Obiekty patologiczne w matematyce

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Kraków, 23.X.2014

Patologie w matematyce są oznaką jej krzepy i zdrowia

- Prezentacja jest kontynuacją odczytu wygłoszonego na konferencji *Transgresje Matematyczne* (Kraków, 15–18 czerwca 2014).
- Staramy się zwrócić uwagę na fakt, że ***patologie pełnią twórczą rolę w matematyce***. Matematyka rozwija się m.in. poprzez ***oswajanie patologii***. Często najpierw sama ***kreuje*** patologie, potem je oswaja.

- Kontekst odkrycia w matematyce: kryteria estetyczne, niezbędność i skuteczność, cenzura logiki (czasem: inspiracje empiryczne).
- Matematyka dostarcza wyzwolenia z obmierzłej potoczności, epistemologicznie otępiającej.

Nie można podać definicji terminu ***patologia matematyczna***. Interesuje nas jedynie ***sposób mówienia i myślenia*** o obiektach matematycznych.

Normalne a niespodziewane

- Rola intuicji i praktyki matematycznej w ustalaniu standardów.
- Metoda genetyczna i metoda aksjomatyczna.
- Twierdzenia o klasyfikacji i twierdzenia o reprezentacji.
- Postacie normalne, kanoniczne, standardowe.
- Badanie obiektów przez morfizmy: niezmienniki i symetrie.

- „Dobre zachowanie” obiektów matematycznych – przykłady.
- Rozumienie i oswajanie się w matematyce (*dictum* von Neumanna).
- Matematyka a nauki empiryczne: inżynier, fizyk, matematyk.
- Porażki myślenia życzeniowego: znikoma liczebność standardów, wszechobecność (w sensie liczebności lub miary) patologii.

Nieformalne charakterystyki:

- **Wyjątki**: obiekty o szczególnym zestawie własności, bądź obiekty nie mieszczące się w ustalonej klasyfikacji. Np.: grupy sporadyczne, wielokomórki foremne.
- **Kontrprzykłady**: obiekty pozwalające na odróżnienie zakresów własności lub zakresów prawdziwości twierdzeń. Np.: obiekty różnicujące klasy struktur algebraicznych lub przestrzeni topologicznych.

- **Niespodzianki**: nieoczekiwane, acz „niezłośliwe" obiekty/twierdzenia. Np.: hipoteza Borsuka, hipoteza Mertensa.
- **Patologie**: obiekty „niechciane" bądź konstruowane specjalnie, dla ukazania ograniczeń (pojęć, metod, intuicji). Nie każdy kontrprzykład jest patologią. Nie każdy „dziwny" obiekt jest patologią.

Patologia oswojona: *widzę, lecz nie wierzę*

- Bijekcję $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ określamy wzorem:
- $c(x, y) = y + \sum_{i=0}^{x+y} i = y + \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1)$.
- Funkcja c^{-1} daje wyliczenie $c^{-1}(0)$, $c^{-1}(1)$, $c^{-1}(2)$, $\ldots$ wszystkich (nieujemnych) liczb wymiernych.

- Funkcja c umożliwia ustawienie w jeden przeliczalny ciąg przeliczalnie wielu przeliczalnych ciągów. Nie można jednak ustawić w jeden ciąg przeliczalny wszystkich gałęzi pełnego drzewa dwójkowego.
- Cantor pokazał przeliczalność zbioru liczb algebraicznych.
- Cantor podał dwa dowody nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych. Pokazał też, że przedział $(0, 1)$ jest równoliczny z $\mathbb{R}^n$, dla wszystkich $n \geqslant 1$. *Je le vois, mais je ne le crois pas!*

Patologia oswojona: chudy zbiór Cantora

- $[0,1]$, $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \ldots$
- $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, czyli: $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=0}^{3^{n-1}-1} ([0, \frac{3k+1}{3^n}] \cup [\frac{3k+2}{3^n}, 1])$.

- Zbiór C jest: domknięty, nieprzeliczalny, nigdziegęsty, zwarty, doskonały, całkowicie niespójny. Jest zupełną przestrzenią metryczną, ma miarę Lebesgue'a równą zero, nie zawiera żadnego niepustego przedziału. Jest homeomorficzny z produktem $2^{\mathbb{N}}$, jest samopodobny, jego wymiar Hausdorffa równy jest $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.
- *Oswajanie*. Każda zwarta przestrzeń metryczna jest ciągłym obrazem zbioru C. Każda nieprzeliczalna ośrodkowa i metryzowalna w sposób zupełny przestrzeń topologiczna zawiera zbiór homeomorficzny ze zbiorem Cantora.

Od liczydeł do ultraproduktów

- Długie i trudne oswajanie liczb: ujemnych, zespolonych, rzeczywistych. Z kolei kwaterniony, oktoniony, liczby p-adyczne, itd. miały bardziej szczęśliwe dzieciństwo.
- Do czego służą liczby? Jak je reprezentujemy? Własności: arytmetyczne, algebraiczne, porządkowe, topologiczne.
- Między ciałem liczb wymiernych a ciałem liczb nadrzeczywistych – granice naturalności pojęcia liczby. Które *działania* są naturalne?

- Aksjomat Archimedesa. Jak uporządkowane jest ciało funkcji wymiernych? Jak mierzyć kąty krzywoliniowe?
- Stopnie nieskończoności: podejścia Cantora i Du Bois Reymonda.
- Model niestandardowy Skolema arytmetyki liczb naturalnych.

Regularności a punkty widzenia

- Niejednoznaczność rozkładu. W pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ mamy: $2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}) = 6$, $(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5}) = 9 = 3 \cdot 3$.
- Dzielniki zera. W pierścieniu macierzy 2×2 mamy:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- Liczby idealne Kummera oraz ideały Dedekinda.
- Które własności operacji algebraicznych są *naturalne*?

- Istnieje nieskończenie wymiarowa ośrodkowa przestrzeń Banacha nie posiadająca bazy Schaudera (Enflo 1973).
- Grupy-potwory Tarskiego: grupy nieskończone, których każda nietrywialna podgrupa jest grupą cykliczną rzędu p (p pierwsza). Dla każdej $p > 10^{75}$ istnieje kontinuum nieizomorficznych Potworów Tarskiego.

Gdy precyzja zastępuje intuicję, czasem rodzą się potwory

- Sinusoida zagęszczona oraz okrąg warszawski.
- Funkcja Weierstrassa: ciągła, nigdzie nie różniczkowalna.
- Funkcje: Thomaego i Dirichleta (indykatory zbioru liczb wymiernych).

- Krzywe Peana i Hilberta: ciągłe, wypełniające swoim wykresem kwadrat jednostkowy.
- Funkcja Volterry jest wszędzie różniczkowalna, a jej pochodna jest nieciągła dokładnie w każdym punkcie zbioru SVC. Tak więc, pochodna funkcji Volterry nie jest całkowalna w sensie Riemanna.

Oraz całe mnóstwo różnorakich obiektów fraktalnych, na których można grzecznie zarobić, publikując prace z estetycznymi rysunkami. Paprocie, kalafiory, chmury, płatki śniegu, pejzaże, itd.

Wizje Eulera, Riemanna, Cauchy'ego, Lebesgue'a...

- Przepisy BHP dla szeregów nieskończonych: rodzaje i kryteria zbieżności. Jak uzasadniano, że $\infty < -1$?
- Róg Gabriela: nieskończona powierzchnia ograniczająca skończoną objętość. Szereg harmoniczny. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
- Zadanie dla Lakoffa i Núñeza: przy użyciu *Basic Metaphor of Infinity* (czyli metodą: *mówisz-masz*) skonstruować szereg najwolniej rozbieżny.

- Całkowanie na diabelskich schodach – funkcje: Cantora-Lebesgue'a oraz Minkowskiego.
- Funkcja różniczkowalna o *nieprzeliczalnym* zbiorze wartości krytycznych.

Prosta, płaszczyzna, przestrzeń

- Konstrukcje Sierpińskiego (znane): trójkąt, choinka, dywan, itd.
- Sztuczka: połączenie przeciwległych wierzchołków kwadratu rozłącznymi spójnymi zbiorami (z których każdy jest sumą łuków): $C_1 = \{(-1+t, -1+\frac{7}{8}t) : t \in [0,1]\} \cup \{(t, \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2t}) + \frac{1}{4}) : t \in (0,1)\} \cup \{(1, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t) : t \in [0,1]\}$
$C_2 = \{(-1+t, 1-\frac{7}{8}t) : t \in [0,1]\} \cup \{(t, \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2t}) - \frac{1}{4}) : t \in (0,1)\} \cup \{(1, -1+\frac{5}{4}t) : t \in [0,1]\}$.

- Czworościan nie jest równoważny przez rozkład z sześcianem (np. naroże sześcianu jednostkowego nie jest równoważne przez rozkład z sześcianem o boku $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$), ale...
- Koło jest równoważne przez rozkład z kwadratem (Laczkovich).
- Twierdzenie Banacha-Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli.

Kształty widzialne i niewidzialne

- Dziki łuk Artina-Foxa: łuk γ włożony w $\mathbb{R}^3$ tak, że nie istnieje homeomorfizm $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^3$, przy którym γ przechodzi na przedział $[0, 1]$.
- Naszyjnik Antoine'a: torus, w którym są zapętlone torusy, w których są zapętlone torusy, w których są zapętlone torusy, w których. . .
- Jeziora Wady: krzywa, będąca wspólnym brzegiem trzech obszarów na płaszczyźnie.

- Sfera rogata Alexandera: homeomorficzna z S^2, o grzecznym wnętrzu i dzikim zewnętrzu.
- Twierdzenie Smale'a: sferę dwuwymiarową można przenicować (bez rozrywania) w $\mathbb{R}^3$.

Tajemnica tkwi w fakcie, że $2 + 2 = 4$

- Porządny świat powierzchni: pełna klasyfikacja. Orientowalność i charakterystyka Eulera. Podstawowe „cegiełki": sfera, torus, płaszczyzna rzutowa.
- Każda jednospójna przestrzeń Riemanna ma jeden z trzech typów geometrii: Euklidesową, sferyczną lub hiperboliczną.
- Rozmaitości w 3D: program geometryzacji Thurstona. 8 geometrii.

- Trudności w 4D: problem ustalenia czy dwie triangulowalne 4-rozmaitości są homeomorficzne jest nierozstrzygalny.
- Sfery egzotyczne: np. w 7 wymiarach jest ich 28.
- Egzotyczna $\mathbb{R}^4$: jedyna egzotyczna $\mathbb{R}^n$ (ale za to posiadająca kontinuum wzajem niedyfeomorficznych struktur).

Trzeba znać miarę. . .

- Zbiór Vitalego: każdy selektor rodziny $\mathbb{R}/\approx$, gdzie $x \approx y \equiv x - y \in \mathbb{Q}$. Nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.
- B jest zbiorem Bernsteina, gdy $B \cap X \neq \emptyset$ oraz $(\mathbb{X} - B) \cap X \neq \emptyset$ dla każdego zbioru Borelowskiego X (w nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej $\mathbb{X}$). Nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.
- Mierzenie długości: uciekamy przed zboczenicą po spirali Besicovitcha.
- Mierzenie powierzchni i objętości: sfera Besicovitcha (dowolnie mała powierzchnia ograniczająca dowolnie dużą objętość).

- Obracanie igły: drzewo Perrona i zbiór Kakeyi.
- Kula jednostkowa o nieskończonej mierze. W nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta nie może istnieć nietrywialna miara Borelowska niezmiennicza na przesunięcia.

Złudzenia i przesądy probabilistyczne

- Ciągi całkowicie losowe. Nieistniejące ciągi von Misesa. Ile losowości potrafimy uzyskać?
- Liczby normalne, a przy okazji: liczby Liouville'a i miara niewymierności.

- Paradoks Bertranda. Prawdopodobieństwo zależy od miary!
- Niezależność zdarzeń nie jest cechą samych zdarzeń, ale również zależy od miary.

- Skończony zbiór liczb spełnia *prawo Benforda*, jeśli częstość występowania pierwszych cyfr tych liczb (zapisanych w bazie b) wyraża się wzorem: $P(k) = \log_b(1 + \frac{1}{k})$. Większość danych statystycznych spełnia prawo Benforda, co wykorzystuje się np. dla wykrywania oszustw podatkowych.

Niespodzianki logiczne

- Logiki modalne czy teorie modalności? Matematyczne modele modalności.
- Modele niestandardowe: arytmetyka i analiza. Czy istnieją *prawdziwe* liczby rzeczywiste?
- Patologie (?) klas spełniania: czy *aksjomatyczna* teoria prawdy daje wyniki zaskakujące?

- Ezoteryczne konstrukcje w teorii rekursji. Jaką wiedzę o obliczalności uzyskujemy, badając skomplikowane twory nieobliczalne?
- Pytanie Harveya Friedmana: ***czy patologie odpowiedzialne są za niezupełność teorii***?

Światy zbiorów

- Szukanie „złotego środka" dla zbioru potęgowego: pomiędzy $\wp_{def}(x)$ a $\wp(x)$. Jakiej części $\wp(x)$ potrzebuje matematyka?
- Weźmy dowolny przeliczalny przechodni model (wystarczająco dużego fragmentu) teorii mnogości. . . A dalej *metodą siłową*.
- Mnogość zdań nierozstrzygalnych w ZF.

- Duże liczby kardynalne. Opinie Hausdorffa, Zermela, Grothendiecka o liczbach mocno nieosiągalnych. Wyniki dotyczące liczb mierzalnych.
- Drzewa: Suslina, Aronszajna, Kurepy.

Urok matematyki i groza katechezy

- Szkolna dydaktyka matematyki skupia się głównie na wpojeniu uczniom przemocą reguł algorytmicznych, niezbędnych w rachowaniu, planowaniu, konstruowaniu. Jak ***zaciekawić*** ucznia matematyką?
- Oswajanie z pojęciem nieskończoności: lemat Königa, pełne drzewo binarne, szereg harmoniczny. Sądzę, że to ciekawsze od katechezy.

- Intrygujące zagadki matematyczne, ukazujące złudność intuicyjnych przekonań – bezrefleksyjnych bądź opartych na doświadczeniu potocznym, np.:
  - Mrówka na linie.
  - Lewitujący oscypek.
  - Drabina władzy i ściana biznesu.
- W przygotowaniu do druku: zbiór zagadek matematycznych, obejmujący także figle logiczne, paradoksy, sofizmaty, itp.

Twórcza rola patologii

- Obiekty patologiczne bywają oswajane; często prowadzą do nowych teorii. Matematyk nigdy nie traktuje obojętnie patologii.
- Nie zajmowaliśmy się „ślepymi uliczkami" w matematyce: poglądami porzucanymi (np.: aksjomat ograniczenia Fraenkla). Pamiętajmy o żywotach *nieskończenie małych* (życie–unicestwienie–wskrzeszenie).
- Pamiętajmy też, że np. teorię mnogości uważano za:
  - raj, z którego nie damy się wypędzić (Hilbert)
  - zarazę, z której matematyka się wyleczy (Kronecker)
  - dziwaczną kandydatkę na podstawy matematyki (Skolem)
  - teorię, która będzie (?) podobna do topologii ogólnej (Mostowski)
  - paradygmat, który zniknie, gdy wymrą jego przedstawiciele (Awodey).

- Aksjomaty ekstremalne i modele zamierzone teorii: nadzieje i rozczarowania. Optymizm poznawczy matematyków.

Znane listy kontrprzykładów:

- Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 1990. *Theorems and Counterexamples in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.
- Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 2003. *Counterexamples in Analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York.
- Steen, L.A., Seebach, J.A., Jr. 1995. *Counterexamples in Topology*. Dover Publications, Inc., New York.
- Wise, G.L., Hall, E.B. 1993. *Counterexamples in Probability and Real Analysis*. Oxford University Press, New York.

Ciekawe dyskusje i materiały dostępne w sieci:

- http://mathoverflow.net/
- http://math.stackexchange.com
- http://mathforum.org/library/