2. Tautologie KRP

2.1. Definicje

Formuła A jest ***tautologią*** KRP, gdy jest prawdziwa we wszystkich interpretacjach. Oznacza to, że formuła A ***nie jest*** tautologią, dokładnie wtedy, gdy w co najmniej jednej interpretacji prawdziwe jest zaprzeczenie formuły A, tj. formuła $\neg A$. Zatem, formuła A jest tautologią KRP dokładnie wtedy, gdy w drzewie semantycznym formuły $\neg A$ wszystkie gałęzie są ***zamknięte***.[1]

Sprawdzenie metodą drzew semantycznych, czy dana formuła A jest tautologią KRP polega więc na:

- przypuszczeniu, że $\neg A$ jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji;
- zbudowaniu drzewa semantycznego formuły $\neg A$;
- sprawdzeniu, czy wszystkie gałęzie są zamknięte;
  - jeśli tak jest, to formuła A jest tautologią KRP;
  - jeśli tak nie jest, tzn. drzewo zawiera co najmniej jedną gałąź otwartą (skończoną lub nieskończoną), to A nie jest tautologią KRP.

Sprawdzanie, czy dana formuła jest kontrtautologią KRP jest procedurą dualną do powyższej. Przypomnijmy, że formuła A jest ***kontrtautologią*** KRP wtedy i tylko wtedy, gdy jest fałszywa we wszystkich interpretacjach. Tak więc, formuła A ***nie jest*** kontrtautologią dokładnie wtedy, gdy jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji. Aby sprawdzić, czy formuła A jest kontrtautologią KRP procedurę drzew semantycznych stosujemy następująco:

- przypuszczamy, że A jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji;
- budujemy drzewo semantyczne dla A;
- jeśli wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte, to formuła A jest kontrtautologią KRP;
- jeśli drzewo semantyczne dla A zawiera gałęzie otwarte, to A nie jest kontrtautologią KRP, a z gałęzi otwartych odtworzyć możemy interpretacje, w których A jest prawdziwa.

2.2. Przykłady

Pokażemy na kilku przykładach, jak stosować omówione procedury w przypadku wybranych nie całkiem bezmyślnie formuł.

Przykład III.2.1.: Abraham Lincoln

Formule języka KRP $\exists x \forall y\, xPy \rightarrow \exists z\, zPz$ przy interpretacji $x_1 P x_2$ jako x_1 *oszukuje* x_2 odpowiada, jak się wydaje,[2] zdanie polskie:

[1] Formalny dowód tego twierdzenia podajemy w rozdziale IV. Nieufne Czytelniczki (takie cenimy najbardziej) mogą przed przystąpieniem do lektury przykładów z podrozdziałów III.1.–III.5. zapoznać się najpierw z dowodami metatwierdzeń ustalających poprawność metody drzew semantycznych dla KRP; są one zamieszczone właśnie w rozdziale IV. Nie są to ***bardzo*** trudne twierdzenia — w ich dowodach wykorzystuje się , m.in. wspomniane w części wstępnej niniejszych notatek (plik krp300.pdf) uniwersa Herbranda, zbiory Hintikki i lemat Hintikki, pewne rozumowania indukcyjne. Wykazanie poprawności metody drzew semantycznych sprowadza się do pokazania, że jest ona ***trafna*** (*sound*) oraz ***pełna*** (*complete*). Mówiąc może nieprecyzyjnie, ale chyba dość obrazowo: poprawność metody drzew semantycznych ustala się pokazując, że gałęzie otwarte odpowiadają możliwym interpretacjom, zaś gałęzie zamknięte wykluczają istnienie interpretacji. Przypominamy, że skrypt ma charakter propedeutyczny: zależy nam bardziej na pokazaniu, że omawiana metoda ma pewne zalety (teoretyczne i dydaktyczne), niż na systematycznym, całościowym wykładzie klasycznego rachunku logicznego. W niniejszych notatkach (tj. w podrozdziałach III.1.–III.5.) zakładamy, że Czytelniczki zaufają, iż nie oszukujemy.

[2] Przy znajdowaniu odpowiedników w języku naturalnym dla formuł języka KRP w których występują kwantyfikatory pojawiają się, rzecz jasna, problemy z anaforą!

Jeśli jest ktoś, kto oszukuje wszystkich, to ktoś sam siebie oszukuje.

Wypowiedziane ze stosowną emfazą (oraz, ewentualnie, odpowiednio dramatyczną gestykulacją) brzmi ono całkiem kaznodziejsko. Pokażemy, że formuła języka KRP, która odpowiada jego strukturze składniowej jest tautologią KRP. Sprawę jej wykorzystania jako oręża np. homiletycznego pozostawiamy ew. zainteresowanym.

Aby przekonać się, czy formuła $\exists x \forall y\, xPy \rightarrow \exists z\, zPz$ jest tautologią KRP trzeba sprawdzić, czy jest ona prawdziwa we wszystkich interpretacjach. Oczywiście, *wszystkich* interpretacji żaden śmiertelnik sprawdzić nie może, nawet jeśli jest wysoko wykwalifikowanym pracownikiem Shin Beth lub Mossadu. Możemy jednak próbować ***wykluczyć, że formuła ta jest fałszywa*** we wszelkich interpretacjach. Gdy próba taka się powiedzie, to badana przez nas formuła ***jest tautologią*** — skoro nie jest fałszywa w żadnej interpretacji, to w każdej interpretacji jest prawdziwa. Dla pokazania, że dana formuła jest tautologią wystarczy więc dowieść, że wykluczone jest, aby jej negacja była prawdziwa. W przełożeniu na terminologię omawianej metody drzew semantycznych, pokazanie, iż dana formuła jest tautologią sprowadza się do wykazania, że drzewo semantyczne jej negacji ma wszystkie gałęzie zamknięte.

Drzewo semantyczne negacji rozważanej formuły ma postać następującą:

$$\begin{array}{c}
\neg(\exists x \forall y\, xPy \rightarrow \exists z\, zPz)\ ^{1.\neg\rightarrow} \\
| \\
(1_g)\ \ \exists x \forall y\, xPy\ ^{2.\checkmark a} \\
| \\
(1_d)\ \ \neg\exists z\, zPz\ ^{3.\star a} \\
| \\
(2)\ \ \forall y\, aPy\ ^{4.\star a} \\
| \\
(3)\ \ \neg aPa \\
| \\
(4)\ \ aPa \\
| \\
\times_{3,4}
\end{array}$$

Wszystkie gałęzie tego drzewa (w tym przypadku: jedyna gałąź) są zamknięte. Zanegowana formuła umieszczona w korzeniu tego drzewa ***nie jest zatem prawdziwa w żadnej interpretacji***. Stąd, formuła $\exists x \forall y\, xPy \rightarrow \exists z\, zPz$ ***jest prawdziwa w każdej interpretacji***. Widać zatem, że formuła ta jest tautologią KRP.

Dydaktykę logiki w czasach Polskiej Rzeczpospolitej Ludowej wspomagały często działania Polskiej Zjednoczonej Partii Robotniczej, nachalnie lub choćby odruchowo prowokujące do skojarzeń natury np. historycznej. Abraham Lincoln miał jakoby powiedzieć (nie po polsku, oczywiście): *Można oszukiwać wszystkich przez pewien czas, lub niektórych przez cały czas; ale nie można oszukiwać wszystkich przez cały czas.* Czytelniczki mogą spróbować zastanowić się, jaka formuła KRP najbliższa jest strukturze składniowej tej wypowiedzi (pomijając modalności).

Zauważmy jeszcze marginalnie, że w rozpatrywanej na początku formule $\exists x \forall y\, xPy \rightarrow \exists z\, zPz$ zmienna związana z może być, bez naruszenia własności semantycznych tejże formuły, przemianowana np. na x.

Prostszym (?) ćwiczeniem jest zbudowanie drzewa semantycznego odpowiadającego strukturze składniowej zdania: *Sam siebie oszukuje, kto oszukuje wszystkich.*[3] Zdanie to sparafrazować można np. do:

Ktokolwiek oszukuje wszystkich, ten sam siebie oszukuje.

Odpowiadającą mu formułą języka KRP jest:

$$\forall x\, (\forall y\, xPy \rightarrow xPx)$$

Dociekliwe Czytelniczki zechcą przekonać się samodzielnie, że ta formuła także jest tautologią KRP; podobnie, tautologią KRP jest formuła:

$$\exists x\, (\forall y\, xPy \rightarrow xPx).$$

[3] Zauważ różnicę anaforyczną między tym zdaniem, a zdaniem rozpatrywanym na początku tego przykładu!

Najbardziej dociekliwym Czytelniczkom proponujemy natomiast zastanowienie się, jakie znaczenie ma fakt, że formuły:

$$\exists x \forall y\ xPy \rightarrow \exists x\ xPx$$

$$\forall x\ (\forall y\ xPy \rightarrow xPx)$$

$$\exists x\ (\forall y\ xPy \rightarrow xPx)$$

są wszystkie tautologiami KRP, dla problematyki szukania „przekładów” zdań języka naturalnego na formuły języka KRP.

Przykład III.2.2.: Krzepko i przaśnie

Niech $A(x)$ będzie dowolną formułą języka KRP o zmiennej wolnej x. Do ważnych, bardzo często wykorzystywanych praw KRP należą *prawa De Morgana*:

$$\neg \exists x\ A(x) \equiv \forall x\ \neg A(x)$$

$$\neg \forall x\ A(x) \equiv \exists x\ \neg A(x)$$

$$\exists x\ A(x) \equiv \neg \forall x\ \neg A(x)$$

$$\forall x\ A(x) \equiv \neg \exists x\ \neg A(x)$$

Pokażemy, że pierwsza z tych formuł jest tautologią KRP. Pokazanie, że tautologiami są również pozostałe trzy formuły niech stanie się prostym, kształcącym nawyki logiczne treningiem dla Czytelniczek.

Aby wykazać, że

$$\neg \exists x\ A(x) \equiv \forall x\ \neg A(x)$$

jest tautologią KRP należy wykluczyć możliwość, by formuła ta była fałszywa w jakiejś interpretacji. Trzeba zatem wykluczyć możliwość, aby jej zaprzeczenie, tj. formuła

$$\neg(\neg \exists x\ A(x) \equiv \forall x\ \neg A(x))$$

była w jakiejkolwiek interpretacji prawdziwa. A to sprowadza się do pokazania, że drzewo semantyczne, w którego korzeniu umieścimy formułę

$$\neg(\neg \exists x\ A(x) \equiv \forall x\ \neg A(x))$$

ma wszystkie gałęzie zamknięte. Przejdźmy od krzepkich słów do przaśnych czynów:

$$\neg(\neg \exists x\ A(x) \equiv \forall x\ \neg A(x))\ ^{1.\neg\equiv}$$

$$\begin{array}{ll}
(1_{lg})\ \ \neg \exists x\ A(x)\ ^{3.\star a} & (1_{pg})\ \ \forall x\ \neg A(x)\ ^{6.\star a} \\
\mid & \mid \\
(1_{ld})\ \ \neg \forall x\ \neg A(x)\ ^{2.\checkmark a} & (1_{pd})\ \ \neg\neg \exists x\ A(x)\ ^{4.\neg\neg} \\
\mid & \mid \\
(2)\ \ \neg\neg A(a/x) & (4)\ \ \exists x\ A(x)\ ^{5.\checkmark a} \\
\mid & \mid \\
(3)\ \ \neg A(a/x) & (5)\ \ A(a/x) \\
\mid & \mid \\
\times_{2,3} & (6)\ \ \neg A(a/x) \\
 & \mid \\
 & \times_{5,6}
\end{array}$$

Przypominamy, że $A(a/x)$ oznacza formułę otrzymaną z formuły $A(x)$ przez wstawienie stałej indywiduowej a w miejsce wszystkich wolnych wystąpień zmiennej x.

Wszystkie gałęzie powyższego drzewa są zamknięte. Zatem formuła umieszczona w jego korzeniu nie jest prawdziwa w żadnej interpretacji. Oznacza to, że formuła

$$\neg \exists x\ A(x) \equiv \forall x\ \neg A(x)$$

jest prawdziwa we wszystkich interpretacjach, czyli jest tautologią KRP. Zauważmy, że lewa gałąź drzewa została zamknięta jeszcze przed zastosowaniem wszelkich możliwych reguł (konkretnie: nie było potrzeby stosowania reguły $R(\neg\neg)$ do formuły o numerze (2), aby zamknąć gałąź).

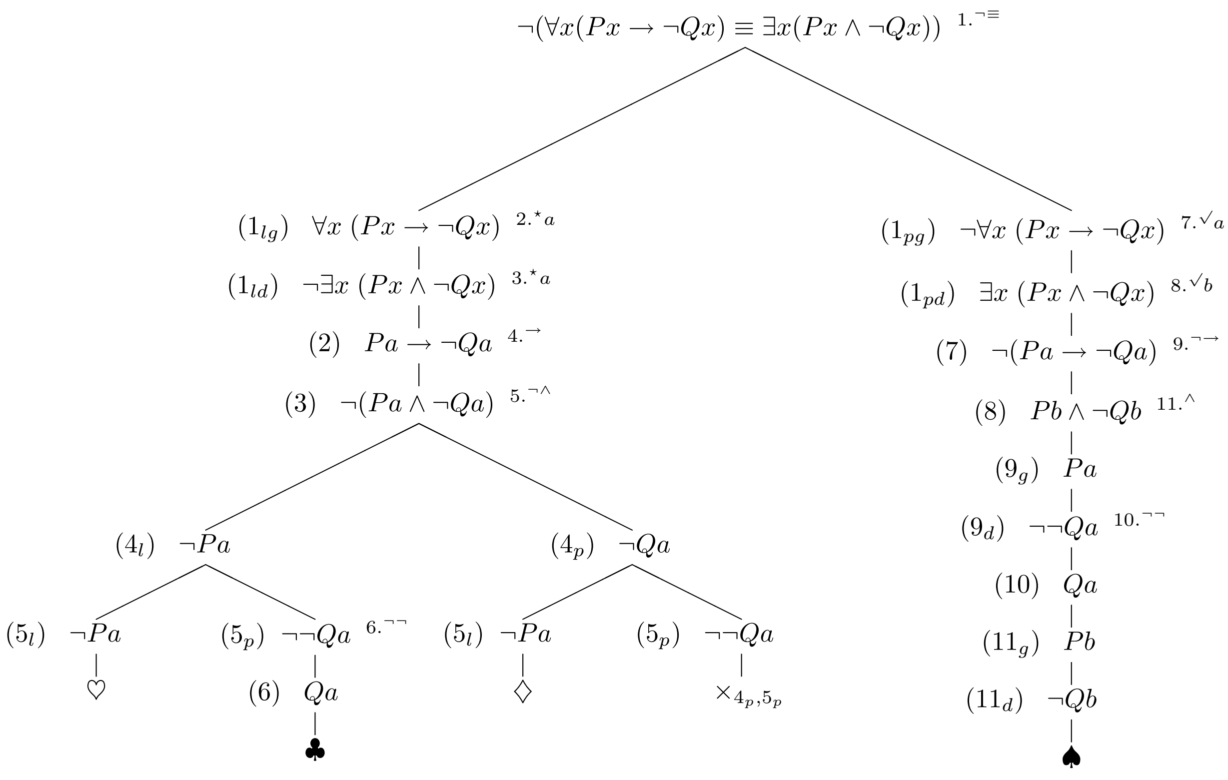
Z ustaleń tego przykładu korzystamy bardzo często w różnych miejscach niniejszego skryptu. W rozdziale VI umieszczamy, w formie zadań, całą grupę innych tego rodzaju przykładów.

Przykład III.2.3.: Bogactwo duchowe a zbawienie wieczne

Rozpatrzmy formułę, dla której „na pierwszy rzut oka" widać, że nie jest ona tautologią KRP:

$$\forall x(Px \to \neg Qx) \equiv \exists x(Px \wedge \neg Qx)$$

Oczywiście, logika nie polega na „rzucaniu okiem"; pokażemy przekonująco i dobitnie, że formuła powyższa tautologią nie jest. Upublicznimy mianowicie fakt, że drzewo semantyczne, w którego korzeniu umieścimy zaprzeczenie powyższej formuły ma gałęzie otwarte, co oznacza, że jest ono (owo zaprzeczenie) prawdziwe w co najmniej jednej interpretacji. A skoro zaprzeczenie jakiejś formuły jest prawdziwe w jakiejś interpretacji, to sama ta formuła w tejże interpretacji jest fałszywa, a zatem nie jest tautologią KRP. Oto obiecane drzewo:



Rozpoczynając budowę lewej części drzewa nie mieliśmy do dyspozycji żadnej formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej (ani negacji formuły generalnie skwantyfikowanej). W formule z korzenia drzewa nie występuje też żadna stała indywiduowa. Jak pamiętamy, możemy w takim przypadku rozwinąć dowolną obecną na rozważanej gałęzi formułę generalnie skwantyfikowaną (lub negację formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej) ze względu na dowolną stałą indywiduową — zobacz uwagi dotyczące stosowania reguł ($R(\forall)$, $R(\exists)$, $R(\neg\forall)$ i $R(\neg\exists)$ w podrozdziale III.1.; przypominamy, że zakłada się, iż w języku KRP mamy do dyspozycji stałe indywiduowe. Z tej właśnie możliwości skorzystaliśmy w kroku $^{2.\star a}$.

Otrzymane drzewo ma jedną gałąź zamkniętą i trzy gałęzie otwarte. Do żadnej z formuł, na żadnej z otwartych gałęzi tego drzewa, nie można już zastosować żadnej z reguł.[4] Ponieważ drzewo ma gałęzie

[4]Oczywiście, można dowolnie wiele razy wykonywać krok postaci $^{n.\star a_n}$, gdzie a_n jest dowolną stałą indywiduową z języka KRP, na gałęziach otwartych zawierających formułę o numerze (1_{lg}), ale nie doprowadzi to do zamknięcia żadnej z tych gałęzi. Problem ten wyjaśniamy w rozdziale IV.

otwarte, a więc formuła w jego korzeniu jest prawdziwa w jakichś interpretacjach. Stąd, rozważana na początku równoważność (której negacja jest w korzeniu drzewa) jest w tychże interpretacjach fałszywa. Nie jest ona zatem tautologią KRP.

Poniższe tabelki podają interpretacje wyznaczone przez gałęzie otwarte powyższego drzewa:

♡	P	Q
a	−	?

♣	P	Q
a	−	+

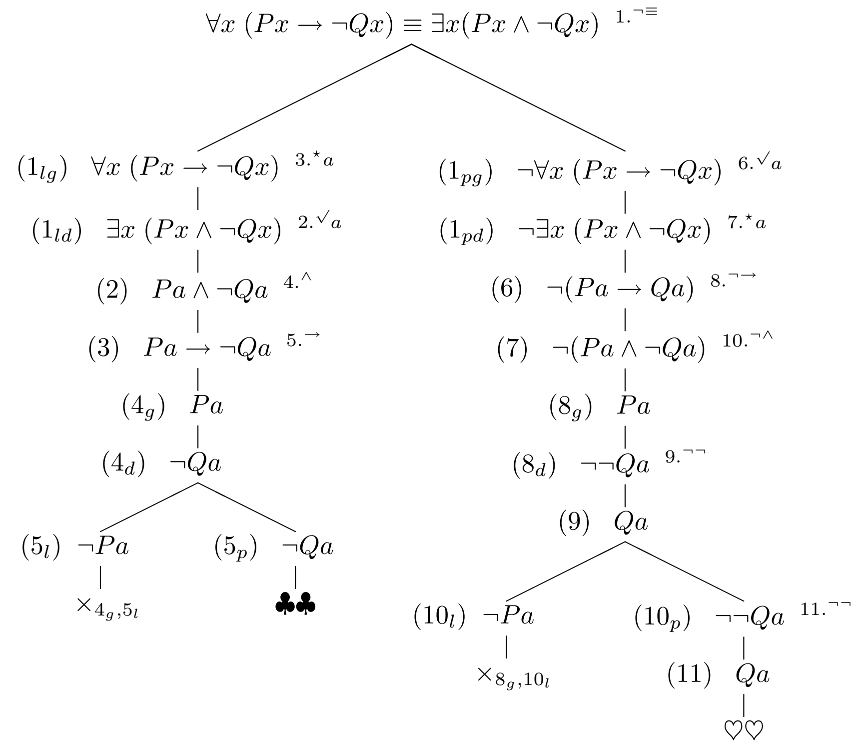
♢	P	Q
a	−	−

♠	P	Q
a	+	+
b	+	−

Odczytujemy informację z tych tabelek w sposób następujący. Wiersze (oprócz pierwszego) odpowiadają obiektom interpretacji. Kolumny (oprócz pierwszej) odpowiadają denotacjom rozważanych predykatów. Znak „+" na przecięciu wiersza odpowiadającego obiektowi oraz kolumny odpowiadającej denotacji predykatu jednoargumentowego (tj. własności) oznacza, że obiekt ten należy do tej denotacji (ma daną własność); znak „−", że nie należy. Znak „?" wskazuje, że dana gałąź otwarta nie rozstrzyga, czy dany obiekt ma rozważaną własność — w miejsce „?" może wystąpić zarówno „+", jak i „−" (a zatem tabelka ze znakiem „?" rozumiana jest jako skrótowy zapis dla dwóch tabelek: jednej ze znakiem „+" zamiast „?", i drugiej, ze znakiem „−" zamiast „?". Nieco bardziej skomplikowane tabelki tego typu pojawią się w dalszych przykładach.

Zauważmy, że interpretacje wyznaczone przez tego typu tabelki związane są z uniwersami Herbranda, o których wspomniano we fragmencie początkowym niniejszych notatek. Odniesienia przedmiotowe (interpretacje) języka KRP możemy budować z samych wyrażeń tego języka.

Badana równoważność ***nie jest*** tautologią. Pokażemy, że ***nie jest*** ona także kontrtautologią, tj. iż istnieją interpretacje, w których jest ona prawdziwa. Interpretacje takie wyznaczone są przez gałęzie otwarte drzewa, w którego korzeniu umieścimy rozważaną równoważność:



Do żadnej z formuł, na żadnej z gałęzi otwartych tego drzewa, nie można już zastosować żadnej z reguł. Drzewo ma dwie gałęzie otwarte, zatem w interpretacjach wyznaczonych przez te gałęzie formuła z korzenia drzewa jest prawdziwa; nie jest ona zatem kontrtautologią.

Z otwartych gałęzi drzewa wyznaczyć można dwie interpretacje, w których formuła z korzenia jest prawdziwa:

♣♣	P	Q
a	+	−

♡♡	P	Q
a	+	+

Czytelniczki zechcą zauważyć,[5] że z budowy powyższych dwóch drzew widoczne jest także to, iż:

- implikacja $\forall x\,(Px \to \neg Qx) \to \exists x\,(Px \wedge \neg Qx)$ nie jest tautologią;
- implikacja $\exists x\,(Px \wedge \neg Qx) \to \forall x\,(Px \to \neg Qx)$ nie jest tautologią;
- implikacja $\forall x\,(Px \to \neg Qx) \to \exists x\,(Px \wedge \neg Qx)$ nie jest kontrtautologią;
- implikacja $\exists x\,(Px \wedge \neg Qx) \to \forall x\,(Px \to \neg Qx)$ nie jest kontrtautologią.

Na koniec, coś dla Humanistek, a więc próby uroczystego odczytania „tłumaczeń” rozważanej formuły w języku polskim.

Nadajmy predykatom P oraz Q np. taką interpretację:

Px czytamy x *jest ubogi duchem*;

Qx czytamy x *będzie zbawiony*.

Wtedy rozpatrywana w tym przykładzie równoważność czytana może być, powiedzmy, tak oto:

[5] Dla tych, które ***widzą Ciemność***: wskazówka w następnym przykładzie.

Ktoś ubogi duchem nie będzie zbawiony dokładnie wtedy, gdy każdy, kto jest ubogi duchem nie będzie zbawiony.

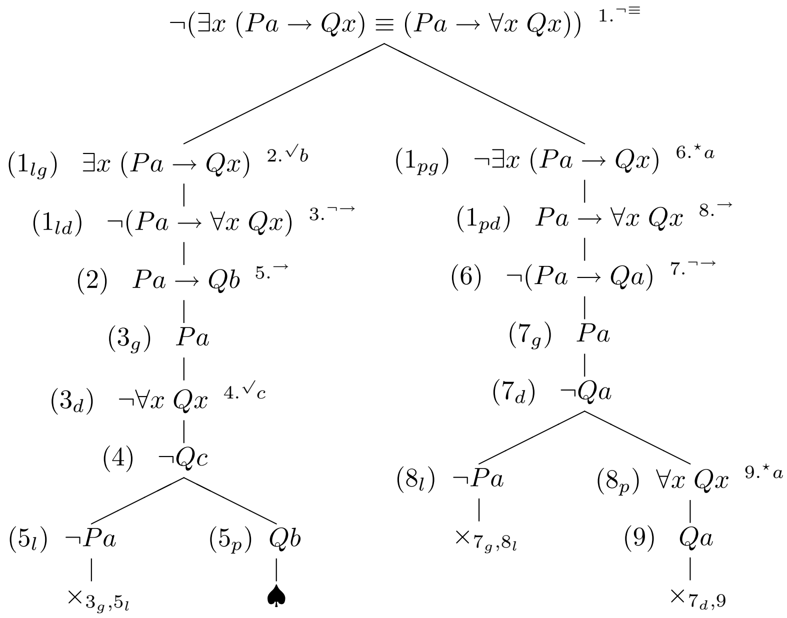
Sądzimy, że jaskrawa niedorzeczność tego odczytania umacnia duchowo Humanistki, łaknące ubogacenia bezdusznych (?) formułek.

Przykład III.2.4.: Kieszenie pełne szczęścia

Pokażemy, że nie jest tautologią KRP następująca formuła, w której występuje stała indywiduowa a:

$$\exists x\,(Pa \to Qx) \equiv (Pa \to \forall x\,Qx)$$

W tym celu zbudujemy drzewo semantyczne dla negacji tej formuły. Okaże się, że ma ono gałęzie otwarte. Skoro tak, to owa zanegowana formuła jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji, a to oznacza, że sama formuła powyższa nie jest tautologią (bo gdy jej zaprzeczenie jest prawdziwe w jakiejś interpretacji, to ona sama jest w tejże interpretacji fałszywa; nie jest więc prawdziwa **we wszystkich** interpretacjach, *ergo* nie jest tautologią KRP). Oto drzewo:



Drzewo ma jedną gałąź otwartą i do żadnej z formuł na tej gałęzi nie można już zastosować żadnej z reguł. Negacja równoważności umieszczona w korzeniu drzewa jest prawdziwa w interpretacji wyznaczonej przez tę gałąź. W konsekwencji, badana równoważność nie jest tautologią KRP (skoro jej zaprzeczenie jest prawdziwe w jakiejś interpretacji).

W powyższym drzewie stała indywiduowa a występowała w formule z korzenia drzewa. W konsekwencji, reguły $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$ względem tej stałej obowiązywały na ***wszystkich*** gałęziach drzewa. W tym konkretnym przypadku, reguły te były jednak stosowane tylko w formułach o numerach (1_{pg}) oraz (8_p).

Zauważmy ponadto, że prawa część drzewa (tj. poddrzewo o korzeniu (1_{pg})) ma wszystkie gałęzie zamknięte. Oznacza to że implikacja

$$(Pa \to \forall x\,Qx) \to \exists x\,(Pa \to Qx)$$

jest tautologią KRP. To implikacja do niej odwrotna, a mianowicie

$$\exists x\,(Pa \to Qx) \to (Pa \to \forall x\,Qx)$$

nie jest tautologią KRP, na co wskazuje gałąź otwarta oznaczona liściem ♠. W konsekwencji, badana równoważność, będąca — jak wiemy z KRZ — równoważna semantycznie implikacji prostej i odwrotnej, nie jest tautologią KRP.

Interpretacja wyznaczona przez gałąź otwartą drzewa przedstawiona jest w poniższej tabelce:

♠	P	Q
a	+	?
b	?	+
c	?	−

Pozwólmy sobie na podanie banalnego przykładu interpretacji stałych indywiduowych a, b oraz c i predykatów P oraz Q; niech np.:

Px będzie interpretowane jako *x jest obrzydliwie bogaty*;

Qx będzie interpretowane jako *x jest głęboko szczęśliwy*;

a, b i c denotują, odpowiednio, *Pana Prezesa*, *Pana Prezydenta* oraz *Pana Premiera*.

Zgodnie z ustaleniami zawartymi w tabelce, Pan Prezes jest obrzydliwie bogaty, Pan Prezydent jest głęboko szczęśliwy, natomiast Pan Premier głęboko szczęśliwy nie jest. Można spróbować odczytać przy tej interpretacji obie wspomniane implikacje:[6]

$$\exists x\,(Pa \rightarrow Qx) \rightarrow (Pa \rightarrow \forall x\,Qx)$$

Jeśli co najmniej jedna obywatelka jest głęboko szczęśliwa, o ile Pan Prezes jest obrzydliwie bogaty, to jeśli Pan Prezes jest obrzydliwie bogaty, to wszyscy są głęboko szczęśliwi.

$$(Pa \rightarrow \forall x\,Qx) \rightarrow \exists x\,(Pa \rightarrow Qx)$$

Jeśli obrzydliwe bogactwo Pana Prezesa implikuje, że wszyscy są głęboko szczęśliwi, to co najmniej jedna obywatelka jest głęboko szczęśliwa, o ile Pan Prezes jest obrzydliwie bogaty.

Nie mają te odczytania żadnego głębszego sensu, ale zawsze przyjemnie posłuchać, że — gdzieś tam daleko, przy spełnieniu się różnych bajecznych okoliczności — wszyscy są głęboko szczęśliwi. Proszę zauważyć, że w odczytaniach tych nie mówimy jawnie o szczęściu Pana Prezesa, a o stanie majątkowym Pana Prezydenta i Pana Premiera to już całkiem milczymy, jak zaklęci.

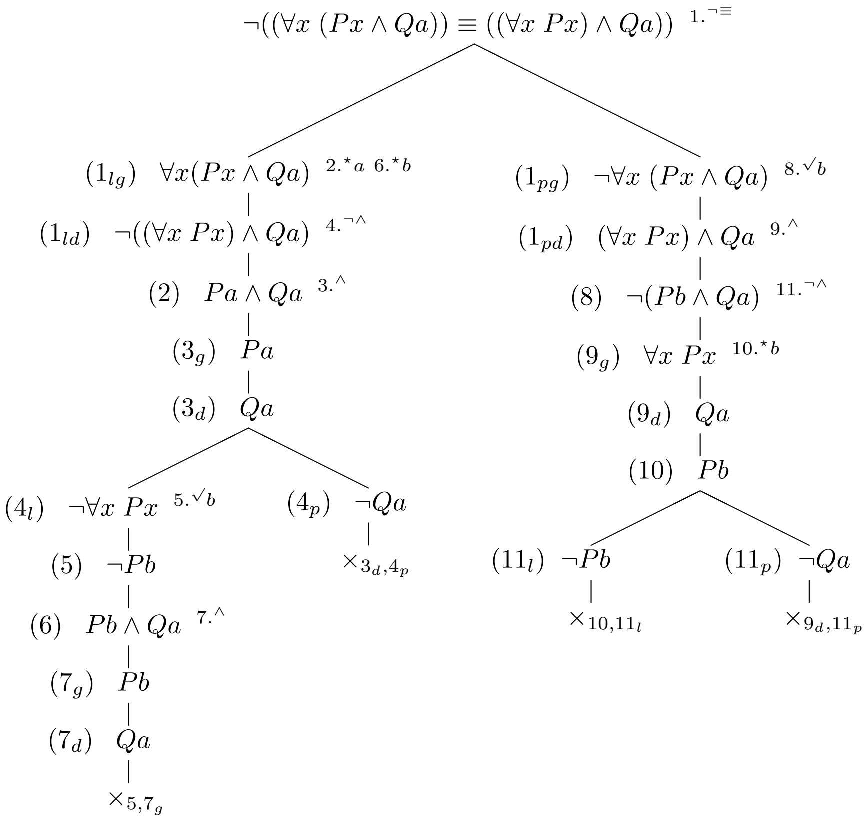
Przykład III.2.5.: Nietakty gramatyczne

Pokażemy, że równoważność:

$$(\forall x(Px \wedge Qa)) \equiv ((\forall x\,Px) \wedge Qa)$$

jest tautologią KRP. W formule tej występuje stała indywiduowa a. Budujemy drzewo semantyczne dla negacji tej równoważności:

[6]Mam zwyczaj, aby słowa *obywatel* oraz *obywatelka* traktować jako odpowiadające predykatom uniwersalnym.



Wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte. Nie istnieje więc interpretacja, w której zanegowana równoważność z korzenia tego drzewa byłaby prawdziwa. Stąd, równoważność

$$(\forall x\ (Px \wedge Qa)) \equiv ((\forall x\ Px) \wedge Qa)$$

jest prawdziwa w każdej interpretacji, a więc jest tautologią KRP.

Z praw KRZ i z powyższego ustalenia widzimy natychmiast, że także obie implikacje:

$$(\forall x\ (Px \wedge Qa)) \rightarrow ((\forall x\ Px) \wedge Qa)$$

$$((\forall x\ Px) \wedge Qa) \rightarrow (\forall x\ (Px \wedge Qa))$$

są tautologiami.

Zwróćmy jeszcze uwagę, że ponieważ w formule z korzenia drzewa wystąpiła stała indywiduowa a, więc należało oczywiście zastosować względem niej regułę $R(\forall)$, na ***wszystkich*** gałęziach drzewa. Jednak stosowanie $R(\forall)$ względem a w formule o numerze (9_g) byłoby zbędne, bo i bez wykonania tego kroku otrzymalibyśmy wszystkie gałęzie zamknięte. W krokach $5.^{\checkmark b}$ oraz $8.^{\checkmark b}$ wprowadzaliśmy ***dwie nowe*** stałe indywiduowe; to, że można się było posłużyć tym samym symbolem b uzasadnione jest tym, że stałe te wprowadzane były na ***różnych*** gałęziach.

Ze względu na budowę syntaktyczną rozpatrywanej formuły podawanie jakichś prób jej przekładu na język naturalny byłoby nietaktem zarówno wobec niej samej, jak i wobec Czytelniczek.

Nie. Jednak nie. Nadąsane usteczka i pokrzywdzone, świdrujące spojrzenia spod zmarszczonych brewek Humanistek.[7] To nie do wytrzymania, *it really hurts...* Zinterpretujmy więc jakkolwiek predykaty P i Q oraz stałą indywiduową a, niech np.:

[7] Tak to wygląda z mojego punktu widzenia, gdy miotam się przed tablicą. Nie obrażacie się, prawda? Zapewniam, że moje uwagi motywowane są empatią dydaktyczną; w żadnym wypadku nie jest moim zamiarem okazywanie lekceważenia mojemu ulubionemu audytorium, tj. Humanistkom. Proszę pamiętać, że nauczanie Humanistek logiki matematycznej to naprawdę trudna praca. Zamieszczone w tekście niniejszych notatek (w zamierzeniu) żartobliwe elukubracje proszę odbierać z humorem i wyrozumiałością dla autora. Nie ma on zresztą jakichkolwiek podstaw do okazywania komukolwiek najmniejszych choćby przejawów rzekomej wyższości intelektualnej. W tej Przygodzie Edukacyjnej, w której bierzemy udział, wszyscy jesteśmy Humanistkami.

Px będzie interpretowane jako *x jest ubożuchną rencistką, nigdy nie zapominającą o dołożeniu się do tacy w niedzielę*;

Qx będzie interpretowane jako *x jest w wielkich opałach finansowych*;

a denotuje *Watykan*.

Pozostawiamy odczytanie badanej równoważności przy tej interpretacji zainteresowanym Humanistkom. Sami tego nie zrobimy, ze względu na wstyd gramatyczny.[8]

Przykład III.2.6.: Kruszyna Mistyki[9]

Dzień bez odrobiny mistycyzmu to dla Humanistki dzień szary, nijaki, nie warty przeżycia. Zobligowani czujemy się więc — aby dydaktyka logiki odbierana była przez Humanistki jako *nie-bez-duszna* — do ubogacania jej, na dostępne nam sposoby. Prosimy np. przenieść się w (przepastnej u Humanistek) wyobraźni z pomieszczeń wykładowych w dawnej fabryce czołgów HCP Cegielski[10] do $\aleph_0$-gwiazdkowego Hotelu Hilberta i epatujemy dziewczęta próbą semantycznej analizy powiedzmy następującego zdania:

> *O ile za każdą liczbą naturalną następuje niemniejsza od niej liczba naturalna, to Jedyna Tajna Liczba Naturalna Kodująca Niepoznawalne Imię Dobrego Pana Naszego JHWH jest niemniejsza od wszystkich liczb naturalnych.*

Powinniśmy pominąć w tym miejscu szereg szczerych, spontanicznych wypowiedzi Humanistek w reakcji na wysłuchanie tego zdania (np.: wyrażanie sympatii dla liczb 36 oraz 69, a chłodu emocjonalnego dla liczb 96 oraz 666). Rozważmy natomiast formułę języka KRP odpowiadającą mu składniowo:

$$(*) \quad \forall x \exists y\, yRx \rightarrow \forall x\, aRx$$

(predykat R nazywa tu relację *niemniejszości*, a stała indywiduowa a jest skromnym symbolem dla *Jedynej Tajnej Liczby Naturalnej Kodującej Niepoznawalne Imię Dobrego Pana Naszego JHWH*; to, czy kodowanie podlega regułom znanym Cadykowi z Leżajska, Jego Świątobliwości Dalajlamie, słynnemu ze swojej dociekliwości Ignacemu Loyoli, czy jakiemukolwiek głodnemu sławy Prałatowi, nie ma tu oczywiście znaczenia).

Sprawdzimy najpierw, czy formuła $(*)$ jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji:

$$\forall x \exists y\, yRx \rightarrow \forall x\, aRx \quad {}^{1.\rightarrow}$$

$$\begin{array}{ll}
(1_l)\ \neg\forall x \exists y\, yRx \quad {}^{2.\checkmark b} & (1_p)\ \forall x\, aRx \quad {}^{5.\star a} \\
(2)\ \neg\exists y\, yRb \quad {}^{3.\star a\ 4.\star b} & (5)\ aRa \\
(3)\ \neg aRb & \spadesuit \\
(4)\ \neg bRb & \\
\clubsuit &
\end{array}$$

[8] To nie są jedynie głupie, złośliwe docinki. Język naturalny *naprawdę* istotnie różni się od języka KRP. „Przekłady” niektórych formuł języka KRP na język naturalny brzmią czasem banalnie, czasem dziwacznie, a nawet (pragmatycznie) nieakceptowalnie. Jak już wspominaliśmy wcześniej, „przekłady” w drugą stronę sprawiają jeszcze większe trudności. Nie załamujmy jednak członków: kłopoty te to przecież niewyczerpywalne źródło tematów na rozmaite rozprawy i badania semiotyczne, sponsorowane przez podatników.

[9] Ten przykład zaczerpnęliśmy z naszego tekstu *Agnostyczny jeż w lesie semantycznym* (współautorka: Izabela Bondecka-Krzykowska), złożonego do druku w Księdze Jubileuszowej dedykowanej Panu Profesorowi Witoldowi Marciszewskiemu. Formuła $(*)$ dyskutowana w tym przykładzie wzięta jest z artykułu Witolda Marciszewskiego: On going beyond the first-order logic in testing the validity of its formulas. A case study. *Mathesis Universalis*, nr **11** *On the Decidability of First Order Logic*, 2002, dostępnego w Internecie na stronie www.calculemus.org/MathUniversalis/NS/11/Beyond.pdf. Polecamy ten artykuł, jako zawierający interesujące uwagi na temat metody drzew semantycznych.

[10] UAM dzierżawi tam pomieszczenia, miejmy nadzieję, że bez strat dla potęgi militarnej Rzeczpospolitej Polskiej. Zresztą, oszukaliśmy: HCP produkowała silniczki do łódeczek.

Drzewo to ma dwie gałęzie otwarte. Badana formuła nie jest zatem kontrtautologią KRP. Poniższe tabelki podają interpretacje, w których ($*$) jest prawdziwa:

$R_\clubsuit$	a	b
a	?	–
b	?	–

$R_\spadesuit$	a
a	+

Spróbujmy z kolei zbudować drzewo semantyczne dla negacji formuły ($*$):

$$
\begin{array}{c}
\neg(\forall x\exists y\; yRx \rightarrow \forall x\; aRx)\ ^{1.\neg\rightarrow} \\
| \\
(1_g)\ \ \forall x\exists y\; yRx\ \ ^{3.^{\star}a\ 4.^{\star}b\ 7.^{\star}c\ 8.^{\star}d}\ldots \\
| \\
(1_d)\ \ \neg\forall x\; aRx\ \ ^{2.\surd b} \\
| \\
(2)\ \ \neg aRb \\
| \\
(3)\ \ \exists y\; yRa\ \ ^{5.\surd c} \\
| \\
(4)\ \ \exists y\; yRb\ \ ^{5.\surd d} \\
| \\
(5)\ \ cRa \\
| \\
(6)\ \ dRb \\
| \\
(7)\ \ \exists y\; yRc\ \ ^{9.\surd e} \\
| \\
(8)\ \ \exists y\; yRd\ \ ^{10.\surd f} \\
| \\
\vdots
\end{array}
$$

Budowy tego drzewa zakończyć nie można, co powinno być wyraźnie widoczne po prześledzeniu kilku pierwszych kroków w powyższej konstrukcji. Formuła ($*$) nie jest tautologią KRP. Metoda drzew semantycznych nie daje odpowiedzi w skończonej liczbie kroków. Możemy jednak, zauważając regularność w konstruowaniu coraz to większych fragmentów drzewa semantycznego dla negacji formuły ($*$), podać interpretację nieskończoną, w której negacja ($*$) jest prawdziwa. Nie upoważnia nas do tego sama metoda — kierujemy się zatem *intuicjami* (wychodzącymi poza logikę pierwszego rzędu).[11]

Przykład III.2.7.: Lawina Miłości

Jak się wydaje,[12] strukturze składniowej zdania *O ile choćby jeden osobnik jest zakochany sam w sobie, to jeśli każdy kogoś kocha, to ktoś jest kochany przez wszystkich* odpowiada następująca formuła języka KRP:

$$(\bigstar) \qquad \exists x\; xKx \rightarrow (\forall x\exists y\; xKy \rightarrow \exists y\forall x\; xKy)$$

Czy jest ona prawdziwa w jakiejś interpretacji? Budujemy drzewo semantyczne dla tej formuły:

[11] Więcej na ten temat — w rozdziale IV skryptu.

[12] Przyjmując, że pasywizacja w języku naturalnym odpowiada braniu konwersu relacji.

$$\exists x\; xKx \to (\forall x \exists y\; xKy \to \exists y \forall x\; xKy) \quad {}^{1.\to}$$

$$(1_l)\;\; \neg\exists x\; xKx \quad {}^{2.\star a}$$

$$(2)\;\; \neg aKa$$

$$\circ$$

$$(1_p)\;\; \forall x \exists y\; xKy \to \exists y \forall x\; xKy \quad {}^{3.\to}$$

$$(3_l)\;\; \neg\forall x \exists y\; xKy \quad {}^{4.\checkmark a}$$

$$(4)\;\; \neg\exists y\; aKy \quad {}^{5.\star a}$$

$$(5)\;\; \neg aKa$$

$$\circ$$

$$(3_p)\;\; \exists y \forall x\; xKy \quad {}^{6.\checkmark a}$$

$$(6)\;\; \forall x\; xKa \quad {}^{7.\star a}$$

$$(7)\;\; aKa$$

$$\circ$$

Do żadnej z formuł, na żadnej z gałęzi otwartych tego drzewa (akurat wszystkie gałęzie są otwarte), nie można już zastosować żadnej z reguł. Formuła ta jest zatem prawdziwa np. w świecie, w którym zażywa istnienia narcystyczny, zakochany w sobie samolub, a także w świecie, w którym toczy swój żywot brzydzący się sobą, nie potrafiący samego siebie pokochać niesamolub. Widoczne jest więc, że badana formuła ***nie jest*** kontrtautologią.

Czy jest prawdziwa w ***każdej*** interpretacji, tj. czy jest tautologią? Aby to sprawdzić, budujemy drzewo semantyczne dla jej negacji. Jeśli wszystkie gałęzie tego drzewa będą zamknięte, to wykluczona zostanie sytuacja, że owa negacja jest prawdziwa w jakiejś interpretacji. Automatycznie oznaczałoby to, że sama badana formuła jest w każdej interpretacji prawdziwa, czyli jest tautologią. Oto stosowne drzewo:

$$\neg(\exists x\; xKx \to (\forall x \exists y\; xKy \to \exists y \forall x\; xKy)) \quad {}^{1.\neg\to}$$

$$(1_g)\;\; \exists x\; xKx \quad {}^{3.\checkmark a_1}$$

$$(1_d)\;\; \neg(\forall x \exists y\; xKy \to \exists y \forall x\; xKy) \quad {}^{2.\neg\to}$$

$$(2_g)\;\; \forall x \exists y\; xKy \quad {}^{4.\star a_1\; 8.\star a_2\; 10.\star a_3}$$

$$(2_d)\;\; \neg\exists y \forall x\; xKy \quad {}^{5.\star a_1\; 9.\star a_2\; 11.\star a_3}$$

$$(3)\;\; a_1 K a_1$$

$$(4)\;\; \exists y\; a_1 K y \quad {}^{6.\checkmark a_2}$$

$$(5)\;\; \neg\forall x\; xKa_1 \quad {}^{7.\checkmark a_3}$$

$$(6)\;\; a_1 K a_2$$

$$(7)\;\; \neg a_3 K a_1$$

$$(8)\;\; \exists y\; a_2 K y \quad {}^{12.\checkmark a_4}$$

$$(9)\;\; \neg\forall x\; xKa_2 \quad {}^{13.\checkmark a_5}$$

$$(10)\;\; \exists y\; a_3 K y \quad {}^{14.\checkmark a_6}$$

$$(11)\;\; \neg\forall x\; xKa_3 \quad {}^{15.\checkmark a_7}$$

$$\vdots$$

Drzewo jest nieskończone, tzn. nie można zakończyć budowy tego drzewa w skończonej liczbie kroków. Zatem formuła (★) nie jest tautologią KRP. Zauważmy, że:

- po wprowadzeniu stałej indywiduowej a_1 należało względem niej rozwinąć formuły o numerach (2_g) oraz (2_d);
- po wykonaniu tych kroków w drzewie pojawiły się dwie nowe formuły, nakazujące wprowadzenie dwóch nowych stałych indywiduowych a_2 oraz a_3;
- rozwinięcie formuł o numerach (2_g) oraz (2_d) względem stałych a_2 oraz a_3 wprowadziło cztery nowe formuły, nakazujące wprowadzenie czterech nowych stałych indywiduowych: a_4, a_5, a_6 i a_7;
- jeśli, tak jak każą reguły, rozwiniemy teraz formuły o numerach (2_g) i (2_d) ze względu na stałe a_4, a_5, a_6 i a_7, to otrzymamy osiem nowych formuł, nakazujących wprowadzenie kolejnych nowych ośmiu stałych indywiduowych;
- itd.

Zadając niewinne pytanie, czy negacja formuły (★) jest prawdziwa, uruchomiliśmy zatem olbrzymią lawinę związków uczuciowych... Proszę zauważyć, że na tej nieskończonej gałęzi występuje nieskończenie wiele formuł atomowych i negacji formuł atomowych — w odczytaniu negacji formuły (★) proponowanym na początku tego przykładu odpowiadają one sytuacjom polegającym na tym, że dana osoba kocha (lub nie) drugą osobę. Usilnie namawiamy Czytelniczki do wykonania następujących dwóch ćwiczeń, jednego banalnego, a drugiego nieco trudniejszego:

- wykonaj następne kroki w konstrukcji tego drzewa, powiedzmy do momentu, w którym na gałęzi będzie co najmniej dwadzieścia stałych indywiduowych;
- spróbuj znaleźć ***wzór na miłość*** uprawianą na tej gałęzi, tj. spróbuj ustalić, dla jakich indeksów i oraz j na gałęzi znajduje się formuła atomowa a_iKa_j, a dla jakich formuła $\neg a_iKa_j$.

Zauważmy jeszcze, na koniec tego przykładu, że podobną „lawinę” stałych indywiduowych otrzymamy próbując zbudować drzewo semantyczne dla ***negacji*** następującej formuły:

$$(\bigstar\bigstar) \qquad \forall x \exists y\, xKy \rightarrow \exists y \forall x\, xKy.$$

Formuła (★★) nie jest więc tautologią KRP. Choć drzewo semantyczne jej negacji nie jest skończone, to potrafimy podać interpretacje, w których (★★) jest fałszywa, tj. takie interpretacje, w których poprzednik implikacji (★★) jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. W podręcznikach logiki często podaje się następującą interpretację o tych własnościach:

- uniwersum interpretacji stanowi zbiór wszystkich liczb naturalnych;
- predykat K denotuje relację mniejszości.

W tej interpretacji wyrażenie aKb czytamy więc: liczba a jest mniejsza od liczby b (lub, równoważnie, liczba b jest większa od liczby a). Wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba od niej większa (a więc poprzednik implikacji (★★) jest w tej interpretacji prawdziwy) oraz wiadomo, że nie istnieje liczba naturalna, większa niż wszystkie liczby naturalne (czyli następnik implikacji (★★) jest w tej interpretacji fałszywy).[13] Przy interpretacji K jako relacji $<$ następnik implikacji (★★) jest zresztą fałszywy także dlatego, że ***żadna*** liczba naturalna nie jest mniejsza od ***samej siebie***. Można też interpretować predykat K jako relację $\leqslant$ w zbiorze wszystkich liczb naturalnych. Wtedy również poprzednik implikacji (★★) jest w tej interpretacji prawdziwy, a jej następnik fałszywy.

Nietrudno także podać ***skończone*** interpretacje, w których poprzednik implikacji (★★) jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Wyobraźmy sobie np., że Ludzkość składa się tylko z dwojga osobników, powiedzmy *Adama* i *Chawy*, Adam kocha Chawę, siebie samego nie kocha (bo np. ma wstręt do autoerotyzmu), a Chawa

[13] To całkiem oczywiste, prawda? Graliśmy przecież na wykładzie w tę grę: *Podaj liczbę*. I ja zawsze wygrywałem, podając liczbę większą od podanej przez Ciebie (to było sprawiedliwe: gdybym ja zaczynał, to Ty byś wygrywała). Tak naprawdę, to jednak wcale nie jest to takie oczywiste i wymaga przyjęcia stosownych założeń dotyczących nieskończoności. O tym też wspominaliśmy na wykładzie.

kocha tylko siebie, taka już jest. W takim świecie Adama nie kocha nikt, żadna Istota. Pozostawmy ten świat swemu losowi.

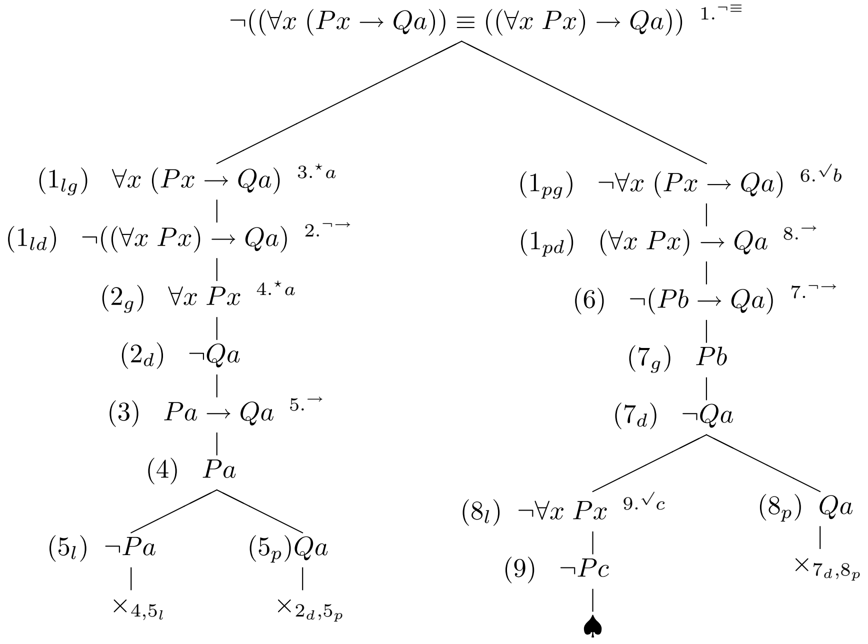
Także np. w świecie, w którym żyją jedynie Adam i Chawa, kochający się nawzajem (i nikogo poza tym, a więc bez narcyzmu) poprzednik implikacji (★★) jest prawdziwy, a następnik fałszywy.

Przykład III.2.8.: Z życia parafii

Zajmiemy się teraz ustaleniem, czy do praw logiki zaliczyć można następującą równoważność:

$$\forall x\,(Px \rightarrow Qa) \equiv ((\forall x\, Px) \rightarrow Qa)$$

Pokażemy, że nie jest ona tautologią: drzewo semantyczne zbudowane dla negacji tej formuły będzie miało gałąź otwartą, a to oznacza, że negacja badanej równoważności może być prawdziwa w jakiejś interpretacji; w tejże interpretacji sama badana równoważność jest więc fałszywa, a zatem nie jest tautologią. Zwróćmy uwagę, że w badanej formule występuje stała indywiduowa a. Oto stosowne drzewo:



Zauważmy, że w lewej części drzewa wykonanie kroku $2.^{\neg\rightarrow}$ ***przed*** krokiem $3.^{\star a}$ było niezgodne z podawanymi wcześniej zaleceniami, dotyczącymi kolejności stosowania reguł. Nie miało to jednak znaczenia dla wyników pracy na rozważanych gałęziach. W prawej części drzewa nie było żadnej formuły generalnie skwantyfikowanej (ani negacji formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej), które można byłoby rozwinąć ze względu na stałą indywiduową a występującą w formule w korzeniu drzewa.

Gałąź oznaczona liściem ♠ jest otwarta, i taka już pozostanie, na wieki wieków. Do formuł na niej umieszczonych nie można zastosować już żadnych reguł. Gałąź ta wyznacza interpretację, w której znajdująca się w korzeniu drzewa zaprzeczona równoważność

$$\neg((\forall x\,(Px \rightarrow Qa)) \equiv ((\forall x\, Px) \rightarrow Qa))$$

jest prawdziwa. W konsekwencji, formuła

$$\forall x\,(Px \rightarrow Qa) \equiv ((\forall x\, Px) \rightarrow Qa)$$

jest w tejże interpretacji fałszywa, a więc — jako fałszywa w co najmniej jednej interpretacji — nie jest tautologią KRP.

Interpretacja wyznaczona przez gałąź otwartą powyższego drzewa ma w uniwersum denotacje stałych indywiduowych a, b oraz c. Przy tym, denotacja stałej b jest elementem denotacji predykatu P (w tejże interpretacji), zaś denotacja stałej a nie jest elementem denotacji predykatu Q, a denotacja stałej c nie jest elementem denotacji predykatu P (tamże). Sytuację tę ilustruje tabelka:

♠	P	Q
a	?	−
b	+	?
c	−	?

(to, czy denotacja a należy do denotacji P oraz czy denotacje b i c należą do denotacji Q nie ma znaczenia, co oddaje znak „?” umieszczony w stosownych miejscach w tabeli). Nietrudno obliczyć, że tabelka powyższa jest skrótowym zapisem ośmiu różnych interpretacji — na tyle bowiem sposobów zastąpić możemy w niej znak zapytania znakami plusa i minusa.

Spójrzmy raz jeszcze na powyższe drzewo. Jego lewa część (poddrzewo) wychodząca z korzenia jest jednocześnie drzewem semantycznym dla formuły:

$$\neg(\forall x\ (Px \rightarrow Qa) \rightarrow ((\forall x\ Px) \rightarrow Qa)$$

czyli dla zaprzeczonej implikacji, w której poprzedniku jest pierwszy człon rozważanej na początku równoważności, a w następniku drugi z tych członów. Fakt, że drzewo to ma wszystkie gałęzie zamknięte ukazuje, iż implikacja:

$$\forall x\ (Px \rightarrow Qa) \rightarrow ((\forall x\ Px) \rightarrow Qa)$$

jest tautologią KRP. Natomiast fakt, że prawa wychodząca z korzenia część (poddrzewo) drzewa dla zanegowanej równoważności zawiera gałąź otwartą świadczy o tym, że implikacja odwrotna do powyższej, tj.:

$$((\forall x\ Px) \rightarrow Qa) \rightarrow \forall x\ (Px \rightarrow Qa)$$

tautologią nie jest (bo jej zaprzeczenie jest prawdziwe w co najmniej jednej interpretacji). Powinno być oczywiste, że gdy budujemy drzewa semantyczne dla równoważności lub zaprzeczonych równoważności, to jednocześnie uzyskujemy informacje o własnościach implikacji prostej i odwrotnej, których koniunkcja jest semantycznie równoważna rozpatrywanej równoważności.

Odruchowo skonstruujmy jeszcze jakąś interpretację predykatów P i Q oraz stałej indywiduowej a, aby nie zawieść Humanistek. Niech np.:

Px będzie interpretowane jako x *żarliwie się modli*;

Qx będzie interpretowane jako x *miewa się nienajgorzej*;

a denotuje *Naszego Proboszcza*.

Aby bezpodstawnie nie uogólniać, niech uniwersum interpretacji odnosi się do *Naszej Parafii*; oznacza to, że słowo *parafianin* odpowiada predykatowi uniwersalnemu.

Wtedy formułę

$$\forall x\ (Px \rightarrow Qa) \rightarrow ((\forall x\ Px) \rightarrow Qa)$$

odczytujemy np. tak:

> **Jeśli**, *gdy weźmiemy pod uwagę dowolnego parafianina, Nasz Proboszcz ma się nienajgorzej, o ile tenże parafianin żarliwie się modli,* **to** *gdy wszyscy modlą się żarliwie, to Nasz Proboszcz miewa się nienajgorzej.*

Natomiast formuła

$$((\forall x\ Px) \rightarrow Qa) \rightarrow \forall x\ (Px \rightarrow Qa)$$

odczytana może być, powiedzmy, tak:

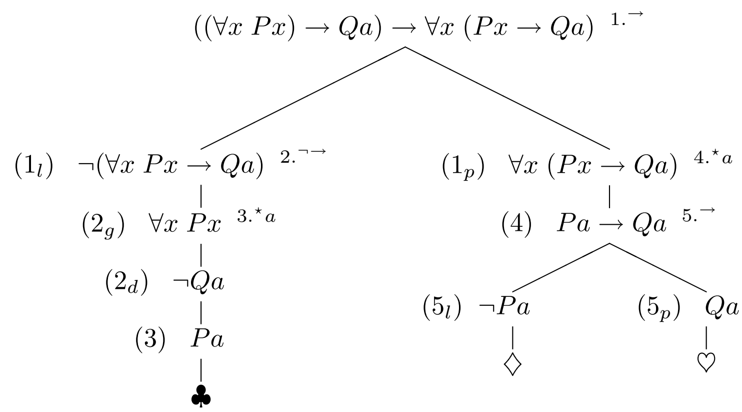
> **Jeżeli** *Nasz Proboszcz miewa się nienajgorzej, o ile wszyscy się modlą,* **to** *dla dowolnego parafianina, gdy tenże modli się żarliwie, to Nasz Proboszcz nienajgorzej się miewa.*

Nie trzeba być wytrawną Humanistką, aby poczuć się niedobrze ujrzawszy te teksty. (Kto, do licha, w ten sposób mówi?!) Oba te odczytania uważamy za nieco chrome stylistycznie, co spowodowane jest między innymi tym, iż w języku naturalnym konstrukcje syntaktyczne mające być „przekładami” konstrukcji logicznych źle współżyją gramatycznie. Więcej na ten temat w rozdziale VI, zawierającym zadania.

Na koniec tego przykładu zauważmy jeszcze, że pokazaliśmy dotąd, że formuła

$$((\forall x\ Px) \rightarrow Qa) \rightarrow \forall x\ (Px \rightarrow Qa)$$

jest fałszywa ***w co najmniej jednej*** interpretacji. Nie przesądza to, czy formuła ta jest fałszywa ***we wszystkich*** interpretacjach, tj. czy jest kontrtautologią. Pokażmy, że formuła ta kontrtautologią ***nie jest***. Aby tego dokonać, wystarczy znaleźć co najmniej jedną interpretację, w której ta formuła jest prawdziwa, a więc pokazać, że drzewo semantyczne tej formuły ma co najmniej jedną gałąź otwartą. Budujemy to drzewo:



Drzewo to ma gałęzie otwarte (akurat wszystkie jego gałęzie są otwarte) i do żadnej z formuł, na żadnej z tych gałęzi, nie można już zastosować żadnej z reguł. Tak więc, rozważana formuła jest prawdziwa w jakichś interpretacjach; zatem nie jest ona kontrtautologią KRP.

Może nie wypada, ale mimo to chyba warto, uczynić następującą uwagę. Powyższe drzewo semantyczne ma ***wszystkie*** gałęzie otwarte. Przestrzegamy przed błędnym (sporadycznie przez studentki popełnianym) stąd wnioskiem, że formuła z korzenia takiego drzewa jest w każdej interpretacji prawdziwa. Pokazaliśmy już wyżej, że negacja tej formuły jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji (zobacz 8 interpretacji podanych w tabelce ♠), a więc w interpretacjach z tabelki ♠ badana teraz formuła jest fałszywa. Proponujemy Humanistkom refleksję nad następującym problemem. Które z poniżej wyliczonych sytuacji są możliwe dla dowolnej, ustalonej formuły A (i co wtedy o A lub o $\neg A$ można przesądzić):

- wszystkie gałęzie drzewa dla A i wszystkie gałęzie drzewa dla $\neg A$ są otwarte;
- wszystkie gałęzie drzewa dla A i wszystkie gałęzie drzewa dla $\neg A$ są zamknięte;
- drzewo dla A ma wszystkie gałęzie otwarte, a drzewo dla $\neg A$ ma wszystkie gałęzie zamknięte;
- drzewo dla A ma wszystkie gałęzie zamknięte, a drzewo dla $\neg A$ ma wszystkie gałęzie otwarte;
- drzewo dla A ma gałęzie otwarte i zamknięte, a także drzewo dla $\neg A$ ma gałęzie otwarte i zamknięte;
- drzewo dla A ma wszystkie gałęzie zamknięte, a drzewo dla $\neg A$ ma pewne gałęzie zamknięte, a pewne otwarte;
- drzewo dla A ma wszystkie gałęzie otwarte, a drzewo dla $\neg A$ ma pewne gałęzie zamknięte, a pewne otwarte;
- drzewo dla $\neg A$ ma wszystkie gałęzie zamknięte, a drzewo dla A ma pewne gałęzie zamknięte, a pewne otwarte;
- drzewo dla $\neg A$ ma wszystkie gałęzie otwarte, a drzewo dla A ma pewne gałęzie zamknięte, a pewne otwarte.

Czy niektóre z wyliczonych możliwości „mówią” to samo o A lub $\neg A$?

Przy podanej wyżej interpretacji „nabożnej” formuła

$$((\forall x\, Px) \to Qa) \to \forall x\, (Px \to Qa)$$

jest prawdziwa w parafiach w których:

- Nasz Proboszcz modli się żarliwie i — biedaczysko — nie miewa się nienajgorzej (parafia $\clubsuit$);
- Nasz Proboszcz nie modli się żarliwie, a o jego samopoczuciu nic nam nie wiadomo (parafia $\diamondsuit$);
- Nasz Proboszcz miewa się nienajgorzej, acz nie wiadomo, jak rzeczy się mają z jego nabożnością (parafia $\heartsuit$);

(co poza tym dzieje się w wymienionych parafiach nie ma znaczenia). Życzymy wszystkim żarliwości uczuć i dobrego samopoczucia.

* * *

Może warto na koniec tego podrozdziału uczynić następującą uwagę. Zwykle, gdy mówi się w podręcznikach o prawach (tautologiach) KRP, to rozważa się formuły w postaci takiej, jak w przykładzie III.2.2. Ze względu na propedeutyczny charakter tych notatek umieszczamy w nich przede wszystkim przykłady mniej ogólne, dla których bezpośrednio podawać można interpretacje, w których rozważane formuły są prawdziwe bądź fałszywe.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl