

# LOGIKA MATEMATYCZNA

ZADANIA SEMESTRU ZIMOWEGO

2000–2001

ORAZ ZADANIA EGZAMINACYJNE

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki Stosowanej UAM

[www.logic.amu.edu.pl](http://www.logic.amu.edu.pl)

## LOGIKA MATEMATYCZNA

### Zadania na najbliższe zajęcia (październik 2000)

#### 0. Start

1. Które ze zdań:

- a) *Bóg istnieje.*
- b) *Bóg nie istnieje.*
- c) *Życie ma sens.*
- d) *Życie nie ma sensu.*

wynika ze zdania

- e) *Nieprawda, że życie nie ma sensu, o ile Bóg nie istnieje.*

Czy zdanie e) wynika z któregoś ze zdań a)–d)? Które ze zdań a)–d) są semantycznie sprzeczne ze zdaniem e)? Czy ze zdania e) oraz z któregoś ze zdań a)–d) wynika którekolwiek ze zdań a)–d)?

2. Przypuśćmy, że prawdziwe jest zdanie:

*Nieprawda, że jeśli mówię, to myślę, ale prawdą jest, że jeśli nie myślę, to nie mówię.*

Czy zdania: *Myślę.*, *Mówię.* są wtedy prawdziwe?

#### 1. Wnioskowania dedukcyjne

3. Zbadać, czy podane wnioskowania są dedukcyjne:

a) *Jeśli ceny rosną, to ludzie — delikatnie mówiąc — się denerwują. Ale prawdą jest też, że ludzie się denerwują, o ile podaż nie jest w stanie zaspokoić popytu. Jest niepodważalnym faktem, że podaż nie zaspokaja popytu dokładnie wtedy, gdy ludzie wydają za dużo pieniędzy. Dalej, dobrze wiadomo, że podaż nie zaspokaja popytu, chociaż ludzie się denerwują. Stąd wniosek, że ludzie wydają za dużo pieniędzy. Ludzie, opamiętajcie się!*

b) *Jeżeli poziom inflacji jest stały, o ile wzrasta produkt narodowy, to bezrobocie się zmniejsza. Ale okazuje się, że bezrobocie nie zmniejsza się,*

*choć przeciętny obywatel nie trzyma oszczędności w NBB (Naszym Bezpiecznym Banku). Jednakże zachodzi co najmniej jedno z dwojga: albo produkt narodowy wzrasta, o ile poziom inflacji jest stały, albo doradcy ekonomiczni rezygnują. Bez wątpienia, jeśli doradcy ekonomiczni rezygnują, to spada bezrobocie lub wzrasta produkt narodowy. No i co z tego wynika? Ano to, że przeciętny obywatel trzyma oszczędności w NBB.*

*c) Jeśli Zosia mnie kocha, to o ile będę bogaty, to Zosia za mnie wyjdzie. No ale jeśli będę dalej żył na kocią łapę z Kasią, to Zosia za mnie nie wyjdzie, to pewne. Tak więc, przyznajmy uczciwie: jeśli Zosia mnie kocha, to bogaty nie będę. Nie ma szans.*

*d) Jeśli się ożenię, to będę się dobrze prowadził, obiecuję. Jeśli będę się dobrze prowadził, to będę miał czas na pracę naukową. Kto wie, może ucieszy to moją Dyrekcję i raptem dostanę solidną podwyżkę? Ale jeśli będę miał czas na pracę naukową, to się nie ożenię. Wychodzi mi z tych gdybań, że jednak się nie ożenię.*

*e) Jeśli Jasiak doniesie na Wacka, to Wacek się przyzna. Jeśli Zosia doniesie na Monikę, to Monika się przyzna. Nie do pomyslenia jest jednak, aby jednocześnie Wacek się nie przyznał i Zosia nie doniosła na Monikę. Spodziewajmy się zatem, że Jasiak doniesie na Wacka lub Monika się przyzna.*

*f) Mówię wam, jeśli Ala wyjdzie za mąż, to będzie awantura na weselu. Nie wierzycie? Wystarczy się tylko zastanowić: jeśli Ala wyjdzie za mąż, to na pewno i Kasia i Dorota będą druhami. A przecież jest jasne, że dojdzie do awantury, gdy co najmniej jedna z nich będzie druha, znamy je nie od dziś.*

*g) Ten pogrzeb nie ma prawa się udać, o ile nie jest plotką, że odszedł ostatni z Wielkich Przywódców Postępowej Ludzkości. Dlaczego? To chyba oczywiste. Jeśli istotnie już Go nie ma, to Lewus lub Prawus będzie przemawiał na pogrzebie. Gdy jednak pojawią się tam obaj ze swoimi tekstami, to skandal murowany, inaczej mówiąc pogrzeb nieudany.*

*h) Jeśli wycofamy naukę religii ze szkół, to nie jest prawdą, że jednocześnie: Polska będzie normalnym krajem oraz Episkopat będzie zachwycony. Panie kochany, mówię Panu: normalnym krajem to ta nasza Polska w końcu będzie. No to sam Pan widzi, że Episkopat nie będzie, delikatnie rzecz ujmując.*

*jąc, zachwycony, jeśli naukę religii wycofamy ze szkół.*

*i) Jeśli masz 1 dolara, to możesz sobie kupić lody. Ciasteczko możesz sobie kupić, jeśli masz 1 dolara. Tak więc, drogie dziecko, jeśli masz 1 dolara, to możesz sobie kupić i lody i ciasteczko. Masz tu 1 dolara i spadaj!*

*j) Jeśli Iwan jest sprytniejszy od Borysa, a Borys bogatszy od Iwana, to Iwan mógłby wydajniej pracować. Niestety! Iwan nie może pracować wydajniej. Ponadto, Borys jest jednak bogatszy od Iwana. Zatem Iwan nie jest sprytniejszy od Borysa.*

## **2. Semantyczna niesprzeczność**

4. Zbadać, czy poniższe teksty są semantycznie niesprzeczne:

*a) Nieprawda, że jeśli będzie rządzić lewica, to Episkopat będzie zachwycony. Prezydent rozwiąże Sejm lub nie przyjmie dymisji rządu. Jeśli Prezydent rozwiąże Sejm, to lewica nie będzie rządzić. Episkopat będzie zachwycony, jeśli Prezydent nie przyjmie dymisji rządu.*

*b) Agentem był Marszałek lub Prezydent. Przewodniczący był agentem, o ile Prezydent był agentem. Prymas był agentem, jeśli Marszałek był agentem. Ale przecież — na litość boską — ani Prymas, ani Przewodniczący nie byli agentami.*

*c) Jeżeli Polska będzie katolicka, to jeżeli przeprowadzi się (rzetelną, do trzeciego pokolenia) lustrację, to zapanuje prawdziwa (na wieki) demokracja. A jeśli zapanuje demokracja, to już zaraz będzie dobrobyt, o ile oczywiście przeprowadzi się lustrację. Polska będzie katolicka. I lustrację się przeprowadzi, a jakże. Tylko dobrobytu nie będzie, mili słuchacze.*

*d) Tekst taki sam, jak w c), oprócz ostatniego zdania, zamiast którego wstawić: *I będzie dobrobyt, że hej.**

## **3. Ze wspomnień starego prokuratora.**

Podobieństwo jednych osób i zdarzeń do innych osób i zdarzeń bywa zagadką, frapującą filozofów, historyków, Urząd Ochrony Państwa, uczestniczki konwersacji w maglu, itp.

a) Z banku skradziono naprawdę duży szmal. Podejrzanymi są: Adam, Bronek i Czesiu (i nikt więcej). Podczas rabunku posłużono się samochodem. Wiadomo, że Bronek nie umie prowadzić, a Czesiek, gdy robi skok, to zawsze zabiera ze sobą Adama (ew. także innych). Czy Adam brał udział w napadzie?

b) Skandal w parlamencie. O defraudację sporej sumy podejrzani są p. posłowie Mikkin-Korwe, Truchło-Czajkowski oraz Żarówa (i nikt więcej). W trakcie przesłuchania ustalono, że Mikkin-Korwe nigdy nie „pracuje” bez współnika oraz że Żarówa jest niewinny. Czy p. poseł Truchło-Czajkowski jest winny?

c) Towarzysz Leszek skarży się, iż był molestowany w lokalu partyjnym, po ciemku. Podejrzane o ten czyn są towarzyszkami: Sylwia, Barbara i Izabela. Partyjny Sąd Koleżeński ustalił, że:

— jeśli tow. Sylwia nie molestowała lub tow. Barbara molestowała (czyli, co na jedno wychodzi: tow. Barbara molestowała, jeśli tow. Sylwia molestowała), to tow. Izabela także molestowała;

— jeśli tow. Sylwia nie molestowała, to również tow. Izabela nie molestowała.

Kto molestował tow. Leszka?

d) Ksiądz proboszcz podejrzewa, że ktoś z ostatniej ławki, w której siedzą tylko Adam, Bronek i Czesiu, podbiera pieniądze z tacy. Znając swoich parafian wie, że jeśli robi to Adam, ale nie Bronek, to robi to także Czesiu. Czy można ustalić, kto uszczupla kasę księdza proboszcza?

e) W parlamencie odbywa się głosowanie nad wnioskiem dot. ochrony myśli poczętej. Głosuje się tylko za lub przeciw, sprawa jest poważna i nie ma miejsca na niezdecydowanie. O p. posłach Jurkowiaku, Niesiołku, Łopusznym i Mrówie wiemy, że:

— jeśli Jurkowiak i Niesiołek byli obaj za, to także Łopuszny był za;

— jeśli Jurkowiak był za, to co najmniej jeden z pary: Niesiołek, Łopuszny też był za (inaczej mówiąc: jeśli Jurkowiak był za, to nieprawda, że Niesiołek i Łopuszny obaj byli przeciw);

— jeśli Łopuszny był za, to i Mrówa głosował tak, jak Łopuszny;

— jeśli Jurkowiak był przeciw, to Mrówa był za.

Kto głosował za przyjęciem wniosku o ochronie myśli poczętej? Społeczeństwo chce wiedzieć!

f) W Trybunale Stanu oskarża się generałów Jaszczaka i Karuzelskiego oraz redaktora Krabca o to, że zniszczyli ważne dokumenty dotyczące historii Polskiej Rzeczypospolitej Ludowej. Wiadomo, że tylko Jaszczak, Karuzelski i Krabiec mieli dostęp do inkryminowanych dokumentów. Ustalono ponadto, że:

- jeżeli Jaszczak winien, to miał dokładnie jednego współnika;
- jeśli Karuzelski niewinny, to Krabiec też niewinny;
- jeśli jest dokładnie dwóch winnych, to Jaszczak niewinny;
- jeśli Krabiec niewinny, to Karuzelski także niewinny.

No to — *ludkowie moi, Panie Boże świeć* — kto jest winny?

g) W procesie o zabójstwo oskarżonymi są generałowie Ciastek i Płatoń oraz pułkownik Rzodkiewa. Co najmniej jeden z nich jest winien (i nikt poza nimi). Ustalono także, iż:

- jeśli Ciastek winien, a Płatoń niewinny, to Rzodkiewa winien;
- Rzodkiewa zawsze działa ze współnikiem;
- Ciastek nigdy nie działa wspólnie z Rzodkiewą.

Kto winien? Czyli komu wymierzyć należy karę główną (KS, czapa), a może tylko skarcić (jeśli sąd tak łaskaw dla morderców)?

h) W tym zadaniu chodzi o naprawdę duże pieniądze (nie jakieś tam głupie kilka milionów PLN). Podejrzani są obywatele: Grobelnik, Gabsik, Basiorowski i Gawrolny, Co najmniej jeden z nich dokonał mistrzowskiego, gigantycznego przekrętu finansowego (i nikt poza nimi). Fachowcy z UOP przeprowadzili sprawnie przesłuchania III stopnia, podczas których wyszło na jaw, że:

- Grobelnik jest niewinny;
- jeśli Gabsik jest winny, to miał dokładnie jednego współnika;
- jeśli Basiorowski jest winny, to miał dokładnie dwóch współników.

Czy obywatel Gawrolny jest winny?

i) Z Pałacu Prymasowskiego skradziono roczny dochód z tacy pobrany na terenie Rzeczypospolitej (niewiele tego było, ale szkoda przecież nawet tych paru groszy). Podejrzani o kradzież są bliźniacy Jacek i Placek oraz siostra Tekla. W trakcie dyskretnego dochodzenia ustalono, że:

- każdy z bliźniaków zawsze działa ze współnikiem (niekoniecznie z bratem);
- Tekla jest nietowarzyska i działa zawsze w pojedynkę;

— jeden z bliźniaków (nie wiadomo, który) ma alibi: krytycznego dnia widziano go w barze WRZOS w stanie wskazującym na niemożność popełnienia kradzieży.

Kto ukradł bilon?

j) Dawid był wielkim królem. Miewał słabostki, ale nie mogą one przyćmić jego zasług. Poza tym, był wybrańcem Pana i to powinno zamknąć dyskusję. Zajrzyjmy jednak do Księgi i zastanówmy się, kogo lubił Dawid. Wiadomo, że:

— jeśli Dawid lubił Abigail, to lubił też Batszebę;

— jeśli Dawid lubił Batszebę, to nie lubił Abigail lub lubił Michal (tzn. jeśli lubił Batszebę, to lubił Michal, o ile lubił Abigail);

— jeśli Dawid nie lubił Jonatana, to lubił Abigail, ale nie lubił Michal;

— jeśli Dawid lubił Jonatana, to i Abigail też lubił.

To kogo właściwie lubił Dawid?

\* \* \*

W następnym odcinku: zadania dotyczące równoważności semantycznej, badania tautologiczności formuł rachunku zdań, notacji polskiej. Podana zostanie metoda tablic analitycznych. Z teki starego prokuratora też coś wydobędziemy.

LOGIKA MATEMATYCZNA  
Zadania na najbliższe zajęcia  
(listopad 2000)

[Wszystkie zestawy zadań są w Czytelnii Instytutu.]

## 0. Zadania „na rozgrzewkę”

1. Które z poniższych zdań są prawdami logicznymi?
  - a) *Jeżeli Bóg nie istnieje lub Bóg istnieje, to Bóg istnieje.*
  - b) *Jeżeli Bóg istnieje, to jeśli Bóg istnieje, to Bóg istnieje.*
  - c) *Jeżeli Bóg istnieje, to Bóg nie istnieje lub Bóg istnieje.*
  - d) *Bóg istnieje, o ile Bóg nie istnieje lub Bóg istnieje.*
  - e) *Jeśli: dostanę podwyżkę, o ile dostanę podwyżkę, to dostanę podwyżkę.*
  - f) *Dostanę podwyżkę lub nie dostanę podwyżki, o ile dostanę podwyżkę.*
  - g) *Jeśli nieprawdą jest, że jednocześnie dostanę podwyżkę i nie dostanę podwyżki, to dostanę podwyżkę.*Punkty e)–g) polecam życzliwej uwadze Dyrekcji.
2. Które z poniższych zdań wydają się Wam cudaczne? Dlaczego?
  - a) *Papież jest nieomylny i wie o tym.*
  - b) *Papież jest nieomylny, ale w to nie wierzy.*
  - c) *Papież wie, że jest nieomylny, ale w to nie wierzy.*
  - d) *Papież nie wie, że jest nieomylny, ale w to wierzy.*
  - e) *Papież jest omylny, ale wierzy, że jest nieomylny.*
  - f) *Papież wie, że jest omylny, ale wierzy, że jest nieomylny.*
  - g) *Papież jest omylny, ale o tym nie wie.*
  - h) Jak wyżej, zmieniając *Papież jest nieomylny* na *Zosia jest w ciąży* lub *Wacek jest impotentem* (oraz, odpowiednio, *Papież* na *Zosia* lub *Wacek*).
3. Niech  $(\{A_1, \dots, A_n\}, B)$  będzie schematem wnioskowania.
  - a) Przypuśćmy, że  $B = A_i$  dla pewnego  $1 \leq i \leq n$ . Czy wtedy  $B$  wynika z  $\{A_1, \dots, A_n\}$ ?
  - b) Jeśli zarówno  $B$ , jak i  $\neg B$  wynikają z  $\{A_1, \dots, A_n\}$ , to co można powiedzieć o  $\{A_1, \dots, A_n\}$ ?
  - c) Jeśli  $B$  nie wynika z  $\{A_1, \dots, A_n\}$ , to czy  $\neg B$  wynika z  $\{A_1, \dots, A_n\}$ ? Co można wtedy powiedzieć o zbiorze  $\{A_1, \dots, A_n, \neg B\}$ ?

## 1. Drzewa semantyczne

1. Czy są niezawodnymi schematami wnioskowania:

	A	B	C
1	$\frac{\begin{array}{c} (p \vee q) \leftrightarrow r \\ \neg p \\ \neg q \end{array}}{\neg(r \wedge s)}$	$\frac{\begin{array}{c} \neg(p \vee q) \rightarrow r \\ \neg q \\ p \rightarrow s \end{array}}{s \vee r}$	$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ s \rightarrow \neg r \end{array}}{p \rightarrow \neg q}$
2	$\frac{\begin{array}{c} p \vee (q \wedge \neg r) \\ q \rightarrow (\neg r \wedge p) \end{array}}{p}$	$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \end{array}}{(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)}$	$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow (r \vee s) \\ q \rightarrow (r \rightarrow s) \end{array}}{p \vee q}$
3	$\frac{\begin{array}{c} (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \\ (q \vee s) \rightarrow t \\ \neg t \end{array}}{\neg(p \vee r)}$	$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ q \vee r \end{array}}{p \vee s}$	$\frac{\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s) \\ (\neg s \vee t) \rightarrow (p \wedge r) \end{array}}{s}$
4	$\frac{\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow (r \wedge s) \\ (r \vee t) \rightarrow (\neg u \wedge v) \\ (u \vee t) \rightarrow (p \wedge w) \end{array}}{\neg u}$	$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ (r \vee s) \rightarrow t \\ q \rightarrow (\neg s \rightarrow r) \end{array}}{p \rightarrow t}$	$\frac{(p \vee q) \rightarrow ((r \vee s) \rightarrow t)}{p \rightarrow ((r \wedge s) \rightarrow t)}$
5	$\frac{\begin{array}{c} p \leftrightarrow (q \wedge r) \\ s \leftrightarrow p \\ q \leftrightarrow (t \vee u) \\ t \vee u \end{array}}{t \wedge u}$	$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow p \\ r \end{array}}{q}$	$\frac{\begin{array}{c} \neg p \rightarrow (q \wedge r) \\ (s \rightarrow \neg t) \rightarrow (\neg q \wedge \neg p) \\ (t \vee s) \rightarrow r \end{array}}{r}$
6	$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow \neg q \\ (p \rightarrow r) \rightarrow s \\ q \vee r \end{array}}{s}$	$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow (q \wedge r) \\ \neg q \\ p \leftrightarrow s \end{array}}{\neg s}$	$\frac{(p \vee q) \rightarrow r}{\neg r \rightarrow p}$
7	$\frac{\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow r \\ s \rightarrow p \rightarrow \neg t \\ r \rightarrow (q \vee t) \\ p \rightarrow (\neg s \rightarrow q) \end{array}}{q \leftrightarrow r}$	$\frac{\begin{array}{c} (p \rightarrow q) \rightarrow r \\ s \vee (t \rightarrow (p \rightarrow q)) \\ t \wedge \neg r \\ \neg s \end{array}}{q}$	$\frac{\begin{array}{c} (p \wedge q) \rightarrow (\neg r \rightarrow s) \\ \neg s \vee \neg t \\ \neg(s \wedge t) \leftrightarrow t \end{array}}{p \rightarrow (q \rightarrow \neg r)}$

2. Czy są tautologiami:

$$(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t)))) \leftrightarrow (\neg t \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow (s \rightarrow \neg r))))$$

$$(p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow ((q \wedge r) \rightarrow \neg p)$$

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (r \rightarrow \neg(p \wedge q))$$

3. Czy są kontrtautologiami:

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow p)$$

$$(\neg p \vee q) \leftrightarrow \neg(p \rightarrow q)$$

$$(p \vee q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$$

4. Czy są semantycznie niesprzecznymi zbiorami formuł:

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$ $q$ $\neg(p \rightarrow r)$	$p \rightarrow \neg(q \vee \neg r)$ $p$ $r \rightarrow q$	$p$ $\neg q$ $\neg r$ $p \rightarrow (s \vee t)$ $t \rightarrow (r \wedge q)$
$\neg p \rightarrow q$ $p \rightarrow r$ $p$ $\neg r \vee \neg q$	$p \rightarrow q$ $p \vee q$ $\neg q$	$p \rightarrow q$ $r \rightarrow q$ $(p \vee r) \rightarrow q$

5. Rozszerzyć metodę drzew semantycznych o reguły dla alternatywy rozłącznej. Niech  $A \perp B$  oznacza alternatywę rozłączną formuł  $A$  i  $B$ . Zastąpić  $\vee$  przez  $\perp$  w zadaniach 1-4 i podać odpowiedzi.

6. Zakładamy, że formuła  $A$  jest prawdziwa. Budujemy dla niej drzewo semantyczne. Co można powiedzieć o  $A$ , jeśli:

- wszystkie gałęzie drzewa są otwarte?
- wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte?

- c) niektóre gałęzie są otwarte, a niektóre zamknięte?
7. Jak w zadaniu 6, zmieniając jedynie słowo *prawdziwa* na *fałszywa*.
8. Co można powiedzieć o  $A$ , jeśli zarówno w drzewie dla  $A$ , jak i w drzewie dla  $\neg A$  niektóre gałęzie są otwarte, a niektóre zamknięte?

## 2. Równoważność semantyczna formuł

1. Podać algorytm, pozwalający dla dowolnej formuły rachunku zdań znaleźć równoważną jej semantycznie formułę zawierającą jedynie spójniki negacji, koniunkcji i alternatywy.
2. Wyrazić wszystkie spójniki prawdziwościowe poprzez:
  - a) negację i koniunkcję;
  - b) negację i alternatywę;
  - c) negację i implikację;
  - d) binegację;
  - e) kreskę Sheffera.
3. Pokazać, że binegacja i kreska Sheffera są jedynymi spójnikami, z których każdy pozwala zdefiniować wszystkie pozostałe spójniki.

## 3. Notacje

1. Zapisać aksjomatykę Hilberta-Bernaysa w notacji polskiej.
2. Zapisać w notacji infiksowej:

$CCCpqCCCNrNstrCuCCrpCsp$   
 $CCCpqpp$   
 $CCCpqrCCrpCsp$   
 $CKCpqCpNqNp$   
 $CKCpqCNpqq$   
 $EApqAKpqAKpNqKNpq$

3. Dla formuł z 1. i 2. podać ich drzewa syntaktyczne.
4. Podać algorytmy: zmiany notacji polskiej na infiksową i na odwrot.
5. Gra dla dwojga. Jedna osoba zapisuje formuły z zadań 1.1–1.4 w postaci prefiksowej używając symboli spójników z ideografii Leśniewskiego. Druga

przekształca wyniki z powrotem na postać infiksową. Nie wolno grać na pieniądze. Są zabawniejsze fanty.

6. Wymyśl własny system notacji. Co Ci szkodzi.

#### 4. Nie naśladowuj!

*„I dlatego też, jako ten, który coś w tym kraju zrobił, nie mogę na to pozwolić, żeby obywatel nie wiedział, kto w tym kraju rządzi właściwie i na czym polega rządzi. I dlatego elementy władzy systemu muszą być podniesione, by naród dobrze wybrał.”*

#### 5. Ze wspomnień starego prokuratora

1. Udało nam się (nie pytajcie, w jaki sposób) uzyskać dostęp do stenogramów niektórych rozmów prowadzonych w Pałacu Namiestnikowskim. Oto fragment jednej z nich, dotyczącej eksportu wytworów polskiej technologii:

Prezydent: *Panowie, powiedzcie wreszcie, gdzie my właściwie te czotgi, chciałem powiedzieć te wyroby metalowe, eksportujemy. Kanclerz nie chce mi tego ujawnić, a ja nie mogę się w tym połapać. Kolano mnie boli od rana.*

Minister Obrony Narodowej: *Taaak. Kolano. Nieważne. Jeśli eksportujemy do Izraela, ale nie do Libii, to eksportujemy też do Czeczenii.*

Szef Sztabu Generalnego: *Towa..., przepraszam, Panie Prezydencie, powiem krótko, po żołniersku: albo eksportujemy jednocześnie do Libii i do Czeczenii albo do żadnego z tych dwóch krajów.*

Minister Finansów: *Ja sam siebie też pytam: a jaki my mamy w tym interes? A ile tu się da zarobić? Jasne, że jeśli eksportujemy do Libii, to eksportujemy też do Izraela.*

Kapelan Wojska Polskiego: *Z tym eksportem to prawie tak źle, jak z naszą postugą misyjną. Eksportujemy do co najmniej jednego z tych trzech krajów. A na wyposażenie naszych ubożuchnych misji w Azji, Afryce, Ameryce Południowej i Australii wciąż brakuje grosza.*

Pomóżcie Prezydentowi ustalić, do jakich krajów eksportujemy. Jest podatnikiem, jak każdy z nas, i ma prawo wiedzieć.

2. Co zarzucić można argumentacji p. posła Zawziętaka?

*Panie Marszałku, Wysoka Izbo! Ten rząd nie ma wyjścia: albo umożliwi działania dywersyjne, albo wprowadzi tyranie. A jest tak z prostego powodu: rząd albo zezwoli na całkowitą swobodę wypowiedzi, albo swobodę tę ograniczy.*

[...] *Panie Pośle Lewacki: ja Panu nie przerywałem! Oczywiście, jeśli rząd ograniczy swobodę wypowiedzi, to wprowadzi tyranię. Jeśli zaś zezwoli na całkowitą swobodę wypowiedzi, to możliwe staną się działania dywersyjne. A czyż nie tak określić należy robotę pewnych plugawych czasopism, których tytułów **nie** będę tu wymieniał?*

3. Czy Minister Koordynator ds Służb Specjalnych ma powody, aby przejmować się następującą krytyką:

*Dla każdego powinno być jasne, że UOP jest nieporadny albo całkiem niepotrzebny. Przecież jeśli podziemie gospodarcze wciąż działa, to UOP jest nieporadny. Harcerzyki! Jeśli zaś podziemie gospodarcze nie działa, to UOP jest niepotrzebny. Nie trzeba być jajogłowym profesorkiem, aby zauważyć, że podziemie działa lub nie działa, to widzi nawet idiota. Przestańmy więc marnować pieniądze podatników!*

Czy usunięcie zdania o profesorkach i idiotach zmniejszy troski Ministra? A może zwiększy?

4. Chyba zgodzicie się, że mecenas Głoweczka powinien pożegnać się z zawodem:

Prokurator: *Jeśli oskarżony jest winien, to miał współnika.*

Mecenas Głoweczka (obrońca): *To, co powiedział prokurator jest nieprawdą.*

5. Skazano 10 osób orzekając łącznie 56 lat więzienia. Rudzi dostali po 6 lat, pozostali po 5. Ilu było rudych?

6. Pewna partia ma 100 członków. Każdy z nich jest albo uczciwy albo przekupny. Wiadomo, że co najmniej jeden członek jest uczciwy oraz że z dowolnych dwóch co najmniej jeden jest przekupny. Ilu jest uczciwych?

7. Zawsze mówię prawdę lub też wszystkie moje wypowiedzi są fałszywe. Zwierzę się:

1. *Kocham Zosię.*

2. *Jeśli kocham Zosię, to kocham też Kasię.*

Czy zawsze mówię prawdę? Kogo darzę uczuciem?

8. Załóżmy, że Jaś kocha Zosię lub Kasię oraz, że jeśli kocha Zosię, to kocha też Kasię. Co możemy na pewno powiedzieć o stanie uczuć Jasia?

9. W TV występowali kiedyś bracia bliźniacy Jasio i Stasio. Jeden z nich (nie zdradzimy, który) kłamał zawsze w poniedziałki, wtorki i środy, a w pozostałe dni tygodnia mówił prawdę. Drugi kłamał w czwartki, piątki i

soboty, a w pozostałe dni tygodnia mówił prawdę. Pewnego dnia wystąpili wspólnie i oświadczyli:

Pierwszy z braci: *Jestem Jasio.*

Drugi z braci: *Jestem Stasio.*

Który z nich to Jasio?

10. Komisarz Sokolik poszukuje drukarni fałszywych pieniędzy. Od konfidentów otrzymuje następujące informacje:

Konfident z Gdańska: *Drukarnia jest w Gdańsku.*

Konfident z Poznania: *Drukarni nie ma w Poznaniu.*

Konfident z Wrocławia: *Drukarni nie ma w Gdańsku.*

Sokolik nie ma złudzeń: wie, że co najwyżej jedno z tych doniesień jest prawdziwe. Potrafi jednak bezbłędnie zlokalizować drukarnię. A czy w Tobie jest coś z Sokolika?

11. Nadkomisarz Orzełek ma wytropić, gdzie znajduje się wytwórnia narkotyków. Konfidenti donoszą:

Konfident ze Szczecina: *Wytwórni nie ma w Radomiu.*

Konfident z Radomia: *Tu nie ma wytwórni.*

Konfident z Warszawy: *Wytwórnia jest w Warszawie.*

Orzełek wie, że co najmniej jeden z donosów jest prawdziwy i że co najmniej jeden jest fałszywy. Błyskawicznie podejmuje decyzję i wysyła brygadę specjalną do ... No właśnie, dokąd?

12. Gdy byłem jeszcze młodym prokuratorem, wezwano mnie kiedyś do szpitala psychiatrycznego. Znajdowali się tam tylko lekarze i pacjenci. Każdy z nich był zdrowy lub obłąkany. Wszystkie przekonania zdrowych były trafne: jeśli zdrowy sądził, że jakieś zdanie jest prawdziwe, to istotnie było ono prawdziwe, a jeśli uważał jakieś zdanie za fałszywe, to było ono fałszywe. Wszystkie przekonania obłąkanych były błędne: jeśli obłąkany sądził, że jakieś zdanie jest prawdziwe, to było ono fałszywe, a jeśli uważał jakieś zdanie za fałszywe, to było ono prawdziwe. Wszyscy byli rzetelni: wierzyli we wszystko, co mówili. Zapytałem pierwszego napotkanego faceta: *Jest Pan pacjentem?* Odpowiedział: *Tak.* Od razu zrozumiałem, że z tym szpitalem jest coś nie w porządku. Co mianowicie?

13. W miejscowości K., na dalekim południu kraju, każdy z mieszkańców jest praworęczny lub leworęczny. Cokolwiek praworęczny napisze prawą ręką, to prawda, a co lewą ręką, to fałsz. Odwrotnie leworęczni: wszystko, co piszą lewą ręką, to prawda, a co prawą ręką, to fałsz. Popelniono tam ohydną

zbrodnię. Winowajca był leworęczny. Zatrzymano jednego podejrzanego. Znalaziono przy nim notes, a w notesie:

Na stronie pierwszej: *Zdanie na stronie drugiej jest fałszywe.*

Na stronie drugiej: *Zdanie na stronie pierwszej napisałem lewą ręką.*

Policja była bezradna. Ja jednak bez wahania ustaliłem, co należy zrobić z podejrzanym. Zgadliście?

14. To była sprawa niezwykle delikatna. Wezwał mnie sam Pan Premier. Cały roztrzęsiony, nerwowe gesty, wzrok błędny. I od razu pyta: *Komu ufać, Panie Prokuratorze? Ufam albo komendantowi policji ale nie ministrowi koordynatorowi albo też ministrowi koordynatorowi ale nie ministrowi obrony narodowej. Jeśli ufam komendantowi policji, to nie mam zaufania do własnej żony. Ale przecież — Panienko Przenajświętsza, wspomóż* (był naprawdę bardzo zdenerwowany ...) *— ja mam zaufanie do własnej żony. Czy z tego wynika, że powinienem ufać ministrowi koordynatorowi?* Fachowo doradziłem Panu Premierowi. Czekajmy na efekty.

---

W następnym odcinku: dowody aksjomatyczne i założeniowe, postacie normalne formuł, zagadnienia metalogiczne rachunku zdań. I nie widać dna w tece starego prokuratora.

LOGIKA MATEMATYCZNA  
**Zadania na najbliższe zajęcia**  
(grudzień 2000)

## 1. Postacie normalne formuł

1. Sprowadzić do koniunkcyjnej postaci normalnej formuły:

$$\begin{aligned}(p \leftrightarrow q) &\leftrightarrow (q \leftrightarrow p) \\ (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) &\leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r)\end{aligned}$$

2. Sprowadzić do alternatywnej postaci normalnej formuły:

$$\begin{aligned}\neg((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)) \\ (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)\end{aligned}$$

*Uwaga:* Rozwiązania powyższych dwóch zadań uzyskać można różnymi sposobami. Oto niektóre z nich:

- zastosować reguły podane na wykładzie;
- przekonać kogoś, by za darmo bądź odpłatnie wykonał rachunki;
- skorzystać z dostępnych programów komputerowych;
- samemu przygotować stosowny program komputerowy.

3. Popatrując na tablicę prawdziwościową dowolnej formuły  $A$  skonstruować formułę  $B$  taką, że:

- $A$  jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy  $B$  jest fałszywa, oraz
- $B$  zawiera tylko spójniki koniunkcji, alternatywy i negacji, przy czym negacje nie mają w swym zasięgu żadnych formuł złożonych.

## 2. Dowody założeniowe

1. Podać dowody założeniowe następujących tez:

$$\begin{aligned}((p \wedge q) \rightarrow r) &\rightarrow ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q) \\ (p \rightarrow (q \wedge r)) &\rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \\ ((p \vee q) \rightarrow r) &\rightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \\ ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) &\rightarrow \neg p \\ ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) &\rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)\end{aligned}$$

### 3. Zagadnienia metalogiczne rachunku zdań

1. Udowodnić, że operacja konsekwencji  $Cn$  (zob. def. III.1.3 w podręczniku Tadeusza Batoga) ma następujące własności:

- a)  $X \subset Cn(X)$ .
- b)  $Cn(Cn(X)) \subset Cn(X)$ .
- c)  $Cn(Cn(X)) = Cn(X)$ .
- d) Jeżeli  $X \subset Y$ , to  $Cn(X) \subset Cn(Y)$ .
- e)  $A \in Cn(X)$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki skończony zbiór  $Y$ , że  $Y \subset X$  oraz  $A \in Cn(Y)$ .

### 4. Ze wspomnień starego prokuratora

1. Mój znakomity przyjaciel, Henri B. opowiadał mi o swojej wizycie w dalekiej Goedlandii. Zamieszkują ją wyłącznie Czarni i Czerwoni. Czarni zawsze mówią prawdę, zaś wypowiedzi Czerwonych to bez wyjątku fałsz. Niektórzy Czarni są wyróżnieni — nazywa się ich Świątobliwymi. Podobnie, wśród Czerwonych wyróżnia się grupę obywateli zwanych Potępionymi. Żywe jest życie polityczne — obywatele Goedlandii tworzą rozmaite partie. Mają przy tym „wysoki stopień świadomości społeczno-politycznej”: dowolny obywatel o każdej z partii twierdzi, że jest jej członkiem lub też twierdzi, że nie jest (żadnych inteligenckich miazmatów!). Świątobliwi tworzą partię. Podobnie Potępieni. Gdy weźmiemy dowolną partię, to wszyscy obywatele, którzy do niej nie należą, też tworzą partię. Dla każdej z partii znajdziemy obywatela, który twierdzi, że do niej należy. Przed kolejnymi wyborami trzeba rozstrzygnąć wiele problemów dotyczących reprezentacji politycznej obywateli w parlamencie. Oto niektóre z nich:

- a) Czy wszyscy Czarni są Świątobliwi?
- b) Czy wszyscy Czerwoni są Potępieni?
- c) Czy można zarejestrować wszystkich Czarnych jako partię?
- d) Czy wszyscy Czerwoni tworzą partię?

2. W Klubolandii obywatele tworzą kluby. Każdy może należeć do wielu klubów. Każdy klub nosi imię jakiegoś obywatela. Nie ma różnych klubów o tym samym imieniu. Dana osoba nie musi należeć do klubu swego imienia. Jeśli ktoś należy do klubu swego imienia, to nazywany jest *towarzyskim*; w przeciwnym przypadku mówimy, że jest *nietowarzyski*. Czy zbiór  $N$  wszystkich osób nietowarzyskich tworzy klub?

3. W RPJ (Republice Pomroczości Jasnej) obywatele też tworzą kluby. Tu dla każdego obywatela istnieje dokładnie jeden klub noszący jego imię. Każdy klub nosi czyjeś imię (nie ma klubów anonimowych). Dana osoba może być członkiem klubu jawnie bądź w tajemnicy. Kto nie jest jawnie członkiem klubu swego imienia uchodzi za *podejrzanego*. Jeśli ktoś należy w tajemnicy do klubu swego imienia, to nazywamy go *szpiegiem*. Zbiór wszystkich podejrzanych tworzy klub. Udowodnij, że w RPJ musi istnieć szpieg.

---

W następnym odcinku: wprowadzenie w problematykę rachunków predykatów, nazw, zbiorów i relacji. Także to, co Humanistki lubią najbardziej: pojęcie nieskończoności. Wejściu w nowe tysiąclecie towarzyszyć nam będą wspomnienia starego prokuratora.

LOGIKA MATEMATYCZNA  
Zadania na najbliższe zajęcia  
(styczeń–luty 2001)

## 1. Rachunek zbiorów i relacji

1. Rozwiązać wszystkie zadania z części *Rachunek zbiorów i relacji* w zbiorze zadań Barbary Stanosz *Ćwiczenia z logiki*.

*Uwaga:* To ćwiczenie może okazać się nieco czasochłonne. Jest jednak dla Państwa łatwe: toż (zgodnie z programem studiów) już na I roku, na zajęciach ze wstępu do językoznawstwa omówiono wszystkie niezbędne pojęcia. Oczywiście, to tylko żart.

2. Dla ambitnych.

a) Podać przykład niepustych zbiorów  $A$  i  $B$  takich, że  $A \cap B = A \times B$ .

b) Udowodnić, że istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja z przedziału domkniętego  $[0, 1]$  na przedział otwarty  $(0, 1)$ .

c) Pokazać, że zbiór  $X$  jest skończony w sensie Dedekinda wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niepusty podzbiór rodziny wszystkich podzbiorów zbioru  $X$  ma element  $\subseteq$ -maksymalny.<sup>1</sup> Inaczej mówiąc, udowodnić, że definicje nieskończoności Dedekinda i Tarskiego są równoważne.

d) Mówimy, że relacja  $R$  *dobrze porządkuje* zbiór  $X$ , gdy  $R$  jest liniowym porządkiem na  $X$  i każdy niepusty podzbiór  $X$  ma element  $R$ -najmniejszy.<sup>2</sup> Pokazać, że:

$\alpha$ ) Dla każdego zbioru istnieje relacja, która go dobrze porządkuje.

$\beta$ ) Zbiór  $X$  jest skończony w sensie Dedekinda wtedy i tylko wtedy, gdy  $\bigcup X = X$  oraz relacje  $\in \cap X^2$  i  $(\in \cap X^2)^{-1}$  dobrze porządkują  $X$ . Inaczej mówiąc, udowodnić, że definicje nieskończoności Dedekinda i von Neumanna są równoważne.

3. Już na stronie 14 znanego Państwu podręcznika *Wstęp do językoznawstwa* jeden z Autorów pisze o  *powszechnie znanej teorii algebr Boole'a*. O.K. Nie

---

<sup>1</sup>Element  $x \in X$  jest  $R$ -maksymalny (dla  $R \subseteq X^2$ ), gdy nie istnieje  $y \in X$  taki, że  $xRy$  oraz  $x \neq y$ .

<sup>2</sup>Element  $x \in X$  jest  $R$ -najmniejszy (dla  $R \subseteq X^2$ ), gdy  $xRy$  dla wszystkich  $y \in X$  takich, że  $x \neq y$ .

muszę zatem nikomu przypominać takich podstawowych pojęć tej teorii jak np. filtr i ultrafiltr, itp.

$\alpha$ ) Udowodnić, że każdy filtr zawarty jest w pewnym ultrafiltrze.

$\beta$ ) Podać przykład ultrafiltru niegłównego w algebrze wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych.

$\gamma$ ) Udowodnić, że dowolna algebra Boole'a jest izomorficzna z pewną algebrą podzbiorów stosownego zbioru (*twierdzenie Stone'a o reprezentacji*).

## 2. Ze wspomnień starego prokuratora

Wszystkie ze wspomnień, które przekazał mi ostatnio stary prokurator są niecenzuralne. Tak więc — niestety (a może na szczęście) — nie mogą one zostać tu opublikowane.

---

W następnym odcinku: rachunek predykatów.

Zobacz — zadania semestru letniego 2006–2007 na stronie:  
[www.logic.amu.edu.pl/posluga\\_pogon.html](http://www.logic.amu.edu.pl/posluga_pogon.html)

---

Podane wyżej zadania były rozwiązywane na zajęciach z LOGIKI MATEMATYCZNEJ I SEMIOTYKI LOGICZNEJ — kurs dla II roku *etnolingwistyki*, semestr zimowy roku akademickiego 2000–2001.

Poniżej podajemy zestawy zadań egzaminacyjnych:

Egzamin pisemny	Zestawy dla: Ambitnych, Utalentowanych, Kulturalnych, Inteligentnych
Ciąg dalszy egzaminu pisemnego	Zestawy dla: Śmiałych, Odważnych
Egzamin poprawkowy 1	Zestawy: Ulgowy i Ostatniej Szansy
Egzamin poprawkowy 2	Zestawy dla Slaves i Businesswomen

**1. Sprawdź, czy jest wnioskowaniem dedukcyjnym:**

*Jeśli nie zdam tego egzaminu, to się utopię lub Pogonowski będzie wisiął. Nie odmówię (już dziś wieczorem!) Rafałowi, o ile zdam ten egzamin. No tak, ale przecież jeśli się utopię, to odmówię Rafałowi (zał!). Tak więc, Pogonowski niechybnie będzie wisiął.*

**2. Sprawdź, czy jest semantycznie sprzecznym zbiorem zdań:**

*Bracia i Siostry! Wtedy i tylko wtedy osiągniecie zbawienie, gdy posłuszni jesteście Pasterzom. Jeśli taca jest pusta, to nie jesteście posłuszni Pasterzom. Kościół jest ubogi, jeśli taca jest pusta. Ale przecież — najmiłsi — jesteście jednak posłuszni Pasterzom. Pamiętajcie! Jeśli jesteście posłuszni Pasterzom, to osiągniecie zbawienie i jednocześnie Kościół nie jest ubogi. Idźcie tedy w pokoju, a nie zapomnijcie o tacy!*

**3. Sprawdź, czy jest poprawnym sylogizmem:**

*Wszyscy mężczyźni to dranie. Ale niektórzy dranie są przecież przystojni. Wynika stąd, że są przystojni mężczyźni.*

**4.** Przypuśćmy, że w schemacie wnioskania o przesłankach  $A_1, A_2, \dots, A_n$  oraz wniosku  $B$  jedna z przesłanek jest tautologią. Czy wtedy schemat jest niezawodny?

**5. Pokaż, że nie jest prawem rachunku zbiorów:**

$$A \subset B \cap C \wedge C \in B \rightarrow C \in A$$

**6.** Zbadaj własności formalne relacji zachodzącej między dwiema liczbami naturalnymi wtedy i tylko wtedy, gdy ich suma jest parzysta.

**1. Sprawdź, czy jest wnioskowaniem dedukcyjnym:**

*Panie piękny i młody! Jeśli dacie pieniążek, to Cyganka prawdę Wam powie. Będziecie szczęśliwi, o ile: nie dacie pieniążka lub kupicie ten lubczyk. Jeśli nie kupicie lubczyka, to Cyganka nie powie Wam prawdy. Wy, Panie, uczony, widzicie więc, że z tego com powiedziała wynika, że szczęśliwi będziecie. To jak będzie z tym pieniążkiem? A może lubczyk? A może...?*

**2. Sprawdź, czy jest semantycznie sprzecznym zbiorem zdań:**

*Co to ze mną będzie? Jeśli ukończę studia, to wyjdę za mąż. Będę bogata, jeśli wyjdę za mąż (mniem, mniem!). Oczywiście, nie będzie tak, że jednocześnie będę pracować i nie ukończę studiów. Nie będę bogata, ale będę pracować. To co, zazdrościcie mi, czy nie?*

**3. Sprawdź, czy jest poprawnym sylogizmem:**

*Żaden jezuita nie jest skinem. Pewien jezuita będzie zbawiony. Stąd jasno widać, że żaden skin nie będzie zbawiony.*

**4.** Przypuśćmy, że w schemacie wnioskania o przesłankach  $A_1, A_2, \dots, A_n$  oraz wniosku  $B$  wniosek ten jest tautologią. Czy wtedy schemat jest niezawodny?

**5. Pokaż, że nie jest prawem rachunku zbiorów:**

$$A \subset A \cap B \wedge C \in B \rightarrow C \in A$$

**6.** Zbadaj własności formalne relacji zachodzącej między dwiema liczbami naturalnymi wtedy i tylko wtedy, gdy ich suma jest nieparzysta.

**1.** Sprawdź, czy jest wnioskowaniem dedukcyjnym:

*Jeśli uda mi się ściągnąć, to zdam ten egzamin i zaszaleję wieczorem. Wtedy i tylko wtedy uda mi się ściągnąć, gdy Pogonowski okaże się ślepowy. Oj! Mamusiu, ratunku! Nie zdam tego egzaminu. No cóż, wynika z tego, że Pogonowski nie jest ślepowy. Nic to! Jakoś to będzie (zwłaszcza dziś wieczorem...)!*

**2.** Sprawdź, czy jest semantycznie sprzecznym zbiorem zdań:

*Lubię żyć dostatnio. A jeśli lubię żyć dostatnio, to wyjdę za Roberta lub za Mariana (każdy z nich ma większą kasę, niż ci wszyscy profesorkowie z Instytutu, razem wzięci!). Jeśli wyjdę za Mariana, to będę niańczyć bachory i spędzać cały czas przy garach. Niedoczekanie! Ani nie będę niańczyć bachorów ani nie będę całego czasu spędzać przy garach. Za Roberta też nie wyjdę. Kto chciałby żyć z takim dziwkarzem i pijakiem?*

**3.** Sprawdź, czy jest poprawnym sylogizmem:

*Wszyscy logicy to nudziarze. Nie wszyscy nudziarze to kretyni. Wynika stąd, że pewien logik nie jest kretynem.*

**4.** Przypuśćmy, że w schemacie wnioskania o przesłankach  $A_1, A_2, \dots, A_n$  oraz wniosku  $B$  wniosek ten jest kontrtautologią. Czy wtedy schemat jest niezawodny?**5.** Pokaż, że nie jest prawem rachunku zbiorów:

$$A \cup B \subset B \wedge C \in B \rightarrow C \in A$$

**6.** Zbadaj własności formalne relacji zachodzącej między dwiema liczbami naturalnymi wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn jest parzysty.

**1. Sprawdź, czy jest wnioskowaniem dedukcyjnym:**

*Jeśli wydarzy się cud, to zdam ten egzamin, o ile uda mi się ściągnąć. Jeśli wydarzy się cud, to jeśli zaraz uśmiechnę się do Pogonowskiego, to Pogonowski dostanie podwyżkę. Wydarzy się cud i co najmniej jedno z dwójga: albo uda mi się ściągnąć albo zaraz uśmiechnę się do Pogonowskiego. Oj! Niedobrze! Nie zdam tego egzaminu. Co gorsza, z tego wszystkiego wynika, że Pogonowski dostanie podwyżkę. Czy to jest sprawiedliwe?*

**2. Sprawdź, czy jest semantycznie sprzecznym zbiorem zdań:**

*Rodaku! Jeśli jesteś prawdziwym Polakiem, to głosujesz na PPP (Partię Prawdziwych Polaków). Wtedy i tylko wtedy PPP wygrywa wybory, jeśli Ty na nią głosujesz. Co najmniej jedno z dwójga: albo jesteś prawdziwym Polakiem, albo jesteś za włączeniem Polski do Unii Europejskiej. PPP nie wygrywa wyborów, jeśli jesteś za włączeniem Polski do Unii Europejskiej.*

**3. Sprawdź, czy jest poprawnym sylogizmem:**

*Nie wszyscy jezuici będą potępieni. Żadna kobieta nie jest jezuitą. Wynika stąd, że jakaś kobieta będzie potępiona.*

**4.** Przypuśćmy, że w schemacie wnioskania o przesłankach  $A_1, A_2, \dots, A_n$  oraz wniosku  $B$  jedna z przesłanek jest kontrtautologią. Czy wtedy schemat jest niezawodny?

**5. Pokaż, że nie jest prawem rachunku zbiorów:**

$$C \subset A \cup B \wedge C \in A \rightarrow C \in B$$

**6.** Zbadaj własności formalne relacji zachodzącej między dwiema liczbami naturalnymi wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn jest nieparzysty.

1. Niech  $X$  będzie zbiorem formuł, którego jednym z elementów jest:

$EACuwCvuKKCpqCqrKNKsNpKNrs.$

Czy  $X$  jest semantycznie sprzeczny?

2. Załóżmy, że prawdziwe są następujące zdania:

*Każdy Myszasty jest Pierzasty lub Ogoniasty. Co najmniej jeden Myszasty jest Pierzasty. Są Pierzaste, które nie są ani Myszaste ani Ogoniaste.*

Co stąd wynika na temat związków między Myszastymi a Ogoniastymi?

3. Zbadaj formalne własności relacji zachodzącej między dwiema liczbami naturalnymi wtedy i tylko wtedy, gdy bezwzględna wartość różnicy pierwszej z nich i drugiej jest nieparzysta.

4. Co zarzucić można poniższemu wnioskowaniu p. posła Zawziętaka?

*Panie Marszałku, Wysoka Izbo! Ten rząd uczynić musi co najmniej jedno z dwojga: albo umożliwi działania dywersyjne, albo wprowadzi tyranie. A jest tak z prostego powodu: rząd albo zezwoli na całkowitą swobodę wypowiedzi, albo swobodę tę ograniczy. [...] Panie Pośle Lewacki: ja Panu nie przerywałem! Oczywiście, jeśli rząd ograniczy swobodę wypowiedzi, to wprowadzi tyranie. Jeśli zaś zezwoli na całkowitą swobodę wypowiedzi, to możliwe staną się działania dywersyjne. A czyż nie tak określić należy robotę pewnych plugawych czasopism, których tytułów **nie** będę tu wymieniał?*

1. Niech  $X$  będzie zbiorem formuł, którego jednym z elementów jest:

$EKKKCpqCqrNKsNpKNrsACuwCvu.$

Czy  $X$  jest semantycznie sprzeczny?

2. Załóżmy, że prawdziwe są następujące zdania:

*Każdy Ogoniasty jest Myszasty lub Pierzasty. Każdy Myszasty jest Ogoniasty lub Pierzasty. Co najmniej jeden Pierzasty jest Myszasty.*

Co stąd wynika na temat związków między Pierzastymi a Ogoniastymi?

3. Zbadaj formalne własności relacji zachodzącej między dwiema liczbami naturalnymi wtedy i tylko wtedy, gdy bezwzględna wartość różnicy pierwszej z nich i drugiej jest parzysta.

4. Czy Minister Koordynator ds Służb Specjalnych ma prawo zakwestionować następujące wnioskowanie:

*Dla każdego powinno być jasne, że zachodzi co najmniej jedno z dwojga: UOP jest nieporadny albo niepotrzebny. Przecież jeśli podziemie gospodarcze wciąż działa, to UOP jest nieporadny. Harcerzyki! Jeśli zaś podziemie gospodarcze nie działa, to UOP jest niepotrzebny. Nadto, nie trzeba być ja-jogłowym profesorkiem, aby zauważyć, że podziemie działa lub nie działa, to widzi nawet idiota. Przestańmy więc marnować pieniądze podatników!*

Czy usunięcie zdania o profesorkach i idiotach zmniejszy troski Ministra? A może zwiększy?

## Zestaw ulgowy

dla zdających po raz trzeci egzamin z LOGIKI MATEMATYCZNEJ

1. Jakiż to wniosek dotyczący zależności między zbiorem protegowanych a zbiorem przyjętych na studia wynika z poniższych przesłanek?

*Co najmniej jeden uzdolniony jest przyjęty.*

*Nie wszyscy są uzdolnieni.*

*Każdy jest protegowany lub uzdolniony lub przyjęty.*

*Wszyscy protegowani są uzdolnieni lub przyjęci.*

*Wszyscy uzdolnieni protegowani są przyjęci.*

*Wszyscy przyjęci są uzdolnieni lub protegowani.*

*Żaden uzdolniony przyjęty nie jest protegowany.*

Ponadto: co wiadomo na temat uzdolnionych, którzy nie są przyjęci?<sup>3</sup>

2. Udowodnij, że operator konsekwencji jest idempotentny i finitystyczny.

3. Udało nam się (nie pytajcie, w jaki sposób) uzyskać dostęp do stenogramów niektórych rozmów prowadzonych w Pałacu Namiestnikowskim. Oto fragment jednej z nich, dotyczącej eksportu wytworów polskiej technologii:

Prezydent: *Panowie, powiedzcie wreszcie, gdzie my właściwie te czotgi, chciałem powiedzieć te wyroby metalowe, eksportujemy. Kanclerz nie chce mi tego ujawnić, a ja nie mogę się w tym potapać. Kolano mnie boli od rana.*

Minister Obrony Narodowej: *Taaak. Kolano. Nieważne. Jeśli eksportujemy do Izraela, ale nie do Libii, to eksportujemy też do Czeczenii.*

Szef Sztabu Generalnego: *Towa..., przepraszam, Panie Prezydencie, powiem krótko, po żołniersku: albo eksportujemy jednocześnie do Libii i do Czeczenii albo do żadnego z tych dwóch krajów.*

Minister Finansów: *Ja sam siebie też pytam: a jaki my mamy w tym interes? A ile tu się da zarobić? Jasne, że jeśli eksportujemy do Libii, to eksportujemy też do Izraela.*

Kapelan Wojska Polskiego: *Z tym eksportem to prawie tak źle, jak z naszą postugą misyjną. Eksportujemy do co najmniej jednego z tych trzech krajów. A na wyposażenie naszych ubożuchnych misji w Azji, Afryce, Ameryce Południowej i Australii wciąż brakuje grosza.*

---

<sup>3</sup>Może dość już tych pytań, bo sytuacja robi się — jak mawiają niektórzy — groteskowa... Jeszcze tylko jedno, króciutkie: kto się śmieje?

Założmy, że powyższe wypowiedzi Sterników Nawy Państwowej są prawdziwe. Pomóż Prezydentowi ustalić, do jakich krajów eksportujemy. Jest podatnikiem, jak każdy z nas, i ma prawo wiedzieć.

4. Zapisz prawa: transpozycji, komutacji oraz *modus tollendo tollens* w odwrotnej notacji polskiej (sufiksowej), tzn. takiej, w której symbol spójnika następuje po symbolach swoich argumentów.

## Zestaw ostatniej szansy

dla zdających po raz trzeci egzamin z LOGIKI MATEMATYCZNEJ

1. Uprasza się o zbadanie formalnych własności relacji zachodzącej między dwiema dodatnimi liczbami naturalnymi wtedy i tylko wtedy, gdy pierwsza z nich nie jest podzielna przez drugą.

2. Czyżby z poniższych przesłanek wynikał jakiś wniosek dotyczący zależności między inteligentnymi a sympatycznymi?

*Co najmniej jeden uczciwy jest sympatyczny.*

*Nie wszyscy są uczciwi.*

*Każdy jest uczciwy lub inteligentny lub sympatyczny.*

*Wszyscy inteligentni są uczciwi lub sympatyczni.*

*Wszyscy uczciwi inteligentni są sympatyczni.*

*Wszyscy sympatyczni są uczciwi lub inteligentni.*

*Żaden uczciwy sympatyczny nie jest inteligentny.*

Ponadto: co można powiedzieć o uczciwych, którzy nie są sympatyczni?

3. Nie lękaj się! Wypłyn na głębie (intelektualną, oczywiście)! Śmiało opowiedz, co wiesz o operatorach konsekwencji — co to jest, jakie ma własności ... Zakończ swoją klarowną i precyzyjną wypowiedź mocnym akcentem: udowodnij, że operator konsekwencji jest idempotentny. Zadumaj się nad własnością monotoniczności i spróbuj wydobyć z pamięci moment, gdy do Twoich kształtnych uszek dopływał mój aksamitny głos, szemrzący coś o wnioskowaniach, które nie są monotoniczne... Czy jeszcze pamiętasz?

4. Dawid ben Jesse był wielkim królem. Miewał słabostki, ale nie mogą one przyćmić jego zasług. Poza tym, był wybrańcem dobrego Pana naszego JHWH i to powinno zamknąć dyskusję. Zajrzyjmy jednak do Księgi i zastanówmy się, kogo lubił Dawid. Wiadomo, że:

- jeśli Dawid lubił Abigail, to lubił też Batszebę;
- jeśli Dawid lubił Batszebę, to lubił Mikal, o ile lubił Abigail;
- jeśli Dawid nie lubił Jonatana, to lubił Abigail, ale nie lubił Mikal;
- jeśli Dawid lubił Jonatana, to i Abigail też lubił.

To kogo właściwie lubił Dawid, melech Israel?

1. Czy jest semantycznie sprzecznym zbiorem formuł:

$$\{p \rightarrow \neg(q \vee \neg r), p, r \rightarrow q\}$$

2. Czy jest wnioskowaniem dedukcyjnym:

If our services to the gods are like those services a slave does for his master, the gods profit in some way from our services. If they profit from our services, they owe us something. But our services to the gods are not like those a slave does for his master. Therefore, the gods owe us nothing.

3. Czy jest wnioskowaniem dedukcyjnym:

Wszystkie Myszaste są Ogoniaste lub Pierzaste. Nie wszystkie Pierzaste są Ogoniaste. Stąd wynika, że niektóre Pierzaste nie są Myszaste.

4. Zbadaj formalne własności relacji zachodzącej między dwiema liczbami całkowitymi wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn jest dodatni.

5. Sformułuj prawa: Claviusa, *dictum de omni* oraz rozdzielności koniunkcji względem alternatywy.

1. Czy jest semantycznie sprzecznym zbiorem formuł:

$$\{\neg p \rightarrow q, p \rightarrow r, p, \neg r \vee \neg q\}$$

2. Czy jest wnioskowaniem dedukcyjnym:

If our worship of the gods is like a business transaction, then we must gain something and so must the gods. But, if the gods gain something, they are benefited by us. But we cannot benefit the gods. Therefore, our worship is not like a business transaction.

3. Czy jest wnioskowaniem dedukcyjnym:

Wszystkie Myszaste są Pierzaste lub Ogoniaste. Niektóre Pierzaste nie są Ogoniaste. Zatem, nie wszystkie Myszaste są Pierzaste.

4. Zbadaj formalne własności relacji zachodzącej między dwiema liczbami całkowitymi wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn jest ujemny.

5. Sformułuj prawa: Duns Scotusa, *dictum de singulo* oraz rozdzielności alternatywy względem koniunkcji.