Logika Radosna 1

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

Semantyka KRZ

Cel

Cel tych zajęć jest skromny. Mają one np. wykształcić umiejętności:

- odróżniania uzasadnień opartych na wynikaniu logicznym (a więc na stosowaniu niezawodnych reguł wnioskowania) od innych typów uzasadnień (opartych np. na myśleniu życzeniowym, odwoływaniu się do autorytetu, argumentach opartych na prośbach lub groźbach, itd.);
- wykrywania sprzeczności w tekstach;
- przeprowadzania prostych dowodów (w szczególności, dowodów apagogicznych).

Proszę pamiętać, że kultura logiczna należy do rudymentów wykształcenia każdej Euroazjatki.

Przykłady

W każdym z poniższych przykładów postaraj się rozstrzygnąć, czy przy uznaniu przesłanek skłonna byłabyś uznać również wniosek zaznaczony na niebiesko. **Ważne**: jak **uzasadnisz** swoje rozstrzygnięcia?

- Jestem piękna, skoro jestem piękna i młoda.
- Jestem piękna i młoda, skoro jestem piękna.
- Zwierzyna jest na pierwszej lub na drugiej ścieżce. Ale na pierwszej ścieżce nie ma Zwierzyny. Zwierzyna jest zatem na drugiej ścieżce.
- Myślę, więc jestem.
- Jeśli myślę, to jestem. No i przecież myślę. A zatem jestem.
- Uszy są krótsze od Ogona. A zatem Ogon jest dłuższy od Uszu.
- Jest człowiek, jest problem. A zatem: nie ma człowieka, nie ma problemu.

Przykłady

- Nietoperze są ssakami, bo nie mają piór.
- Jeśli dziś była wypłata, to mój Zygfryd już jest pijany. Ale przecie — chwała Panu Najwyższemu! — mój Zygfryd nie jest pijany. Znaczy, psiakość, nie było dziś wypłaty.
- Wieloryby, drogie dzieci, to takie bardzo, bardzo duże Ryby, jak sama nazwa wskazuje. Wszystkie Ryby żyją w wodzie. Gdzie zatem żyją Wieloryby, kto nam powie, może ty, Jasiu? Nie wiesz? No przecież to takie proste: Wieloryby żyją w wodzie.
- Żadna Mucha nie jest Pająkiem. Ale wszystkie Muchy są Owadami. Zdziwicie się dzieci, ale stąd wynika, że Pająki nie są Owadami.
- Uczyłam się. Zdam ten egzamin.

Prawidłowe rozwiązania zostaną podane w trakcie kursu.

Plan

- Dzisiaj: wprowadzenie.
- Semantyka Klasycznego Rachunku Zdań (KRZ).
- Dowody założeniowe w KRZ.
- Semantyka Klasycznego Rachunku Predykatów (KRP).
- Analiza argumentacji.

Materiały dydaktyczne będą dostępne na stronie Zakładu Logiki Stosowanej UAM:

www.logic.amu.edu.pl

Tam także: linki do stron poświęconych logice matematycznej.

Konwersatorium kończy się zaliczeniem.

Polecana literatura

- Omyła, M. 1995. *Zarys logiki.* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
- Stanosz, B. 2000[11]. *Ćwiczenia z logiki.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Szymanek, K. 2001. *Sztuka argumentacji. Słownik terminologiczny.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Szymanek, K., Wieczorek, K.A., Wójcik, A. 2003. *Sztuka argumentacji. Ćwiczenia w badaniu argumentów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Tokarz, M. 2006. *Argumentacja. Perswazja. Manipulacja. Wykłady z teorii komunikacji.* Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk.

Czym jest logika?

Logika jest usystematyzowanym zestawem niezawodnych reguł wnioskowania.

Teraz trzeba objaśnić pojęcia:

- wnioskowania
- reguły wnioskowania
- niezawodnej reguły wnioskowania.

Wnioskowaniem (w języku etnicznym) nazywamy dowolny układ złożony ze zbioru zdań (przesłanek) oraz zdania (wniosku).

Ograniczamy się przy tym do zdań stwierdzających zachodzenie jakichś stanów rzeczy (wykluczając np.: pytania, prośby, przekleństwa, rozkazy, itd.).

System logiczny

Systemem logicznym nazywamy trójkę uporządkowaną (L, C, S), gdzie:

- L jest **językiem** systemu;
- C jest **operatorem konsekwencji**;
- S jest **semantyką** systemu.

L jest (precyzyjnie określonym) językiem formalnym. C jest funkcją przyporządkowującą każdemu zbiorowi X formuł z L zbiór $C(X)$ wszystkich logicznych konsekwencji X. S jest pewną klasą systemów relacyjnych (układów złożonych ze zbioru obiektów oraz wiążących je relacji).

Jest nieskończenie wiele systemów logicznych. Poznamy jeden: system założeniowy Klasycznego Rachunku Zdań.

Język systemu i jego stałe logiczne

W języku dowolnego systemu logicznego wyróżnia się następujące typy wyrażeń:

- funktory (w tym: stałe logiczne)
- zmienne
- (ewentualnie także) symbole pomocnicze (np. nawiasy).

Do ważnych stałych logicznych zaliczamy:

- funktory prawdziwościowe
- kwantyfikatory
- (ewentualnie także) predykat identyczności.

Składnia języka systemu jest podana w sposób efektywny. Znaczenie stałych logicznych jest w danym języku ustalone. Zmienne oraz formuły języka są (semantycznie) wartościowane.

Operacja konsekwencji i reguły wnioskowania

Operacje konsekwencji mogą być zadane przez zestawy reguł wnioskowania, ustalających jakie wnioski otrzymujemy z danego zbioru przesłanek. Operacja konsekwencji systemu określa ogół jego tez.

Reguły te mają odwoływać się wyłącznie do:

- budowy składniowej wyrażeń
- stałych logicznych.

Mają natomiast abstrahować od:

- treści wyrażeń.

W logice interesujemy się niezawodnymi regułami wnioskowania, zachowującymi pewne własności semantyczne wyrażeń.

Semantyka systemu logicznego

Komponent semantyczny systemu logicznego wiąże język systemu z jego odniesieniem przedmiotowym. Dla przykładu:

- Klasyczny Rachunek Zdań:
  - zestaw dwóch różnych przedmiotów, oznaczanych np. przez 0 oraz 1 i nazywanych odpowiednio np. Ściemą oraz Odlotem, albo Fałszem oraz Prawdą, albo jeszcze inaczej, wedle kaprysu;
  - zestaw 20 funkcji prawdziwościowych określonych na tych przedmiotach (jedno- lub dwuargumentowych).
- Klasyczny Rachunek Predykatów:
  - ogół wszystkich układów złożonych z dowolnego zbioru przedmiotów oraz dowolnych zależności między tymi przedmiotami.

Ważne logiczne pojęcia semantyczne to np.: prawo logiki, wynikanie logiczne, semantyczna niesprzeczność.

Język Klasycznego Rachunku Zdań

W skład **alfabetu** języka KRZ wchodzą:

- **zmienne zdaniowe**: $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (zbiór wszystkich tych zmiennych oznaczymy przez V_{KRZ})
- **funktory (prawdziwościowe)**:
  - $\neg$ (negacja),
  - $\wedge$ (koniunkcja),
  - $\vee$ (alternatywa [nierozłączna]),
  - $\rightarrow$ (implikacja [materialna]),
  - $\equiv$ (równoważność [materialna]).
- **symbole pomocnicze**: (,) — nawias lewy oraz nawias prawy.

To jedna z wielu możliwości wyboru alfabetu KRZ.

Język KRZ

Zbiór F_{KRZ} wszystkich **formuł** języka KRZ definiowany jest indukcyjnie:

- (1) każda zmienna zdaniowa jest formułą
- (2) jeśli $\alpha \in F_{KRZ}$, to $\neg(\alpha)$ jest elementem F_{KRZ}
- (3) jeśli $\alpha \in F_{KRZ}$ oraz $\beta \in F_{KRZ}$, to: $(\alpha) \wedge (\beta) \in F_{KRZ}$, $(\alpha) \vee (\beta) \in F_{KRZ}$, $(\alpha) \rightarrow (\beta) \in F_{KRZ}$, $(\alpha) \equiv (\beta) \in F_{KRZ}$
- (4) każda formuła KRZ jest bądź zmienną zdaniową, bądź powstaje z formuł KRZ poprzez zastosowanie reguły (2) lub reguły (3).

Zwróćmy uwagę, że procedura rozstrzygania, czy dowolny (skończony) ciąg elementów alfabetu języka KRZ jest formułą KRZ jest efektywna: w skończonej liczbie kroków (biorących pod uwagę jedynie kształt symboli oraz ich kolejność) daje odpowiedź.

Język KRZ

Przyjmiemy pewne umowy notacyjne:

- opuszczamy nawiasy otaczające pojedyncze zmienne (np. zamiast $\neg(p_i)$ piszemy $\neg p_i$);
- zmienne zdaniowe zapisujemy zwykle: p, q, r, s, t;
- symbole α, β, γ oznaczają dowolne formuły języka KRZ;
- symbole X, Y, Z oznaczają dowolne zbiory formuł języka KRZ.

Na razie będziemy rygorystycznie przestrzegać używania nawiasów. Po nabraniu wprawy wprowadzimy pewne reguły ich opuszczania.

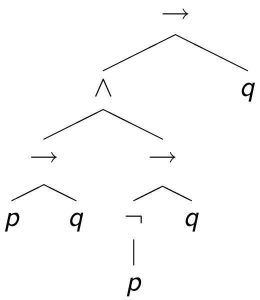
Uwaga. O języku KRZ mówimy teraz w pewnym metajęzyku. Podobnie, o semantyce języka KRZ będziemy mówić w metajęzyku.

Język KRZ

Każdą formułę języka KRZ reprezentować można przez drzewo. Jedna z możliwych drzewiastych reprezentacji budowy składniowej np. formuły

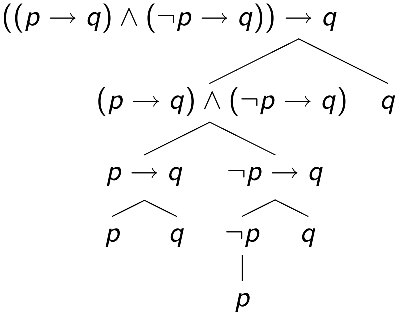
$$((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$$

wygląda następująco:



Język KRZ

Inna z możliwych (ważna, **zapamiętaj ją!**) drzewiastych reprezentacji budowy składniowej tej formuły to:



Wierzchołki drzewa są tu znakowane podformułami formuły z korzenia drzewa. Funktor główny dowolnej formuły to ten, który nie występuje w niej w zasięgu innego funktora.

Wartościowania

Elementy zbioru $\{0, 1\}$ nazwiemy wartościami logicznymi.

Wartościowaniem formuł w KRZ nazywamy każdą funkcję $h : F_{KRZ} \to \{0, 1\}$ taką, że:

- $h(\neg(\alpha)) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 0$
- $h((\alpha) \wedge (\beta)) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 1$ i $h(\beta) = 1$
- $h((\alpha) \vee (\beta)) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 0$ i $h(\beta) = 0$
- $h((\alpha) \to (\beta)) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 1$ i $h(\beta) = 0$
- $h((\alpha) \equiv (\beta)) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = h(\beta)$.

Uwaga. Gdy h jest wartościowaniem, to wartość $h(\alpha)$ zależy tylko od (skończonej liczby) wartości $h(p_1), \ldots, h(p_n)$, gdzie $p_1, \ldots, p_n$ są wszystkimi zmiennymi zdaniowymi występującymi w α.

Jednoargumentowe funkcje prawdziwościowe

arg	1	2	3	4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Pierwsza kolumna tabeli podaje wszystkie wartości argumentu, kolumny o numerach 1–4 podają wartość dla tego argumentu każdej z czterech jednoargumentowych funkcji prawdziwościowych. Funkcja o wartościach z kolumny 3 nazywana jest **Negacją**. Oznaczmy ją symbolem Ng. Zatem:

$$Ng(0) = 1, \qquad Ng(1) = 0.$$

Dwuargumentowe funkcje prawdziwościowe

a_1	a_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Pierwsze dwie kolumny podają wszystkie układy wartości argumentów, kolumny o numerach 1–16 podają wartość dla tego układu argumentów każdej z szesnastu dwuargumentowych funkcji prawdziwościowych.

Funkcje prawdziwościowe

Wprowadzamy oznaczenia dla niektórych z tych funkcji:

Funkcja o wartościach z kolumny	nazywana jest	i oznaczana
2	**Koniunkcją**	*Kn*
8	**Alternatywą**	*Al*
14	**Implikacją**	*Im*
10	**Równoważnością**	*Rw*

Uwaga. Nie pogub się: masz funktory prawdziwościowe ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$) oraz funkcje prawdziwościowe (*Ng*, *Kn*, *Al*, *Im*, *Rw*). Te pierwsze to symbole językowe, te drugie to pewne elementy pozajęzykowe.

Funkcje prawdziwościowe

Zapamiętanie wartości wymienionych funkcji ułatwić powinna poniższa tabelka:

$Kn(x, y) = 1$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = 1$ oraz $y = 1$
$Al(x, y) = 0$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = 0$ oraz $y = 0$
$Im(x, y) = 0$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = 1$ oraz $y = 0$
$Rw(x, y) = 1$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = y$

Uwaga. Można rozważać dowolne *n*-argumentowe funkcje prawdziwościowe. Dla prezentacji semantyki KRZ nie jest to jednak potrzebne.

Uproszczenia w podręcznikach

Mamy zatem wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między funktorami prawdziwościowymi oraz funkcjami prawdziwościowymi. Często spotykamy w podręcznikach uproszczone tabelki, wiążące wartości logiczne bezpośrednio z funktorami (w pierwszej kolumnie wartość pierwszego argumentu, w pierwszym wierszu — wartość drugiego, na przecięciu wiersza i kolumny — wartość formuły dla danych argumentów):

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\equiv$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\neg$	
0	1
1	0

Pojęcie tautologii KRZ

Tautologią KRZ nazywamy każdą formułę języka KRZ, która przy każdym wartościowaniu przyjmuje wartość 1.

Tak więc, formuła α **jest** tautologią KRZ, gdy dla każdego wartościowania h, mamy: $h(\alpha) = 1$.
Formuła α **nie jest** tautologią KRZ, gdy istnieje wartościowanie h takie, że $h(\alpha) = 0$.

Uwaga. Badamy nie konkretne formuły, lecz raczej schematy formuł. Dla przykładu, $(\alpha) \vee (\neg(\alpha))$ jest schematem tautologii KRZ dla dowolnej formuły α, zaś np. $(\alpha) \rightarrow ((\alpha) \wedge (\beta))$ nie jest schematem tautologii KRZ — bo np. szczególny przypadek tego schematu: $p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$ nie przy każdym wartościowaniu przyjmuje wartość 1. W dalszym ciągu będziemy używać terminu „tautologia KRZ" zarówno dla poszczególnych formuł języka KRZ, jak i dla schematów formuł.

Pojęcie tautologii KRZ

Zauważmy, że tautologie KRZ są dokładnie tymi formułami języka KRZ, które przyjmują wartość wyróżnioną przy każdym wartościowaniu jedynie przez wzgląd na swoją budowę składniową oraz wprzódy ustalone znaczenie stałych logicznych języka KRZ (tj. funktorów prawdziwościowych).

Formuły, które przy każdym wartościowaniu przyjmują wartość 0 nazywamy **kontrtautologiami** KRZ.
Formuła α **nie jest** zatem kontrtautologią KRZ, gdy przy co najmniej jednym wartościowaniu h mamy: $h(\alpha) = 1$.

Wszystkie formuły języka KRZ podzielić można na trzy klasy:

- tautologie KRZ
- kontrtautologie KRZ
- pozostałe formuły (nie będące ani tautologiami, ani kontrtautologiami).

Wynikanie logiczne w KRZ

Wynikanie logiczne to relacja między zbiorami formuł. Powiemy, że zbiór Y **wynika logicznie** (w KRZ) ze zbioru X, gdy przy każdym wartościowaniu, przy którym wszystkie formuły zbioru X mają wartość 1, również wszystkie formuły zbioru Y mają wartość 1.
Zbiór Y **nie** wynika logicznie ze zbioru X, gdy istnieje co najmniej jedno wartościowanie, przy którym wszystkie formuły z X mają wartość 1, a pewna formuła ze zbioru Y ma wartość 0.

Gdy Y wynika logicznie z X, to piszemy $X \models_{krz} Y$, a gdy Y jest zbiorem jednoelementowym $\{\alpha\}$, to piszemy $X \models_{krz} \alpha$ (mówimy wtedy krótko, że formuła α wynika logicznie ze zbioru X).

Tautologie KRZ to dokładnie te formuły, które wynikają logicznie ze zbioru pustego $\emptyset$.

Semantyczna niesprzeczność w KRZ

Mówimy, że zbiór X formuł języka KRZ jest:

- semantycznie niesprzeczny, gdy istnieje wartościowanie h takie, że $h(\alpha) = 1$ dla wszystkich $\alpha \in X$;
- semantycznie sprzeczny, gdy X nie jest semantycznie niesprzeczny.

Z powyższej definicji wynika, że X jest semantycznie sprzeczny, gdy dla każdego wartościowania h oraz dla wszystkich $\alpha \in X$ mamy: $h(\alpha) = 0$.

Aby pokazać, że X jest semantycznie niesprzeczny wystarczy znaleźć jedno wartościowanie h takie, że dla wszystkich $\alpha \in X$ mamy: $h(\alpha) = 1$.
Aby pokazać, że X jest semantycznie sprzeczny trzeba pokazać, że dla żadnego wartościowania h **nie zachodzi** $h(\alpha) = 1$ dla wszystkich $\alpha \in X$.

Pojęcie reguły niezawodnej

Regułą (regułą wnioskowania) nazywamy dowolną relację $R \subseteq \wp(F_{KRZ}) \times F_{KRZ}$, której poprzedniki są skończonymi zbiorami formuł (czyli dowolną relację między skończonymi zbiorami formuł a formułami).

Każdy układ postaci $(X, \alpha) \in R$ nazywamy sekwentem reguły R.

Poprzedniki relacji R nazywamy przesłankami reguły R, a następniki wnioskami reguły R.

Reguła R jest **niezawodna**, gdy dla każdego $(X, \alpha) \in R$ zachodzi: $X \models_{krz} \alpha$, czyli gdy α wynika logicznie z X w KRZ.
W przeciwnym przypadku R jest **zawodna**.

Pojęcie reguły niezawodnej

Z powyższej definicji widać, że reguła R jest:

- niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego jej sekwentu $(X, \alpha) \in R$ oraz każdego wartościowania, przy którym wszystkie elementy X (tj. przesłanki) mają wartość 1, także α (tj. wniosek) ma wartość 1;
- zawodna, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: co najmniej jeden sekwent $(X, \alpha) \in R$ oraz co najmniej jedno wartościowanie przy którym wszystkie elementy X mają wartość 1, a α ma wartość 0.

Uwaga. Reguły wnioskowania interesujące z logicznego punktu widzenia opisywane są zwięźle przez podanie kształtu wszystkich sekwentów składających się na regułę, np. tak, jak w poniższych przykładach:

Przykłady reguł niezawodnych

Oto schematyczne zapisy kilku ważnych niezawodnych reguł wnioskowania (zapis poniższy wskazuje kształt wszystkich sekwentów poszczególnych reguł):

(r1)	$(\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\}, \beta)$	(r5)	$(\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha\}, \beta)$
(r2)	$(\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\}, \neg\alpha)$	(r6)	$(\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha\}, \alpha \equiv \beta)$
(r3)	$(\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\}, \alpha \rightarrow \gamma)$	(r7)	$(\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\}, (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$
(r4)	$(\{\alpha, \neg\alpha\}, \beta)$	(r8)	$(\{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma\}, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$

Regułę wnioskowania o przesłankach $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ oraz wniosku β zapisujemy często w postaci: $\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta}$, albo w postaci:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \hline \beta \end{array}$$

Dygresja: wnioskowania dedukcyjne

Spójniki logiczne w danym języku etnicznym (tu: polskim) to wyrażenia: *i*, *lub*, *jeśli...*, *to...*, *nieprawda, że*, itp.

Zdaniem prostym (języka etnicznego) nazywamy każde zdanie A takie, że:

- żadna część A nie jest zdaniem
- A jest zdaniem w sensie logicznym, tj. może być prawdziwe lub fałszywe.

Zdania złożone to zdania, które nie są proste. Bierzemy pod uwagę tylko złożenia zdań z użyciem spójników logicznych.

Po raz pierwszy wspomnieliśmy o Prawdzie i Fałszu i to jedynie w odniesieniu do języków etnicznych. Ustalanie, co jest Prawdą nie należy do zadań Logiki. Jest to problem Epistemologiczny.

Dygresja: wnioskowania dedukcyjne

Schematem zdania A nazywamy formułę języka KRZ otrzymaną z A poprzez zastąpienie zdań prostych zmiennymi zdaniowymi, a wyrażeń reprezentujących spójniki logiczne spójnikami prawdziwościowymi. Schematem wnioskowania złożonego ze zbioru przesłanek $\mathcal{A}$ oraz wniosku A nazywamy układ (X, α), gdzie:

- X jest zbiorem schematów zdań z $\mathcal{A}$
- α jest schematem A.

Wnioskowanie $(\mathcal{A}, A)$ nazywamy **dedukcyjnym**, jeśli jego schemat jest sekwentem reguły niezawodnej.

Wnioskowanie jest zatem dedukcyjne, gdy schemat jego wniosku wynika logicznie ze zbioru schematów jego przesłanek.

Dygresja: wnioskowania dedukcyjne

Uwaga. Pamiętaj: wnioskowania przeprowadzamy w językach etnicznych, schematy wnioskowań i reguły to konstrukcje z języka KRZ.

Należy odróżniać:

- spójniki logiczne (wyrażenia języka etnicznego)
- funktory prawdziwościowe (symbole języka KRZ)
- funkcje prawdziwościowe (konstrukcje pozajęzykowe).

Przy znajdowaniu schematów wyrażeń języka etnicznego przyjmujemy zatem pewne założenia dotyczące **przekładu** tego języka na język KRZ.

Dygresja: teksty semantycznie niesprzeczne

Mówimy, że zbiór $\mathcal{A}$ zdań języka etnicznego jest semantycznie niesprzeczny, gdy zbiór schematów wszystkich zdań $\mathcal{A}$ jest semantycznie niesprzecznym zbiorem formuł języka KRZ.

Mówimy, że zbiór $\mathcal{A}$ zdań języka etnicznego jest semantycznie sprzeczny, gdy zbiór schematów wszystkich zdań $\mathcal{A}$ jest semantycznie sprzecznym zbiorem formuł języka KRZ.

Mówimy, że zdanie A języka etnicznego jest prawdą logiczną, gdy schemat A jest tautologią KRZ.

Mówimy, że zdanie A języka etnicznego jest fałszem logicznym, gdy schemat A jest kontrtautologią KRZ.

Twierdzenia o dedukcji

2.2. Twierdzenie o dedukcji wprost (wersja semantyczna).
Dla dowolnych $X \subseteq F_{KRZ}$, $\alpha \in F_{KRZ}$, $\beta \in F_{KRZ}$ zachodzą następujące implikacje:

- Jeśli $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \beta$, to $X \models_{krz} \alpha \rightarrow \beta$.
- Jeśli $X \models_{krz} \alpha \rightarrow \beta$, to $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \beta$.

Na mocy powyższego twierdzenia (oraz praw eksportacji i importacji) reguła $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\beta}$ jest niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy implikacja $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ jest tautologią KRZ.

Prawo importacji: $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$
Prawo eksportacji: $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$
Ćwiczenie: pokaż, że te prawa są tautologiami KRZ.

Twierdzenia o dedukcji

2.3. Twierdzenie o dedukcji nie wprost (wersja semantyczna).
Dla dowolnych $X \subseteq F_{KRZ}$, $\alpha \in F_{KRZ}$, $\beta \in F_{KRZ}$ zachodzą następujące równoważności:

- $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krz} \neg\alpha$.
- $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krz} \alpha$.

Z twierdzenia o dedukcji nie wprost korzystamy przeprowadzając dowody nie wprost (dowody apagogiczne).

Ćwiczenie. Wykorzystaj twierdzenie o dedukcji wprost dla uzyskania z reguł (r1)-(r8) odpowiednich tautologii KRZ.

Zadania domowe

Zaleca się wykonanie wszystkich podanych zadań.

Możesz także korzystać z (powszechnie dostępnego) zbioru zadań Pani Profesor Barbary Stanosz: Ćwiczenia z logiki, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (kilkanaście wydań) i rozwiązać zadania **1–27**.

Uwaga! Bez umiejętności rozwiązywania zadań nie nauczysz się Logiki. Wybór należy do ciebie.

Przykłady poprawnych rozwiązań

Poprawne rozwiązania przykładowych zadań dot. omawianych problemów znaleźć można pod adresami:

www.logic.amu.edu.pl/images/8/87/Egzlogmat2007.pdf

Zadania (z obu grup): **2** (rozwiązania 2.1. i 2.2.) oraz **5** (rozwiązania 5.2. i 5.3.).

www.logic.amu.edu.pl/images/4/4f/Logjiin2007.pdf

Zadania z 4 czerwca 2007: **1** (rozwiązania 1.1. i 1.2.), **2** (rozwiązania 2.1. i 2.2.), **3** (rozwiązania 3.1. i 3.2.), a także zadania z 6 czerwca 2007: **2** (rozwiązania 2.1. i 2.2.) oraz **4** (rozwiązanie 4.2.).

Język KRZ

Narysuj drzewa składniowe formuł:

- $(((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p)$
- $((((p \vee \neg p) \wedge (p \rightarrow q)) \wedge (\neg p \rightarrow r)) \rightarrow (q \vee r)$
- $((p \equiv \neg(q \vee r)) \rightarrow (\neg(q \wedge p)))$.

Wstaw jakieś wartości logiczne na liście tych drzew i oblicz wartość przyporządkowaną, zgodnie z tablicami opisującymi funkcje prawdziwościowe, korzeniowi.

Język KRZ

Na ile sposobów można wstawić w poniższe ciągi symboli języka KRZ nawiasy, aby otrzymać formuły języka KRZ:

- $p \rightarrow \neg q \vee q \rightarrow r$
- $p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow \neg p$
- $p \equiv \neg p \vee q \wedge r$.

W każdym z powyższych przypadków podaj wszystkie podformuły otrzymanych formuł.

Tautologie KRZ

Pokaż, że są tautologiami KRZ:

- $(p \rightarrow q) \lor (q \rightarrow p)$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

Tautologie KRZ

Pokaż, że są kontrtautologiami KRZ:

- $(\neg(p \rightarrow q)) \equiv ((\neg p) \vee q)$
- $(p \wedge q) \equiv ((\neg p) \vee (\neg q))$
- $(p \wedge (\neg q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$

Tautologie KRZ

Zbadaj, czy są tautologiami KRZ:

- $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t)))) \rightarrow (\neg t \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow (s \rightarrow \neg r))))$
- $(p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow \neg p)$
- $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \equiv (r \rightarrow \neg(p \wedge q))$

Wynikanie logiczne w KRZ

Zbadaj, czy następujące reguły są niezawodne:

$$\frac{(p \vee q) \equiv r \quad \neg p \quad \neg q}{\neg(r \wedge s)}$$

$$\frac{\neg(p \vee q) \rightarrow r \quad \neg q \quad p \rightarrow s}{s \vee r}$$

$$\frac{p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad s \rightarrow \neg r}{p \rightarrow \neg q}$$

Semantyczna niesprzeczność w KRZ

Zbadaj, czy są semantycznie niesprzecznymi zbiorami formuł:

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$ q $\neg(p \rightarrow r)$	$p \rightarrow \neg(q \vee \neg r)$ p $r \rightarrow q$	p $\neg q$ $\neg r$ $p \rightarrow (s \vee t)$ $t \rightarrow (r \wedge q)$
$\neg p \rightarrow q$ $p \rightarrow r$ p $\neg r \vee \neg q$	$p \rightarrow q$ $p \vee q$ $\neg q$	$p \rightarrow q$ $r \rightarrow q$ $(p \vee r) \rightarrow q$

Wnioskowania dedukcyjne

Zbadaj, czy są wnioskowaniami dedukcyjnymi:

- *Jeśli wycofamy naukę religii ze szkół, to nie jest prawdą, że jednocześnie: Polska będzie normalnym krajem oraz Episkopat będzie zachwycony. Panie kochany, mówię Panu: normalnym krajem to ta nasza Polska w końcu będzie. No to sam Pan widzi, że Episkopat nie będzie, delikatnie rzecz ujmując, zachwycony, jeśli naukę religii wycofamy ze szkół.*
- *Mówię wam, jeśli Ala wyjdzie za mąż, to będzie awantura na weselu. Nie wierzycie? Wystarczy się tylko zastanowić: jeśli Ala wyjdzie za mąż, to na pewno i Kasia i Dorota będą druhnami. A przecież jest jasne, że dojdzie do awantury, gdy co najmniej jedna z nich będzie druhną, znamy je nie od dziś.*

Wnioskowania dedukcyjne

Zbadaj, czy są wnioskowaniami dedukcyjnymi:

- *Ten pogrzeb nie ma prawa się udać, o ile nie jest plotką, że odszedł ostatni z Wielkich Przywódców Postępowej Ludzkości. Dlaczego? To chyba oczywiste. Jeśli istotnie już Go nie ma, to Lewus lub Prawus będzie przemawiał na pogrzebie. Gdy jednak pojawią się tam obaj ze swoimi tekstami, to skandal murowany, inaczej mówiąc pogrzeb nieudany.*
- *Jeśli masz 1 dolara, to możesz sobie kupić lody. Ciasteczko możesz sobie kupić, jeśli masz 1 dolara. Tak więc, drogie dziecko, jeśli masz 1 dolara, to możesz sobie kupić i lody i ciasteczko. Masz tu 1 dolara i wypad!*
- *Jestem, o ile myślę. No i przecież myślę. Wynika stąd, że jestem.*

Teksty semantycznie niesprzeczne

Zbadaj, czy są tekstami semantycznie niesprzecznymi:

- *Agentem był Marszałek lub Prezydent. Przewodniczący był agentem, o ile Prezydent był agentem. Prymas był agentem, jeśli Marszałek był agentem. Ale przecież — na litość boską — ani Prymas, ani Przewodniczący nie byli agentami.*
- *Jeżeli Polska będzie katolicka, to jeżeli przeprowadzi się (rzetelną, do trzeciego pokolenia) lustrację, to zapanuje prawdziwa (na wieki) demokracja. A jeśli zapanuje demokracja, to już zaraz będzie dobrobyt, o ile oczywiście przeprowadzi się lustrację. Polska będzie katolicka. I lustrację się przeprowadzi, a jakże. Tylko dobrobytu nie będzie, mili słuchacze.*
- Tekst taki sam, jak wyżej, oprócz ostatniego zdania, zamiast którego wstawić: *I będzie dobrobyt, że hej.*