Metalogika

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Geneza metalogiki

Cel wykładów

Cel

- Wprowadzenie w problematykę współczesnych badań metalogicznych.
- Omówienie wybranych metatwierdzeń logicznych.
- Zwrócenie uwagi na stosowane techniki dowodowe.

Wymagania

- Zakładamy, że słuchacze mają za sobą elementarny kurs logiki matematycznej (klasyczny rachunek zdań i klasyczny rachunek predykatów).
- Pojęcia matematyczne wykorzystywane w wykładzie będą wyjaśniane na bieżąco.

Spis treści wykładów

- Uwagi historyczne. Tworzenie pojęć metalogicznych.
- Metody dowodowe w metatwierdzeniach KRP: trafność, pełność, zwartość, LST.

Ujęcie algebraiczne

- Operacje konsekwencji w językach zdaniowych.

Teoria rekursji i wybrane twierdzenia metalogiczne

- Matematyczne reprezentacje pojęcia obliczalności.
- Reprezentowalność funkcji rekurencyjnych w PA. Arytmetyzacja składni.
- Twierdzenia: Churcha, Gödla, Tarskiego, Rossera, Löba.
- Informacje o teorii dowodu.

Spis treści

Teoria modeli

- Wybrane twierdzenia klasycznej i współczesnej teorii modeli.
- Metalogika a teoria mnogości.

Ujęcie semantyczne

- Logiki abstrakcyjne: definicje i przykłady.
- Twierdzenia Lindströma.
- Uogólnione kwantyfikatory.
- Logiki infinitarne.

Cel dzisiejszego wykładu

Przed dokładniejszym omówieniem wspomnianych tematów postaramy się w skrócie opowiedzieć o początkach metalogiki oraz kierunkach jej rozwoju.

- Staramy się ograniczyć subiektywizm w wyborze przedstawianych wątków.
- Ograniczamy się do logiki *matematycznej*, pomijając filozoficzne aspekty logiki.
- Przedstawianych wątków nie da się poklasyfikować: przenikają się one wzajemnie.

Ojcowie Założyciele

- Augustus De Morgan, George Boole.
- Inspiracje z arytmetyzacji analizy matematycznej.
- Inspiracje lingwistyczne i filozoficzne.

- Nurt logistyczny: Peano, Frege, Whitehead i Russell.
- Nurt algebraiczny: Peirce, Schröder, Löwenheim, Skolem.

Refleksja nad logiką i podstawami matematyki

- Kategoryczne charakterystyki wybranych struktur matematycznych (Hilbert, Peano, Dedekind, Postulatyści Amerykańscy).
- Wyjście *poza* logikę, w stronę refleksji *nad* logiką.

- Początki teorii mnogości (Cantor, Dedekind, Zermelo, Skolem, Fraenkel, von Neumann).
- Program Hilberta.

- Tworzenie pojęć metalogicznych: niesprzeczności, dowodliwości, kategoryczności, zupełności, definiowalności, rozstrzygalności, obliczalności.

Pierwsze wielkie problemy metalogiki

- Między *Principia Mathematica* a *Grundlagen der Mathematik*.
- Problem pełności: Gödel.
- Początki semantyki formalnej: Tarski.

- Problem rozstrzygalności: Church, Turing, Gödel.
- Problem zupełności: Gödel.
- Problem dowodliwości niesprzeczności: Gödel, Gentzen.

- Nieklasyczne rachunki logiczne: wielowartościowe, modalne, . . .
- Logika intuicjonistyczna.

Teoria modeli

- Początek: twierdzenie Löwenheima-Skolema.
- Najważniejsze konstrukcje wykorzystywane w teorii modeli.
- Rodzaje modeli. Spełnianie i omijanie typów.
- Kategoryczność w mocy a zupełność.
- Początek współczesnej teorii modeli: twierdzenie Morleya.
- Teoria klasyfikacji.

- Logiki silniejsze od logiki pierwszego rzędu: uogólnione kwantyfikatory i logiki infinitarne.
- Twierdzenia Lindströma.

Teoria mnogości

- Opisowa teoria mnogości.
- Aksjomatyczne teorie mnogości (Zermelo, Fraenkel, Skolem, von Neuman, Bernays, Gödel).

- Pierwsze modele dla teorii mnogości (Mostowski, Gödel, von Neumann).
- Dowody niesprzeczności i niezależności wybranych zdań (aksjomat wyboru, hipoteza kontinuum). Metoda forcingu (Cohen).
- Duże liczby kardynalne.

Teoria rekursji

- Matematyczne reprezentacje pojęcia obliczalności (Turing, Church, Post, Markow, Gödel, Kleene).
- Teza Churcha-Turinga.
- Związki z niezupełnością i nierozstrzygalnością.
- Teorie rozstrzygalne i nierozstrzygalne.
- Badanie stopni nierozstrzygalności.

- Programowanie w logice.
- Złożoność obliczeniowa.

Teoria dowodu

- *Beweistheorie* Hilberta.
- Rachunki Gentzena i Jaśkowskiego.
- Twierdzenie Herbranda.

- Ogólne operacje konsekwencji.
- Rachunki zdaniowe.

- Metody tablicowe.
- Zastosowania w automatycznym dowodzeniu twierdzeń.

Zakładana wiedza logiczna (o KRZ i KRP)

Poniżej wyliczamy tylko niezbędne pojęcia. Słuchacze będą uprzejmi przypomnieć je sobie samodzielnie, odwołując się do odbytego elementarnego kursu logiki.

- Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of mathematical logic*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts.
  Zawiera wykład: klasycznego rachunku logicznego, teorii modeli, teorii rekursji oraz teorii mnogości.
- Smullyan, R. 2009. *Logical Labyrinths*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts.
  Zawiera przystępne wprowadzenie do logiki pierwszego rzędu, wraz z wybranymi twierdzeniami metalogicznymi. Gotowy jest przekład polski.

Składnia

Zakładamy, że słuchacze znają pojęcia składniowe KRP:

- zmienna indywidualna, stała logiczna, predykat, symbol funkcyjny, stała indywidualna, predykat identyczności;
- term, formuła;
- zmienna wolna i związana, podstawienie termu za zmienną, zdanie;

Sygnaturą języka pierwszego rzędu L nazywamy zbiór jego predykatów, symboli funkcyjnych i stałych indywidualnych.

Zakładamy też oczywiście, że słuchacze znają podstawowe pojęcia składniowe KRZ (zmienna zdaniowa, funktor prawdziwościowy, formuła, podstawienie formuły za zmienną).

Reguła wnioskowania, aksjomat, dowód, teza

Zakładamy, że słuchacze znają pojęcia dotyczące inferencji (w ustalonym języku):

- *reguła wnioskowania*: zbiór par złożonych ze zbioru formuł (*przesłanek*) i formuły (*wniosku*).
- *aksjomat*: formuła przyjmowana bez dowodu.
- *dowód*: dowodem formuły ψ ze zbioru formuł (założeń) Ψ jest (przy ustalonych aksjomatach i regułach) dowolny ciąg formuł taki, że:
  - ostatnim jego elementem jest ψ;
  - każdy element tego ciągu jest albo aksjomatem, albo należy do Ψ, albo jest wnioskiem reguły wnioskowania o przesłankach będących wcześniejszymi elementami ciągu.
- *teza*: formuła posiadająca dowód z pustego zbioru założeń.

Logika

Przez *logikę* (*system logiczny*) w ustalonym języku L rozumiemy dowolną parę (L, C), gdzie C jest *operacją konsekwencji*, czyli funkcją przyporządkowującą zbiorom formuł z L zbiory formuł z L i spełniającą dodatkowe warunki, które zostaną omówione później. Operacje konsekwencji są określane tak, aby:

$$C(\Psi) = \{\psi : \psi \text{ ma dowód z założeń } \Psi\}.$$

Przykłady:

- Aksjomatyczne ujęcia KRZ i KRP.
- Systemy założeniowe w KRZ i KRP.
- Systemy tablicowe w KRZ i KRP.
- Systemy rezolucyjne w KRZ i KRP.
- Formalizm Gentzena w KRZ i KRP.

Semantyka

Zakładamy, że słuchacze znają pojęcia:

- *wartościowania* zmiennych (zdaniowych) i *tabliczki prawdziwościowe* w KRZ;
- *interpretacji* języka KRP o sygnaturze σ (mówimy wtedy o strukturach relacyjnych sygnatury σ; interpretację symbolu $S \in \sigma$ w strukturze $\mathfrak{A}$ oznaczamy przez $S^{\mathfrak{A}}$);
- *wartościowania* zmiennych (indywidualnych) w interpretacji;
- *spełniania* formuły $\psi(\overrightarrow{x})$ przez wartościowanie $\overrightarrow{w}$ w interpretacji $\mathfrak{A}$ (piszemy: $\mathfrak{A} \models \psi(\overrightarrow{x})[\overrightarrow{w}]$);
- *prawdziwości* zdania ψ w interpretacji $\mathfrak{A}$ (piszemy: $\mathfrak{A} \models \psi$).
- *modelu*: struktura $\mathfrak{A}$ jest modelem zbioru zdań Ψ, gdy $\mathfrak{A} \models \psi$ dla wszystkich $\psi \in \Psi$ (piszemy: $\mathfrak{A} \models \Psi$).

Wynikanie logiczne, prawo logiki (tautologia)

Zakładamy, że słuchacze znają pojęcia:

- *wynikania logicznego* (w ustalonym języku): zdanie ψ wynika logicznie ze zbioru zdań Ψ, gdy dla każdej interpretacji $\mathfrak{A}$, jeśli $\mathfrak{A} \models \Psi$, to $\mathfrak{A} \models \psi$ (piszemy: $\Psi \models \psi$);
- *semantycznej niesprzeczności* (*spełnialności*): zbiór Ψ jest spełnialny, gdy istnieje interpretacja $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models \Psi$;
- *prawa logiki* (*zdania logicznie prawdziwego*): ψ jest prawem logiki, gdy $\mathfrak{A} \models \psi$ dla wszystkich interpretacji $\mathfrak{A}$.

Zakładamy też, że słuchacze znają pojęcie *tautologii* KRZ.

Literatura

Dziś podajemy tylko wybrane (trochę *ad hoc*) pozycje podstawowe :

- Barwise, J. (ed.) 1977. *Handbook of Mathematical Logic*. North Holland, Amsterdam New York Oxford.
- Barwise, J., Feferman, S. (Eds.) 1985. *Model-Theoretic Logics*. Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo.
- Brady, G. 2000. *From Peirce to Skolem. A Neglected Chapter in the History of Logic*. Elsevier, Amsterdam London New York Oxford Paris Shannon Tokyo.
- Fraenkel, A.A., Bar-Hillel, Y., Levy, A. 1973. *Foundations of set theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam London.
- Gödel, K. 1986–2003. S. Feferman *et al.* (eds.) *Kurt Gödel: Collected Works, Volume I 1986, Volume II 1990, Volume III 1995, Volume IV 2003, Volume V, 2003*. Oxford University Press, New York.

- Grattan-Guiness, I. 2000. *The search for mathematical roots 1870–1940. Logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel.* Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- van Heijenoort, J. (ed.) 1967. *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1931.* Cambridge, Mass.
- Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of mathematical logic*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts.
- Hodges, W. 1993. *Model theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Kleene, S.C. 1952. *Introduction to metamathematics*. Amsterdam.
- Mancosu, P., Zach, R., Badesa, C. 2004. *The Development of Mathematical Logic from Russell to Tarski: 1900–1935.* W: Haaparanta, L. (ed.) *The Development of Modern Logic.* Oxford University Press, New York and Oxford.

- Mostowski, A. 1948. *Logika matematyczna.* Warszawa-Wrocław.
- Mostowski, A. 1965. *Thirty Years of Foundational Studies: Lectures on the Development of Mathematical Logic and the Study of the Foundations of Mathematics in 1930–1964. Acta Philosophica Fennica* **XVII**, Soc. Philos. Fennica, Helsinki.
- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej.* Uniwersytet Warszawski, Filia w Białymstoku, Białystok.
- Pogorzelski, W.A., Wojtylak, P. 2008. *Elements of the theory of completeness in propositional logic.* Birkhäuser, Basel Boston Berlin.
- Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The mathematics of metamathematics*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Shapiro, S. (ed.) 1996. *The limits of logic: higher-order logic and the Löwenheim-Skolem theorem.* Dartmouth Publishing Company, Aldershot.
- Shoenfield, J. 1973. *Mathematical logic*. Reading, Massachusetts.

- Skolem, T. 1970. *Selected Works in Logic.* Edited by Jens Erik Fenstad. Universiteitsforlaget, Oslo - Bergen - Tromsö.
- Woleński, J. 1993. *Metamatematyka a epistemologia.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Wójcicki, R. 1988. *Theory of Logical Calculi. Basic Theory of Consequence Operations.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
- Tarski, A. 1995. *Pisma logiczno-filozoficzne. Tom 1: Prawda*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Tarski, A. 2001. *Pisma logiczno-filozoficzne. Tom 2: Metalogika*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.