Jeffrey 1991). Logicy polscy także dość wcześnie zajmowali się (różnymi odmianami) tablic analitycznych (zobacz np. Rasiowa, Sikorski 1960, Lis 1960, Pawlak 1965).

Istnieją związki omawianej metody z niektórymi wcześniejszymi konstrukcjami używanymi podczas tworzenia się paradygmatu logiki pierwszego rzędu w wieku dwudziestym.

O zastosowaniach metody tablic analitycznych (np. w automatycznym dowodzeniu twierdzeń oraz w badaniu poprawności programów) informuje obszernie np. *Handbook of Automated Reasoning* 2001. Zwięzłe informacje znaleźć można np. w Ben-Ari 2005.

Wśród polskich podręczników stosujących metodę tablic analitycznych szczególnie godna polecenia jest książka Suchonia i Porębskiej 1991.

# Wykorzystywana literatura


Annelis, I.A. 1990. From Semantic Tableaux to Smullyan Trees: A History of the Development of the Falsifiability Tree Method. *Modern Logic* **1**, 36–69.

Bell, J.L., Machover, M. 1977. *A Course in Mathematical Logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam New York Oxford.

Beth, E.W. 1955. *Semantic Entailment and Formal Derivability.* Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van wetenschapen, afd. letterkunde, new series, vol. **18**, no. **13**, Amsterdam.

Fitting, M. 1990. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving.* Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong.

Gentzen, G. 1935. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* **39**, 176–210, 405–431.

Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary Formal Logic.* McGraw-Hill Book Company.

*Handbook of Automated Reasoning.* 2001. A. Robinson, A. Voronkov (eds.), Elsevier, Amsterdam London New York Oxford Paris Shannon Tokyo, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

*Handbook of Tableau Methods.* 1999. Edited by: D'Agostino, M., Gabbay, D.M., Hähnle, R., Posegga, J., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.

Hintikka, J. 1955. Form and Content in Quantification Theory. *Acta Philosophica Fennica* **8**, 7–55.

Hodges, W. 1977. *Logic.* Pelican Books.

Howson, C. 1997. *Logic with trees.* Routledge, London and New York.

Jeffrey, R. 1991. *Formal Logic: Its Scope and Limits.* McGraw-Hill, New York.

Kleene, S.C. 1967. *Mathematical Logic.* John Wiley & Sons, Inc. New York London Sydney.

Kripke, S. 1959. A Completeness Theorem in Modal Logic. *Journal of Symbolic Logic* **24**, 1–14.

Lis, Z. 1960. Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne. *Studia Logica* **X**, 39–60.

Marciszewski, W. 2004–2005. *Logika 2004/2005.* Teksty wykładów zamieszczone na stronie:
www.calculemus.org/lect/logika04-05/index.html

Marciszewski, W., Murawski, R. 1995. *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective.* Rodopi, Amsterdam – Atlanta.

Nerode, A., Shore, R.A. 1997. *Logic for Applications.* Graduate Texts in Computer Science, Springer.

Pawlak, Z. 1965. *Automatyczne dowodzenie twierdzeń.* Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa (seria: *Biblioteczka Matematyczna*, **19**).

Olszewski, A. Wykład z logiki dla studentów pierwszego roku.
http://www.cyf-kr.edu.pl/∼atolszad/dydaktyka.php

Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Priest, G. 2001. *An Introduction to Non-Classical Logic.* Cambridge University Press.

Quine, W.V. 1955. A proof procedure for quantification theory. *The Journal of Symbolic Logic* Volume **20**, Number **2**, 191–149.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1960. On the Gentzen Theorem. *Fundamenta Mathematicae* **48**, 58–69.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The Mathematics of Metamathematics.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Smullyan, R. 1968. *First-Order Logic.* Springer Verlag, Berlin.

Schütte, K. 1956. Ein System des verknüpfenden Schliessens. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschungen* **2**, 56–67.

Trzęsicki, K. 1994. *Elementy logiki dla humanistów.* Warszawa.

Wiśniewski, A. Logika I.

http://www.staff.amu.edu.pl/∼p_lup/aw_pliki/logika_1/

Wiśniewski, A. Logika II.

http://www.staff.amu.edu.pl/∼p_lup/aw_pliki/logika_2/

Wang, H. 1960. Toward Mechanical Mathematics. *IBM Journal Research and Development* **4**, 2–22.

* * *

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl