Logika Matematyczna (8-9)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

System założeniowy KRZ

Plan na dziś

Następna z omawianych operacji konsekwencji w KRZ jest oparta na metodzie założeniowej. Omówimy jeden z systemów założeniowych KRZ, wywodzący się z prac Stanisława Jaśkowskiego.

- Reguły pierwotne systemu.
- Konsekwencja założeniowa.
- Przykłady dowodów tez.
- Reguły wtórne.
- System założeniowy KRZ a system aksjomatyczny KRZ.
- Dowody nie wprost.
- Dodatkowe założenia dowodu. Dowody rozgałęzione.

Uwaga. Konsekwencja założeniowa jest bliższa (niż aksjomatyczna) praktyki dowodzenia twierdzeń w naukach dedukcyjnych.

Reguły pierwotne

Pracujemy w języku KRZ zdefiniowanym w wykładzie 2.
Konsekwencja założeniowa oparta jest jedynie na regułach.
Nie wykorzystujemy żadnych aksjomatów.
Można na różne sposoby dobierać reguły pierwotne.
Podamy zestaw pochodzący od Stanisława Jaśkowskiego.

- (RO) Reguła odrywania. Jeśli do dowodu należy implikacja oraz jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji. W zapisie symbolicznym:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \quad \alpha}{\beta}.$$

Reguły pierwotne

- (DK) Reguła dołączania koniunkcji. Do dowodu wolno dołączyć koniunkcję, o ile oba jej człony należą do dowodu.

$$\frac{\alpha, \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}.$$

- (OK) Reguła opuszczania koniunkcji. Jeśli do dowodu należy koniunkcja, to wolno dołączyć do dowodu każdy z jej członów.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}.$$

Reguły pierwotne

- (DP) Reguła dodawania poprzedników. Jeśli do dowodu należą dwie implikacje o takim samym następniku, to do dowodu wolno dołączyć implikację o tymże następniku i o poprzedniku będącym alternatywą poprzedników tych implikacji.

$$\frac{\alpha \rightarrow \gamma, \quad \beta \rightarrow \gamma}{(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma}.$$

- (DA) Reguła dołączania alternatywy. Jeśli do dowodu należy jakaś formuła, to do dowodu wolno dołączyć alternatywę, której jednym z członów jest ta formuła.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}.$$

Reguły pierwotne

- (DR) Reguła dołączania równoważności. Do dowodu wolno dołączyć równoważność, o ile należy do dowodu implikacja, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikacja odwrotna.

$$\frac{\alpha \to \beta, \; \beta \to \alpha}{\alpha \equiv \beta}.$$

- (OR) Reguła opuszczania równoważności. Jeśli do dowodu należy równoważność, to wolno dołączyć do dowodu zarówno implikację, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikację odwrotną.

$$\frac{\alpha \equiv \beta}{\alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \equiv \beta}{\beta \to \alpha}.$$

Reguły pierwotne

- (RK) Reguła kontrapozycji. Jeśli do dowodu należy implikacja, której poprzednikiem jest negacja jednej formuły, a następnikiem negacja drugiej formuły, to do dowodu można dołączyć implikację, której poprzednikiem jest druga formuła, a następnikiem pierwsza formuła.

$$\frac{\neg\alpha \to \neg\beta}{\beta \to \alpha}.$$

Oznaczmy przez *jas* zbiór powyższych reguł. Każda reguła ze zbioru *jas* jest nieskończonym zbiorem sekwentów, o budowie składniowej podanej w symbolicznym zapisie tej reguły.

Reguły pierwotne

- **Uwaga 1.** Zauważ, że w podanych wyżej regułach nie ma ani słowa o **prawdzie**. Wykonaj jednak **ćwiczenie**: sprawdź, że wszystkie reguły ze zbioru *jas* są niezawodne.
- **Uwaga 2.** Zauważ, że reguły są dwóch rodzajów: dotyczą wprowadzania lub opuszczania stałych logicznych. W szczególności, (RO) jest regułą opuszczania implikacji. Dualna do niej reguła wprowadzania implikacji zostanie omówiona później. Podobnie dla reguł wprowadzających negację.
- **Uwaga 3.** Twoim zalecanym zbiorem zadań z logiki są *Ćwiczenia z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz, gdzie używa się innego zestawu reguł pierwotnych. **Nie lękaj się!** Za chwilę pokażemy, że z podanych reguł pierwotnych wyprowadzić można te reguły jako wtórne.

Operacja konsekwencji

Operacja konsekwencji to pewna funkcja C, która każdemu zbiorowi formuł X przyporządkowuje pewien zbiór formuł $C(X)$. Myśl o niej tak oto:

- Mam dany jakiś zbiór przesłanek X. Jaki jest ogół wniosków, które mogę wyprowadzić z X, za pomocą pewnych, z góry ustalonych reguł wnioskowania?

Tak, zgadłaś! To właśnie będzie ów zbiór $C(X)$.

Wnioski otrzymujemy z przesłanek stosując ustalone reguły wnioskowania. Operacja konsekwencji będzie zatem wyznaczona przez owe reguły.

Uwaga. Teraz będzie ścisła definicja. **Nie trwóż się!** Okaże się ona o wiele prostsza od ezoterycznych konstrukcji pojęciowych, z którymi obcujesz na innych wykładach.

Operacja konsekwencji

Niech S będzie zbiorem wszystkich formuł języka KRZ. Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną rodziną reguł wnioskowania w KRZ. Niech $\mathcal{N}$ oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych. Niech 2^S oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów S. Przez **operację konsekwencji w KRZ wyznaczoną przez $\mathcal{R}$** rozumiemy funkcję $C_{\mathcal{R}} : 2^S \to 2^S$, zdefiniowaną indukcyjnie następującymi warunkami dla dowolnego zbioru formuł X języka KRZ:

- $C^0_{\mathcal{R}}(X) = X$
- $C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X) = C^k_{\mathcal{R}}(X) \cup \{\alpha \in S : (\exists R \in \mathcal{R})(\exists P \subseteq C^k_{\mathcal{R}}(X))\ (P, \alpha) \in R\}$
- $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C^k_{\mathcal{R}}(X) : k \in \mathcal{N}\}$.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ czytamy: **α jest wyprowadzalna z X za pomocą reguł należących do $\mathcal{R}$.**

Operacja konsekwencji

Powyższy zapis symboliczny można też wyrazić „ludzką mową”:

- $C^0_{\mathcal{R}}(X)$ to po prostu wyjściowy zbiór X
- $C^1_{\mathcal{R}}(X)$ to zbiór X plus wszystkie bezpośrednie wnioski otrzymane z przesłanek ze zbioru X wedle reguł wnioskowania z zestawu $\mathcal{R}$
- elementami zbioru $C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X)$ są elementy $C^k_{\mathcal{R}}(X)$ oraz wszystkie wnioski wszystkich reguł z $\mathcal{R}$, których przesłanki brane są ze zbioru $C^k_{\mathcal{R}}(X)$
- $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest sumą wszystkich otrzymanych w ten sposób wniosków.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ oznacza zatem, że formułę α otrzymujemy z założeń X stosując (być może wielokrotnie) reguły wnioskowania z podanego ich zestawu $\mathcal{R}$.

Operacja konsekwencji

Jak zatem „działa” operacja konsekwencji na danym zbiorze przesłanek X? Czyli jak otrzymujemy zbiór $C_{\mathcal{R}}(X)$?

Bierzesz dowolną regułę wnioskowania R z zestawu $\mathcal{R}$ i tyle przesłanek ze zbioru X, ilu przesłanek wymaga reguła R. Wtedy zarówno elementy samego X, jak i wszystkie wnioski wszystkich takich reguł R dla dowolnych przesłanek z X tworzą zbiór $C^1_{\mathcal{R}}(X)$, czyli zbiór „bezpośrednich wniosków” z przesłanek znajdujących się w X. Procedurę tę powtarzasz wychodząc teraz od $C^1_{\mathcal{R}}(X)$ zamiast od X. Dostajesz wszystkie „wnioski co najwyżej drugiego stopnia” z przesłanek znajdujących się w X, czyli zbiór $C^2_{\mathcal{R}}(X)$ (aby do nich „dotrzeć” należy co najwyżej dwukrotnie stosować reguły wnioskowania). I tak dalej.

Suma (po wszystkich n) tych wszystkich „wniosków co najwyżej n-tego stopnia” daje ogół wszystkich wniosków, które można otrzymać z przesłanek X posługując się regułami z zestawu $\mathcal{R}$.

Konsekwencja założeniowa

Określamy zbiór T_{jas} **tez** systemu dedukcji naturalnej (systemu założeniowego) KRZ opartego na regułach *jas*:

- $\alpha \in T^0_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna $n \geqslant 0$ oraz formuły $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma$ takie, że:
  - α jest identyczna z $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \gamma) \ldots))$
  - $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\})$.
- $\alpha \in T^{k+1}_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne $n \geqslant 0$, $i < n$ oraz formuły $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ takie, że:
  - α jest identyczna z $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_i \rightarrow \gamma) \ldots))$
  - $\beta_{i+1}, \beta_{i+2}, \ldots, \beta_n \in T^k_{jas}$
  - $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\})$.

$\alpha \in T_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje m taka, że $\alpha \in T^m_{jas}$.

Konsekwencja założeniowa

Jeśli $\alpha \in T^m_{jas}$, to mówimy, że α jest tezą stopnia m systemu założeniowego KRZ. Jeśli α jest tezą stopnia m i $m \leqslant n$, to α jest też oczywiście tezą stopnia n. Jeśli $\alpha \in T_{jas}$, to mówimy, że α jest **tezą** systemu założeniowego KRZ.

Notacja. Aby pokazać, że $\alpha \in T_{jas}$, gdzie α jest identyczna z $(\beta_1 \to (\beta_2 \to \ldots(\beta_n \to \gamma)\ldots))$ budujemy dowód założeniowy, w którym $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ są założeniami i który zostaje uznany za zakończony, gdy $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\})$, tj. gdy otrzymamy formułę γ stosując (do założeń i pośrednich kroków dowodowych) reguły ze zbioru *jas*. Numerujemy poszczególne wiersze dowodu i opatrujemy je komentarzem wskazującym na ich uzasadnienie, tak samo jak czyniliśmy to w aksjomatycznym ujęciu KRZ.

Uwaga. W dowodach tez stopnia n można wykorzystywać wszystkie tezy stopnia m, dla $m \leqslant n$.

Konsekwencja założeniowa

Zdefiniujemy relację $\vdash_{jas}$ konsekwencji założeniowej.

Niech $X = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ będzie skończonym zbiorem formuł, a α formułą języka KRZ. Zachodzi $X \vdash_{jas} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy tezą systemu założeniowego jest formuła:

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \alpha) \ldots)).$$

Tak więc, $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \vdash_{jas} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód założeniowy α w oparciu o założenia $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ oraz reguły ze zbioru *jas*.

Przykłady dowodów tez

$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ (prawo komutacji)

Należy dowieść, że z założeń $\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta, \alpha$ można otrzymać γ, używając reguł ze zbioru *jas*.

1.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	założenie
2.	β	założenie
3.	α	założenie
4.	$\beta \to \gamma$	RO: 1,3
5.	γ	RO: 4,2.

Zauważmy, że ten dowód jest taki sam, jak dowód prawa komutacji w aksjomatycznym ujęciu KRZ, przy wykorzystaniu Twierdzenia o Dedukcji Wprost.

Przykłady dowodów tez

$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ prawo eksportacji

Trzeba pokazać, że z założeń $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$, α, β można otrzymać γ.

1.	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$	założenie
2.	α	założenie
3.	β	założenie
4.	$\alpha \wedge \beta$	DK: 2,3
5.	γ	RO: 1,4.

Zauważ, że **planowanie** dowodu jest w tej metodzie prostsze, niż w metodzie aksjomatycznej.

Przykłady dowodów tez

$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$ prawo importacji

Trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, $\alpha \wedge \beta$ można otrzymać γ.

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	$\alpha \wedge \beta$	założenie
3.	α	OK: 2
4.	β	OK: 2
5.	$\beta \rightarrow \gamma$	RO: 1,3
6.	γ	RO: 5,4.

Zwróć uwagę na różne możliwości kolejności wykonania poszczególnych kroków dowodu.

Przykłady dowodów tez

$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \equiv (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ prawo eksportacji i importacji

1.	$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$	prawo eksportacji
2.	$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$	prawo importacji
3.	$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \equiv (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$	DR: 1,2.

To prosty przykład wykorzystania tez już udowodnionych w dowodach dalszych tez.

Przykłady dowodów tez

$((\alpha \vee \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$

Trzeba pokazać, że z założeń $(\alpha \vee \beta) \to \gamma$ oraz α można otrzymać γ.

1.	$(\alpha \vee \beta) \to \gamma$	założenie
2.	α	założenie
3.	$\alpha \vee \beta$	DA: 2
4.	γ	RO: 1,2.

Prawo sylogizmu hipotetycznego

$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$ prawo sylogizmu hipotetycznego

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \to \beta$, $\beta \to \gamma$ oraz α można otrzymać γ.

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\beta \to \gamma$	założenie
3.	α	założenie
4.	β	RO: 1,3
5.	γ	RO: 2,3.

Prawo Fregego

$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ prawo Fregego

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, $\alpha \rightarrow \beta$ oraz α można otrzymać γ.

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
3.	α	założenie
4.	β	RO: 2,3
5.	$\beta \rightarrow \gamma$	RO: 1,3
6.	γ	RO: 5,4.

Ćwiczenie 1

Pokaż, że są tezami systemu założeniowego KRZ:

- (a) $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$
- (b) $(\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$
- (c) $(\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))$.

Uwaga. Rozwiązania wszystkich ćwiczeń — na końcu tej prezentacji.

Reguły wtórne

Zgodnie z ogólną definicją podaną na poprzednim wykładzie, reguła R jest regułą wyprowadzalną (wtórną) systemu założeniowego KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego sekwentu $(X, \alpha) \in R$ mamy:

$$\alpha \in C_{jas}(X).$$

Jeśli R jest regułą wtórną systemu założeniowego KRZ, to można jej używać w dowodach dalszych tez tego systemu oraz w dowodach wyprowadzalności kolejnych reguł wtórnych. Zauważmy, że jeśli pokazaliśmy, iż tezą systemu założeniowego jest implikacja o postaci $\Psi \rightarrow \Phi$, to reguła:

$$\frac{\Psi}{\Phi}$$

jest regułą wtórną.

Reguła sylogizmu hipotetycznego

$$\frac{\alpha \to \beta \qquad\qquad \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$$

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \to \beta$ i $\beta \to \gamma$ można otrzymać $\alpha \to \gamma$.

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\beta \to \gamma$	założenie
3.	$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$	prawo sylogizmu hipotetycznego
4.	$(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$	RO: 3,1
5.	$\alpha \to \gamma$	RO: 4,2.

Reguła Fregego

$$\frac{\alpha \to (\beta \to \gamma) \qquad\qquad \alpha \to \beta}{\alpha \to \gamma}$$

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ oraz $\alpha \to \beta$ można otrzymać $\alpha \to \gamma$.

1.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	założenie
2.	$\alpha \to \beta$	założenie
3.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	prawo Fregego
4.	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	RO: 3,1
5.	$\alpha \to \gamma$	RO: 4,2.

Reguły wtórne

Aby pokazać, że reguła $\frac{\alpha\to(\beta\to\gamma),\beta}{\alpha\to\gamma}$ wewnętrznego poprzedzania (RWP) jest wyprowadzalna w systemie założeniowym KRZ, trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ i β otrzymać można $\alpha \to \gamma$:

1.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	założenie
2.	β	założenie
3.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$	prawo komutacji
4.	$\beta \to (\alpha \to \gamma)$	RO: 3,1
5.	$\alpha \to \gamma$	RO: 4,2.

System założeniowy KRZ a system aksjomatyczny KRZ

Twierdzenie 8.1. (O równoważności systemu założeniowego KRZ z systemem aksjomatycznym KRZ.)

- (1) Każda teza aksjomatycznego systemu KRZ jest tezą założeniowego systemu KRZ.
- (2) Każda teza założeniowego systemu KRZ jest tezą aksjomatycznego systemu KRZ.
- (3) Każda reguła wyprowadzalna w aksjomatycznym systemie KRZ jest też wyprowadzalna w założeniowym systemie KRZ.
- (4) Każda reguła wyprowadzalna w założeniowym systemie KRZ jest też wyprowadzalna w aksjomatycznym systemie KRZ.

Na mocy tego twierdzenia systemy: aksjomatyczny oraz założeniowy KRZ są równoważne. Dowód 8.1.: w Dodatku 4.

System założeniowy KRZ a system aksjomatyczny KRZ

Z twierdzenia 8.1 oraz twierdzeń 5.6. i 5.9. otrzymujemy natychmiast:

Twierdzenie 8.2. (O trafności systemu założeniowego.)
Każda teza systemu założeniowego KRZ jest tautologią KRZ.

Twierdzenie 8.3. (O pełności systemu założeniowego.)
Każda tautologia KRZ jest tezą systemu założeniowego KRZ.

Inną konsekwencją twierdzenia 8.1 oraz twierdzeń 5.6. i 5.9. jest tożsamość zakresowa relacji $\vdash_{jas}$ oraz $\models_{KRZ}$:

$$\vdash_{jas} = \models_{KRZ} .$$

Dowody nie wprost

Twierdzenie 8.4. Twierdzenie o Dedukcji Nie Wprost.

Jeśli $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{jas} \{\gamma, \neg\gamma\}$, to $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \vdash_{jas} \alpha$.

Twierdzenie 8.4. pozwala zatem na stosowanie w systemie założeniowym dowodów nie wprost: aby pokazać, że α ma dowód z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ wystarczy pokazać, że z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \neg\alpha\}$ można wyprowadzić w systemie założeniowym KRZ parę formuł wzajem sprzecznych.
Nadto, z twierdzenia tego możemy korzystać również przy dowodzeniu wyprowadzalności reguł wtórnych systemu założeniowego KRZ.

Dowód twierdzenia 8.4.: w Dodatku 4.

Dowody nie wprost: przykłady

W dowodzie nie wprost formuły α z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ dopisujemy do założeń $\neg\alpha$, czyli założenie dowodu nie wprost (w skrócie: z.d.n.) i staramy się wyprowadzić z tych założeń parę formuł wzajem sprzecznych. Gdy to się powiedzie, α jest konsekwencją $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ w systemie założeniowym KRZ.

Dla przykładu, dowód nie wprost formuły $\neg\neg\alpha \to \alpha$ jest następujący:

1.	$\neg\neg\alpha$	założenie
2.	$\neg\alpha$	z.d.n.

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę opuszczania negacji ON:

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}.$$

Dowody nie wprost: przykłady

$\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$

1.	α	założenie
2.	$\neg\neg\neg\alpha$	z.d.n.
3.	$\neg\alpha$	ON: 2.

Z tez $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ i $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ otrzymujemy, na mocy reguły DR tezę: $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$.

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę dołączania negacji DN:

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}.$$

Dowody nie wprost: przykłady

$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ prawo transpozycji prostej

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\neg\beta$	założenie
3.	$\neg\neg\alpha$	z.d.n.
4.	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	prawo podwójnej negacji
5.	α	RO: 3,4
6.	β	RO: 1,5.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 2 i 6.

Dowody nie wprost: przykłady

$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash_{jas} \neg\alpha$

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\neg\beta$	założenie
3.	$\neg\neg\alpha$	z.d.n.
4.	α	ON: 3
5.	β	RO: 1,4.

Pokazaliśmy więc, że regułą wtórną jest reguła *modus tollendo tollens* MT:

$$\frac{\alpha \to \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}.$$

Dowody nie wprost: przykłady

Aby pokazać, że reguła poprzedzania $\frac{\alpha}{\beta \to \alpha}$ jest regułą wtórną, dowodzimy najpierw, że tezą systemu założeniowego jest prawo poprzedzania $\alpha \to (\beta \to \alpha)$. W tym celu wystarczy pokazać, że z założeń α, β oraz $\neg\alpha$ otrzymujemy sprzeczność (dowód niżej, po lewej):

1.	α	założenie	1.	α	założenie
2.	β	założenie	2.	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	prawo poprzedzania
3.	$\neg\alpha$	z.d.n.	3.	$\beta \to \alpha$	RO: 2,1.

Dowód, że $\frac{\alpha}{\beta \to \alpha}$ jest regułą wtórną polega na pokazaniu, że z założenia α możemy otrzymać $\beta \to \alpha$: dowód wyżej, po prawej.

Ćwiczenie 2

Pokaż, w podanej niżej kolejności, że są tezami systemu założeniowego KRZ:

- (a) $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$
- (b) $\alpha \to \alpha$
- (c) $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
- (d) $\neg\neg\alpha \to \alpha$
- (e) $(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$.

Dowody nie wprost: wyprowadzenie reguły OA

Pokażemy, że wyprowadzalna w systemie założeniowym KRZ jest reguła OA opuszczania alternatywy:

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta}.$$

Trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \vee \beta$ oraz $\neg\alpha$, a także z założenia dowodu nie wprost $\neg\beta$ otrzymać można parę formuł wzajem sprzecznych.

W dowodzie tym skorzystamy z tez udowodnionych w ćwiczeniu 2:

- (a) $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$
- (b) $\alpha \to \alpha$
- (c) $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
- (d) $\neg\neg\alpha \to \alpha$
- (e) $(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$.

Dowody nie wprost: wyprowadzenie reguły OA

1.	$\alpha \vee \beta$	założenie
2.	$\neg\alpha$	założenie
3.	$\neg\beta$	z.d.n.
4.	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	DK: 2,3
5.	$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$	na mocy reg. pierw. (OK)
6.	$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\beta$	na mocy reg. pierw. (OK)
7.	$\alpha \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	5, ćwiczenie 2 (e)
8.	$\beta \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	6, ćwiczenie 2 (e)
9.	$(7) \rightarrow ((8) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)))$	DP: 7,8
10.	$(8) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta))$	RO: 9,7
11.	$(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	RO: 10,8
12.	$\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	RO: 11,1.

Możemy zatem korzystać w dowodach z reguły OA opuszczania alternatywy:

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta}.$$

Ćwiczenie 3

Pokaż, że są tezami systemu założeniowego KRZ:

- (a) $(\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (b) $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\beta)$
- (c) $((\alpha \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$

Uwaga. Pamiętaj, że w dowodach możesz wykorzystywać zarówno wcześniej udowodnione tezy, jak i reguły, o których wcześniej pokazałaś, że są wyprowadzalne. Możesz też korzystać z dowodów nie wprost.

Dodatkowe założenia dowodu

Kolejna wielce użyteczna technika dowodowa w systemie założeniowym KRZ polega na korzystaniu z tzw. dodatkowych założeń dowodu. Jest to procedura następująca:

- Czynimy w dowodzie dodatkowe założenie α.
- Jeśli z założenia α (oraz wcześniejszych kroków dowodu) możemy wyprowadzić formułę β, to do dowodu wolno włączyć formułę $\alpha \rightarrow \beta$.
- Z kroków wyprowadzenia β z α **nie wolno** korzystać poza tym wyprowadzeniem. Zwykle stosuje się stosowną numerację: jeśli dodatkowe założenie α ma numer n.1., a wyprowadzona z niego formuła ma numer $n.m.$, to z kroków o numerach od n.1. do $n.m.$ **nie** korzystamy w dowodzie głównym.

Prawomocność tego postępowania wynika z definicji dowodów założeniowych. Każdy dowód z dodatkowymi założeniami można zastąpić dowodem bez nich.

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 1

$((\alpha \lor \beta) \to (\gamma \land \delta)) \to ((\alpha \to \gamma) \land (\beta \to \delta))$

1.	$(\alpha \lor \beta) \to (\gamma \land \delta)$	założenie
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	$\alpha \lor \beta$	DA: 1.1.
1.3.	$\gamma \land \delta$	RO: 1,1.2.
1.4.	γ	OK: 1.3.
2.	$\alpha \to \gamma$	1.1.⇒1.4.
2.1.	β	założenie dodatkowe
2.2.	$\alpha \lor \beta$	DA: 2.1.
2.3.	$\gamma \land \delta$	RO: 1,2.2.
2.4.	δ	OK: 2.3.
3.	$\beta \to \delta$	2.1.⇒2.4.
4.	$(\alpha \to \gamma) \land (\beta \to \delta)$	DK: 2,3.

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

Udowodnimy najpierw tezę pomocniczą $(*)$:

$(*) \quad (\alpha \to \beta) \to (\neg(\beta \vee \delta) \to \neg\alpha)$

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
3.	$\neg\neg\alpha$	z.d.n.
4.	α	ON: 3
5.	β	RO: 1,4
6.	$\beta \vee \delta$	DA: 5.

W wierszach 2 i 6 mamy parę formuł wzajem sprzecznych, a więc dowód nie wprost tezy $(*)$ został zakończony.

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

$(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \delta) \to (\neg(\beta \vee \delta) \to \neg(\alpha \vee \gamma)))$

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\gamma \to \delta$	założenie
3.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
4.	$\neg\neg(\alpha \vee \gamma)$	z.d.n.
5.	$\alpha \vee \gamma$	ON: 4
6.	$(\alpha \to \beta) \to (\neg(\beta \vee \delta) \to \neg\alpha)$	teza $(*)$
7.	$\neg(\beta \vee \delta) \to \neg\alpha$	RO: 6,1
8.	$\neg\alpha$	RO: 7,3
9.	γ	OA: 5,8
10.	δ	RO: 2,9
11.	$\beta \vee \delta$	DA: 10.

Dowód powyższy można zastąpić dowodem z dodatkowymi założeniami, bez wykorzystania tezy $(*)$:

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\gamma \rightarrow \delta$	założenie
3.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
4.	$\neg\neg(\alpha \vee \gamma)$	z.d.n.
5.	$\alpha \vee \gamma$	ON: 4
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	β	RO: 1,1.1.
1.3.	$\beta \vee \delta$	DA: 1.2.
6.	$\alpha \rightarrow (\beta \vee \delta)$	1.1.$\Rightarrow$1.4.
7.	$\neg\alpha$	MT: 6,3
8.	γ	OA: 5,7
9.	δ	RO: 2,8
10.	$\beta \vee \delta$	DA: 9.

W kroku 7 korzystamy z wtórnej reguły *modus tollendo tollens* MT: $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}$.

Dowody dalszych tez

$(\alpha \to (\beta \vee \gamma)) \to (\alpha \to (\neg\beta \to \gamma))$

Trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \to (\beta \vee \gamma)$, α oraz $\neg\beta$ można otrzymać γ.

1.	$\alpha \to (\beta \vee \gamma)$	założenie
2.	α	założenie
3.	$\neg\beta$	założenie
4.	$\beta \vee \gamma$	RO: 1,2
5.	γ	OA: 4,3.

Dowody dalszych tez

Pokażemy, że wyprowadzalna jest reguła $\frac{\neg\alpha\rightarrow\neg\beta,\beta}{\alpha}$.

1.	$\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$	założenie
2.	β	założenie
3.	$\neg\neg\beta$	DN: 2
4.	$\neg\neg\alpha$	MT: 1,3
5.	α	ON: 4.

W podobny sposób można pokazać wyprowadzalność np. reguł: $\frac{\alpha\rightarrow\neg\beta,\beta}{\neg\alpha}$ i $\frac{\neg\alpha\rightarrow\beta,\neg\beta}{\alpha}$.

Dowody dalszych tez

Pokażemy, że wyprowadzalna jest reguła $\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}$.

1.	α	założenie
2.	$\neg\alpha$	założenie
3.	$\alpha \vee \beta$	DA: 1
4.	β	OA: 3,2.

Regułę $\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}$ nazywamy regułą Dunsa Scotusa (RDS).

Dowody dalszych tez

$\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$

1.	α	założenie
2.	$\neg\alpha$	założenie
3.	β	RDS: 1,2.

Dowody dalszych tez

$\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$.

1.	$\neg(\alpha \vee \beta)$	założenie
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 1.1.
2.	$\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	1.1.⇒1.2.
3.	$\neg\alpha$	MT: 2,1
2.1.	β	założenie dodatkowe
2.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 2.1.
4.	$\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	2.1.⇒2.2.
5.	$\neg\beta$	MT: 4,1
5.	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	DK: 3,5.

Dowody dalszych tez

$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$.

1.	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	założenie
2.	$\neg\neg(\alpha \vee \beta)$	z.d.n.
3.	$\alpha \vee \beta$	ON: 2
4.	$\neg\alpha$	OK: 1
5.	$\neg\beta$	OK: 1
6.	β	OA: 3,4.

Dwie udowodnione przed chwilą tezy implikacyjne dają łącznie prawo negowania alternatywy $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$. Regułą wtórną jest zatem reguła negowania alternatywy NA: $\frac{\neg(\alpha\vee\beta)}{\neg\alpha\wedge\neg\beta}$.

Dowody dalszych tez

$\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$.

1.	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	założenie
2.	$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$	z.d.n.
3.	$\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta$	NA: 2
4.	$\neg\neg\alpha$	OK: 3
5.	$\neg\neg\beta$	OK: 3
6.	α	ON: 4
7.	β	ON: 5
8.	$\alpha \wedge \beta$	DK: 6,7.

Dowody dalszych tez

$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$.

1.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	założenie
2.	$\neg\neg(\alpha \wedge \beta)$	z.d.n.
3.	$\alpha \wedge \beta$	ON: 2
4.	α	OK: 3
5.	β	OK: 3
6.	$\neg\neg\alpha$	DN: 4
7.	$\neg\beta$	OA: 1,6.

Dwie udowodnione przed chwilą tezy implikacyjne dają łącznie prawo negowania koniunkcji $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$. Regułą wtórną jest zatem reguła negowania koniunkcji NK: $\frac{\neg(\alpha\wedge\beta)}{\neg\alpha\vee\neg\beta}$.

Dowody dalszych tez

Prawa negowania koniunkcji i negowania alternatywy nazywane są też prawami De Morgana.

Zauważmy, że reguły NA oraz NK są „symetryczne”, w tym sensie, że wyprowadzalne są także reguły:

$$\frac{\neg\alpha \vee \neg\beta}{\neg(\alpha \wedge \beta)} \qquad \frac{\neg\alpha \wedge \neg\beta}{\neg(\alpha \vee \beta)}.$$

Każda teza równoważnościowa założeniowego systemu KRZ pozwala na wprowadzenie reguły wtórnej „symetrycznej” we wspomnianym wyżej sensie.

Dowody dalszych tez

$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

1.	$\neg\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$	z.d.n.
2.	$\alpha \wedge \neg\alpha$	ON: 1
3.	α	OK: 2
4.	$\neg\alpha$	OK: 2.

Uwaga. W przypadkach poszukiwania dowodów formuł, gdzie nie można poczynić żadnych założeń, zaczynamy dowód od założenia nie wprost.

Dowody dalszych tez

$\alpha \vee \neg\alpha$

1.	$\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$	z.d.n.
2.	$\neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha$	NA: 1
3.	$\neg\alpha$	OK: 2
4.	$\neg\neg\alpha$	OK: 2.

Dowody dalszych tez

$\neg(\alpha \to \beta) \to (\alpha \wedge \neg\beta)$.

1.	$\neg(\alpha \to \beta)$	założenie
2.	$\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$	z.d.n.
3.	$\neg\alpha \vee \neg\neg\beta$	NK: 2
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	$\neg\neg\alpha$	DN: 1.1.
1.3.	$\neg\neg\beta$	OA: 3,1.2.
1.4.	β	ON: 1.3.
4.	$\alpha \to \beta$	1.1.$\Rightarrow$1.4.

Dowody dalszych tez

$(\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \to \beta)$.

1.	$\alpha \wedge \neg\beta$	
2.	$\neg\neg(\alpha \to \beta)$	z.d.n.
3.	$\alpha \to \beta$	ON: 2
4.	α	OK: 1
5.	$\neg\beta$	OK: 1
6.	β	RO: 3,4.

Dwie udowodnione przed chwilą implikacje dają łącznie jedno z praw negowania implikacji: $\neg(\alpha \to \beta) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta)$.

Dowody dalszych tez

$(\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \lor \beta)$.

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\neg(\neg\alpha \lor \beta)$	z.d.n.
3.	$\neg\neg\alpha \land \neg\beta$	NA: 2
4.	$\neg\neg\alpha$	OK: 3
5.	$\neg\beta$	OK: 3
6.	α	ON: 4
7.	β	RO: 1,6.

Dowody dalszych tez

$(\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

1.	$\neg\alpha \vee \beta$	założenie
2.	$\neg(\alpha \rightarrow \beta)$	z.d.n.
3.	$\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \neg\beta)$	prawo negowania implikacji
4.	$\alpha \wedge \neg\beta$	RO: 3,2
5.	$\neg\beta$	OK: 4
6.	$\neg\alpha$	OA: 1,5
7.	α	OK: 4.

Dwie udowodnione przed chwilą implikacje dają łącznie równoważność: $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$, pozwalającą zastępować implikację przez alternatywę i negację (oraz na odwrót). Co zarzucisz powyższemu dowodowi? Zob. ćw. 3 (a).

Dowody dalszych tez

$\{(\alpha \to \beta) \to \gamma, \neg\gamma \wedge \neg\delta, (\alpha \to \beta) \vee \vartheta, \vartheta \to (\gamma \vee \beta)\} \vdash_{jas} \beta$.

1.	$(\alpha \to \beta) \to \gamma$	założenie
2.	$\neg\gamma \wedge \neg\delta$	założenie
3.	$(\alpha \to \beta) \vee \vartheta$	założenie
4.	$\vartheta \to (\gamma \vee \beta)$	założenie
5.	$\neg\gamma$	OK: 2
6.	$\neg(\alpha \to \beta)$	MT: 1,5
7.	ϑ	OA: 3,6
8.	$\gamma \vee \beta$	RO: 4,7
9.	β	OA: 8,5.

Dowody dalszych tez

$\{(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma, \neg\delta, (\gamma \vee \delta) \rightarrow \vartheta, \delta \vee \alpha\} \vdash_{jas} \vartheta$.

1.	$(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$	założenie
2.	$\neg\delta$	założenie
3.	$(\gamma \vee \delta) \rightarrow \vartheta$	założenie
4.	$\delta \vee \alpha$	założenie
5.	α	OA: 4,2
6.	$\alpha \vee \beta$	DA: 5
7.	γ	RO: 1,6
8.	$\gamma \vee \delta$	DA: 7
9.	ϑ	RO: 3,8.

Dygresja: Teodycea i kule w płocie

Pokażemy, że następujące wnioskowanie jest dedukcyjne:

Bóg jest miłosierny, o ile jest doskonały. Jeśli Bóg jest doskonały i stworzył Świat, to w Świecie nie ma Zła. Jednak w Świecie jest Zło. Ponadto, twierdzi się, że Bóg stworzył Świat. Zatem Bóg nie jest doskonały lub nie jest miłosierny.

- α — Bóg jest doskonały.
- β — Bóg jest miłosierny.
- γ — Bóg stworzył Świat.
- δ — W Świecie jest Zło.

Dygresja: Teodycea i kule w płocie

$\{\alpha \to \beta, (\alpha \wedge \gamma) \to \neg\delta, \gamma, \delta\} \vdash_{jas} \neg\alpha \vee \neg\beta$.

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$(\alpha \wedge \gamma) \to \neg\delta$	założenie
3.	δ	założenie
4.	γ	założenie
5.	$\neg\neg\delta$	DN: 3
6.	$\neg(\alpha \wedge \gamma)$	MT: 2,5
7.	$\neg\alpha \vee \neg\gamma$	NK: 6
8.	$\neg\neg\gamma$	DN: 4
9.	$\neg\alpha$	OA: 7,8
10.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	DA: 9.

Zauważmy, że w dowodzie nie korzystano z pierwszego założenia.

Ćwiczenie 4

Pokaż, że są tezami systemu założeniowego KRZ:

- (a) $(\alpha \to \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)$
- (b) $(\alpha \vee \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to \gamma))$
- (c) $\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\alpha$
- (d) $(\alpha \to (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma))$.

Uwaga. Pamiętaj, że w dowodach możesz wykorzystywać zarówno wcześniej udowodnione tezy, jak i reguły, o których wcześniej pokazałaś, że są wyprowadzalne. Możesz też korzystać z dowodów nie wprost oraz z dowodów z dodatkowymi założeniami.

Ćwiczenie 5

Pokaż, że są regułami wyprowadzalnymi w systemie założeniowym KRZ:

- (a) $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \beta}{\beta}$
- (b) $\frac{\neg\alpha \rightarrow \beta}{\alpha \vee \beta}$
- (c) $\frac{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma}{\neg\alpha \rightarrow \gamma}$
- (d) $\frac{(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma}{(\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)}$.

Uwaga. Pamiętaj, że w dowodach możesz wykorzystywać zarówno wcześniej udowodnione tezy, jak i reguły, o których wcześniej pokazałaś, że są wyprowadzalne. Możesz też korzystać z dowodów nie wprost oraz z dowodów z dodatkowymi założeniami.

Sprzeczne zbiory formuł

Zbiór formuł X jest (syntaktycznie) sprzeczny, jeśli istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{jas} \alpha$ oraz $X \vdash_{jas} \neg\alpha$. Jeśli X nie jest sprzeczny, to mówimy, że X jest (syntaktycznie) niesprzeczny.

Twierdzenie 8.5. (Twierdzenie o zwartości.)
Zbiór X formuł języka KRZ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy pewien jego skończony podzbiór jest sprzeczny.

Wykazanie syntaktycznej sprzeczności zbioru formuł X polega na zbudowaniu dowodu założeniowego, którego przesłankami są elementy jakiegoś skończonego podzbioru zbioru X i w którego wierszach znajduje się para formuł wzajem sprzecznych.

Z Twierdzenia o Pełności KRZ wynika,że pojęcia: syntaktycznej i semantycznej niesprzeczności są tożsame zakresowo.

Sprzeczne zbiory formuł: przykłady

Pokażemy, że $\{\alpha \vee \neg\beta, \gamma \to \beta, \neg(\delta \wedge \neg\gamma), \delta \wedge \neg\alpha\}$ jest sprzecznym zbiorem formuł.

1.	$\alpha \vee \neg\beta$	założenie
2.	$\gamma \to \beta$	założenie
3.	$\neg(\delta \wedge \neg\gamma)$	założenie
4.	$\delta \wedge \neg\alpha$	założenie
5.	δ	OK: 4
6.	$\neg\alpha$	OK: 4
7.	$\neg\beta$	OA: 1,6
8.	$\neg\gamma$	MT: 2,7
9.	$\delta \wedge \neg\gamma$	DK: 5,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 3 i 9.

Dygresja: ekonomia telewizyjna.

Zwróćmy uwagę, że wykazaliśmy przed chwilą dedukcyjną sprzeczność telewizyjnej „analizy ekonomicznej”:

Jest kapitalizm lub nie ma bezrobocia. Jeśli jest recesja, to jest też bezrobocie. Nie ma jednocześnie: biedy oraz braku recesji. Jest bieda, a nie ma kapitalizmu.

- α — Jest kapitalizm.
- β — Jest bezrobocie.
- γ — Jest recesja.
- δ — Jest bieda.

Sprzeczne zbiory formuł: przykłady

Pokażemy, że $\{\neg\gamma \wedge \beta,\ \alpha \to (\beta \to (\gamma \vee \neg\delta)),\ \alpha,\ \vartheta \wedge (\beta \to \gamma)\}$ jest sprzeczny.

1.	$\neg\gamma \wedge \beta$	założenie
2.	$\alpha \to (\beta \to (\gamma \vee \neg\delta))$	założenie
3.	α	założenie
4.	$\vartheta \wedge (\beta \to \gamma)$	założenie
5.	$\neg\gamma$	OK: 1
6.	β	OK: 1
7.	$\beta \to (\gamma \vee \neg\delta)$	RO: 2,3
8.	$\gamma \vee \neg\delta$	RO: 7,6
9.	$\neg\delta$	OA: 8,5
10.	$\beta \to \gamma$	OK: 4
11.	γ	RO: 10,6.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 5 i 11.

Ćwiczenie 6

Pokaż, że są sprzecznymi zbiorami formuł:

- (a) $\{\alpha \to \beta, \ \ \beta \to \neg\gamma, \ \ \delta \to \gamma, \ \ \alpha \wedge \delta\}$
- (b) $\{\alpha \to \beta, \ \ \gamma \to \delta, \ \ \neg\beta \vee \gamma, \ \ \alpha \wedge \neg\delta\}$
- (c) $\{\alpha \to \neg\beta, \ \ \beta \to \neg\gamma, \ \ \delta \to \beta, \ \ \delta, \ \ \alpha \vee \gamma\}$
- (d) $\{\alpha \vee (\gamma \wedge \neg\beta), \ \ \beta \vee \neg\gamma, \ \ \neg\alpha\}$.

Dowody rozgałęzione

Czasami dla skrótu wygodnie jest stosować dowody rozgałęzione.

Dowód założeniowy wprost formuły $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \gamma) \ldots))$ uważamy za zakończony, jeśli:

- (a) istnieje dowód γ z **każdego** z dodatkowych założeń $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$
- (b) alternatywa $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \ldots \vee \gamma_m$ jest jednym z wierszy dowodu formuły γ.

Uzasadnienie. Jeśli (a), to do dowodu γ można dołączyć wszystkie implikacje $\gamma_i \rightarrow \gamma$, dla $1 \leqslant i \leqslant m$. Na mocy reguły dodawania poprzedników, można też dołączyć formułę: $(\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \ldots \vee \gamma_m) \rightarrow \gamma$. Na mocy (b) i reguły odrywania otrzymujemy γ.

Dowody rozgałęzione

Dowód założeniowy nie wprost formuły $(\beta_1 \to (\beta_2 \to \ldots (\beta_n \to \gamma) \ldots))$ uważamy za zakończony, jeśli:

- (a) uzyskujemy sprzeczność na podstawie **każdego** z dodatkowych założeń $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$
- (b) alternatywa $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \ldots \vee \gamma_m$ jest jednym z wierszy dowodu formuły γ.

Uzasadnienie. Jeśli (a), to na mocy MT możemy dołączyć do dowodu wszystkie wyrażenia $\neg\gamma_i$, dla $1 \leqslant i \leqslant m$. Skoro (b), to z reguły OA zastosowanej do $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \ldots \vee \gamma_m$ oraz wszystkich $\neg\gamma_i$ dla $i \neq j$ otrzymujemy γ_j, dla $1 \leqslant j \leqslant m$. Mamy zatem w dowodzie parę $\neg\gamma_i$, γ_i dla $1 \leqslant i \leqslant m$, co kończy dowód nie wprost formuły γ.

Będziemy używać symbolu $\perp$ na oznaczenie sprzeczności.

Dowody rozgałęzione: przykłady

$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

1.	$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	założenie
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 1.1.
2.1.	$\beta \wedge \gamma$	założenie dodatkowe
2.2.	β	OK: 2.1.
2.3.	$\alpha \vee \beta$	DA: 2.2.
3.	$\alpha \vee \beta$	1.1.$\Rightarrow$1.2, 2.1.$\Rightarrow$2.3.

Dowody rozgałęzione: przykłady

$(((\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta)) \wedge \neg(\beta \vee \delta)) \to \neg(\alpha \vee \gamma)$

1.	$(\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta)$	założenie
2.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
3.	$\neg\neg(\alpha \vee \gamma)$	z.d.n.
4.	$\alpha \to \beta$	OK: 1
5.	$\gamma \to \delta$	OK: 1
6.	$\alpha \vee \gamma$	ON: 3
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	β	RO: 4,1.1.
1.3.	$\beta \vee \delta$	DA: 1.2.
2.1.	γ	założenie dodatkowe
2.2.	δ	RO: 5,2.1.
2.3.	$\beta \vee \delta$	DA: 2.2.
7.	$\perp$	1.1.$\Rightarrow\perp_{1.3.,2}$; 2.1.$\Rightarrow\perp_{2.3.,2}$; 3.

Uwaga. Powyższy dowód jest w istocie skrótowym zapisem dowodu nie wprost:

1.	$(\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta)$	założenie
2.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
3.	$\neg\neg(\alpha \vee \gamma)$	z.d.n.
4.	$\alpha \to \beta$	OK: 1
5.	$\gamma \to \delta$	OK: 1
6.	$\alpha \vee \gamma$	ON: 3
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	β	RO: 4,1.1.
1.3.	$\beta \vee \delta$	DA: 1.2.
7.	$\alpha \to (\beta \vee \delta)$	1.1.⇒1.3.
8.	$\neg\alpha$	MT: 7,2
2.1.	γ	założenie dodatkowe
2.2.	δ	RO: 5,2.1.
2.3.	$\beta \vee \delta$	DA: 2.2.
9.	$\gamma \to (\beta \vee \delta)$	2.1.⇒2.3.
10.	$\neg\gamma$	MT: 9,2
11.	$\neg\alpha \wedge \neg\gamma$	DK: 8,10
12.	$\neg(\alpha \vee \gamma)$	prawo De Morgana: 11.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 12.

Dowody rozgałęzione: przykłady

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow (\beta \vee \gamma))$

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\alpha \vee \gamma$	założenie
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	β	RO: 1,1.1.
1.3.	$\beta \vee \gamma$	DA: 1.2.
2.1.	γ	założenie dodatkowe
2.2.	$\beta \vee \gamma$	DA: 2.1.
3.	$\beta \vee \gamma$	1.1.$\Rightarrow$1.3.; 2.1.$\Rightarrow$2.2.; 2.

Dowody rozgałęzione: przykłady

$((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \delta)) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow (\beta \vee \delta))$

1.	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \delta)$	założenie
2.	$\alpha \vee \gamma$	założenie
3.	$\alpha \rightarrow \beta$	OK: 1
4.	$\gamma \rightarrow \delta$	OK: 1
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	β	RO: 3,1.1.
1.3.	$\beta \vee \delta$	DA: 1.2.
2.1.	γ	założenie dodatkowe
2.2.	δ	RO: 4,2.1.
2.3.	$\beta \vee \delta$	DA: 2.2.
5.	$\beta \vee \delta$	1.1.$\Rightarrow$1.3.; 2.1.$\Rightarrow$2.3.; 2.

Ćwiczenie 7

Podaj dowody następujących tez:

- (a) $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$
- (b) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\neg\gamma \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)))$
- (c) $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \rightarrow (\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))$

Wykorzystywana literatura

- Borkowski, L. 1991. *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe KUL, Lublin.
- Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary formal logic.* McGraw-Hill Book Company.
- Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* PWN, Warszawa.
- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej.* Białystok.
- Słupecki, J., Borkowski, L. 1962. *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Słupecki, J., Hałkowska, K, Piróg-Rzepecka, K. 1999. *Logika matematyczna.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Surma, S. 1967. Twierdzenia o dedukcji niewprost. *Studia Logica* **XX**, 151–166.

Rozwiązanie ćwiczenia 1 (a)

(a) $((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma))$

Trzeba pokazać,że z założeń $(\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)$ i α otrzymać można $\beta \wedge \gamma$.

1.	$(\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)$	założenie
2.	α	założenie
3.	$\alpha \to \beta$	OK: 1
4.	$\alpha \to \gamma$	OK: 1
5.	β	RO: 3,2
6.	γ	RO: 4,2
7.	$\beta \wedge \gamma$	DK: 5,6.

Rozwiązanie ćwiczenia 1 (b)

(b) $(\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$

Trzeba pokazać,że z założeń $\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$ i $\alpha \wedge \beta$ otrzymać można γ.

1.	$\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	$\alpha \wedge \beta$	założenie
3.	$\beta \rightarrow \gamma$	OK: 1
4.	β	OK: 2
5.	γ	RO: 3,4.

Rozwiązanie ćwiczenia 1 (c)

(c) $(\alpha \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \wedge \gamma))$

Trzeba pokazać,że z założeń $\alpha \wedge (\beta \to \gamma)$ i β otrzymać można $\alpha \wedge \gamma$.

1.	$\alpha \wedge (\beta \to \gamma)$	założenie
2.	β	założenie
3.	α	OK: 1
4.	$\beta \to \gamma$	OK: 1
5.	γ	RO: 4,2
6.	$\alpha \wedge \gamma$	DK: 3,5.

Rozwiązanie ćwiczenia 2 (a)

(a) $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$

Trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \to (\alpha \to \beta)$ i α można otrzymać β.

1.	$\alpha \to (\alpha \to \beta)$	założenie
2.	α	założenie
3.	$\alpha \to \beta$	RO: 1,2
4.	β	RO: 3,2.

Rozwiązanie ćwiczenia 2 (b)

(b) $\alpha \rightarrow \alpha$

Trzeba pokazać, że ta implikacja jest tezą systemu założeniowego KRZ.

1.	$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	ćwiczenie 1 (a) β/α
2.	$\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	prawo poprzednika β/α
3.	$\alpha \rightarrow \alpha$	RO: 2,1.

Przypomnijmy, że prawo poprzednika (prawo symplifikacji) jest tezą systemu założeniowego KRZ. Prostszy dowód:

1.	α	założenie
2.	$\neg\alpha$	z.d.n.

Rozwiązanie ćwiczenia 2 (c)

(c) $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

Trzeba pokazać, że z założeń $\neg\alpha$ i α można otrzymać β.

1.	$\neg\alpha$	założenie
2.	α	założenie
3.	$(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	prawo kontrapozycji
4.	$\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	prawo poprzednika
5.	$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	RSyl: 2,1.

Przypomnijmy, że prawo kontrapozycji jest tezą systemu założeniowego KRZ, a RSyl jest w tym systemie regułą wyprowadzalną. Prostszy dowód: β wyprowadzamy z α oraz $\neg\neg\alpha$ na mocy RDS.

Rozwiązanie ćwiczenia 2 (d)

(d) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

Trzeba pokazać, że ta implikacja jest tezą systemu założeniowego KRZ.

1.	$\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \alpha))$	ćwiczenie 2 (c)
2.	$(\neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$	prawo kontrapozycji
3.	$\neg\neg\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$	RSyl: 1,2
4.	$(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$	RKom: 3
5.	$\alpha \rightarrow \alpha$	ćwiczenie 2 (b)
6.	$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$	RO: 4,5.

Przypomnijmy, że RSyl jest regułą wyprowadzalną w systemie założeniowym KRZ. Prostszy dowód: α wyprowadzamy z $\neg\neg\alpha$ na mocy reguły ON.

Rozwiązanie ćwiczenia 2 (e)

(e) $(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$

Trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \to \neg\beta$ i β można otrzymać $\beta \to \neg\alpha$.

1.	$\alpha \to \neg\beta$	założenie
2.	β	założenie
3.	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	ćwiczenie 2 (d)
4.	$\neg\neg\alpha \to \beta$	RSyl: 3,1
5.	$\beta \to \neg\alpha$	RK: 4.

Rozwiązanie ćwiczenia 3 (a)

(a) $(\neg\alpha \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)$

1.	$\neg\alpha \vee \beta$	założenie
2.	α	założenie
3.	$\neg\beta$	z.d.n.
4.	$\neg\alpha$	OA: 1,3.

Zauważ, że ten dowód jest prostszy od podanego poprzednio dowodu tej tezy.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 2 i 4.

Rozwiązanie ćwiczenia 3 (b)

(b) $((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to ((\alpha \wedge \neg\gamma) \to \neg\beta)$

Przeprowadzimy dowód nie wprost:

1.	$(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$	założenie
2.	$\alpha \wedge \neg\gamma$	założenie
3.	$\neg\neg\beta$	z.d.n.
4.	β	ON: 3
5.	α	OK: 2
6.	$\neg\gamma$	OK: 2
7.	$\alpha \wedge \beta$	DK: 5,4
8.	γ	RO: 1,7.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 8.

Rozwiązanie ćwiczenia 3 (c)

(c) $((\alpha \wedge \neg\gamma) \to \neg\beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$

Przeprowadzimy dowód nie wprost:

1.	$(\alpha \wedge \neg\gamma) \to \neg\beta)$	założenie
2.	$\alpha \wedge \beta$	założenie
3.	$\neg\gamma$	z.d.n.
4.	α	OK: 2
5.	$\alpha \wedge \neg\gamma$	DK: 4,3
6.	β	OK: 2
7.	$\neg\beta$	RO: 1,5.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 7.

Rozwiązanie ćwiczenia 4 (a)

(a) $(\alpha \to \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)$

Pokażemy, że z założeń $\alpha \to \neg\beta$ i $\neg\neg(\alpha \wedge \beta)$ można otrzymać parę formuł wzajem sprzecznych.

1.	$\alpha \to \neg\beta$	założenie
2.	$\neg\neg(\alpha \wedge \beta)$	z.d.n.
3.	$\alpha \wedge \beta$	ON: 2
4.	α	OK: 3
5.	β	OK: 3
6.	$\neg\beta$	RO: 1,4.

Rozwiązanie ćwiczenia 4 (b)

(b) $(\alpha \vee \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma))$

Pokażemy, że z założeń $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \gamma$, $\beta \rightarrow \gamma$ i $\neg\gamma$ można otrzymać parę formuł wzajem sprzecznych.

1.	$\alpha \vee \beta$	założenie
2.	$\alpha \rightarrow \gamma$	założenie
3.	$\beta \rightarrow \gamma$	założenie
4.	$\neg\gamma$	z.d.n.
5.	$(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\neg\gamma \rightarrow \neg\alpha)$	prawo transpozycji prostej
6.	$\neg\gamma \rightarrow \neg\alpha$	RO: 5,2
7.	$\neg\alpha$	RO: 6,4
8.	β	OA: 1,7
9.	γ	RO: 3,8.

Rozwiązanie ćwiczenia 4 (c)

(c) $\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\alpha$

Pokażemy, że z założeń $\neg(\alpha \to \beta)$ i $\neg\neg\alpha$ można otrzymać parę formuł wzajem sprzecznych.

1.	$\neg(\alpha \to \beta)$	założenie
2.	$\neg\neg\alpha$	z.d.n.
3.	α	ON: 2
4.	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	prawo poprzedzania (poprzednika, symplifikacji)
5.	$\beta \to \alpha$	RO: 4,3.

Rozwiązanie ćwiczenia 4 (d)

(d) $(\alpha \to (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma))$

Trzeba pokazać, że z założenia $\alpha \to (\beta \wedge \gamma)$ można otrzymać $(\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)$.

1.	$\alpha \to (\beta \wedge \gamma)$	założenie
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	$\beta \wedge \gamma$	RO: 1,1.1.
1.3.	β	OK: 1.2.
2.	$\alpha \to \beta$	1.1.⇒1.3.
2.1.	α	założenie dodatkowe
2.2.	$\beta \wedge \gamma$	RO: 1,2.1.
2.3.	γ	OK: 2.2.
3.	$\alpha \to \gamma$	2.1.⇒2.3.
4.	$(\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)$	DK: 2,3.

Rozwiązanie ćwiczenia 5 (a)

(a) $\frac{\alpha\to\beta,\neg\alpha\to\beta}{\beta}$

Trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \to \beta$, $\neg\alpha \to \beta$ i $\neg\beta$ można otrzymać parę formuł wzajem sprzecznych.

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\neg\alpha \to \beta$	założenie
3.	$\neg\beta$	z.d.n.
4.	$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	prawo transpozycji prostej
5.	$\neg\beta \to \neg\alpha$	RO: 4,1
6.	$\neg\alpha$	RO: 5,3
7.	β	RO: 2,6.

Rozwiązanie ćwiczenia 5 (b)

(b) $\frac{\neg\alpha\rightarrow\beta}{\alpha\vee\beta}$

Udowodnimy najpierw tezy pomocnicze:
(5 (b) 1) $\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\alpha$ oraz (5 (b) 2) $\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\beta$.

Dowód (5 (b) 1) jest dowodem nie wprost:

1.	$\neg(\alpha \vee \beta)$	założenie
2.	$\neg\neg\alpha$	z.d.n.
3.	α	ON: 2
4.	$\alpha \vee \beta$	DA: 3.

Dowód tezy (5 (b) 2) przebiega analogicznie.

Rozwiązanie ćwiczenia 5 (b)

(b) $\frac{\neg\alpha\rightarrow\beta}{\alpha\vee\beta}$

Trzeba pokazać, że z założeń $\neg\alpha \rightarrow \beta$ i $\neg(\alpha \vee \beta)$ można otrzymać parę formuł wzajem sprzecznych.

1.	$\neg\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\neg(\alpha \vee \beta)$	z.d.n.
3.	$\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\alpha$	teza (5 (b) 1)
4.	$\neg\alpha$	RO: 3,2
5.	β	RO: 1,4
6.	$\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\beta$	teza (5 (b) 2)
7.	$\neg\beta$	RO: 6,2.

Rozwiązanie ćwiczenia 5 (c)

(c) $\frac{(\alpha\to\beta)\to\gamma}{\neg\alpha\to\gamma}$

Trzeba pokazać, że z założeń $(\alpha \to \beta) \to \gamma$, $\neg\alpha$ i $\neg\gamma$ można otrzymać parę formuł wzajem sprzecznych.

1.	$(\alpha \to \beta) \to \gamma$	założenie
2.	$\neg\alpha$	założenie
3.	$\neg\gamma$	z.d.n.
4.	$\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$	prawo Dunsa Scotusa
5.	$\alpha \to \beta$	RO: 4,2
6.	γ	RO: 1,5.

Rozwiązanie ćwiczenia 5 (d)

(d) $\frac{(\alpha\vee\beta)\to\gamma}{(\alpha\to\gamma)\wedge(\beta\to\gamma)}$

Trzeba pokazać, że z założenia $(\alpha \vee \beta) \to \gamma$ można otrzymać $(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)$.

1.	$(\alpha \vee \beta) \to \gamma$	założenie
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 1.1.
1.3.	γ	RO: 1,1.2.
2.	$\alpha \to \gamma$	1.1.⇒1.3.
2.1.	β	założenie dodatkowe
2.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 2.1.
2.3.	γ	RO: 1,2.2.
3.	$\beta \to \gamma$	2.1.⇒2.3.
4.	$(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)$	DK: 2,3.

Rozwiązanie ćwiczenia 6 (a)

(a) $\{\alpha \to \beta,\ \ \beta \to \neg\gamma,\ \ \delta \to \gamma,\ \ \alpha \wedge \delta\}$ jest sprzeczny:

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\beta \to \neg\gamma$	założenie
3.	$\delta \to \gamma$	założenie
4.	$\alpha \wedge \delta$	założenie
5.	α	OK: 4
6.	δ	OK: 4
7.	β	RO: 1,5
8.	$\neg\gamma$	RO: 2,7
9.	γ	RO: 3,6.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 8 i 9.

Rozwiązanie ćwiczenia 6 (b)

(b) $\{\alpha \rightarrow \beta, \ \gamma \rightarrow \delta, \ \neg\beta \vee \gamma, \ \alpha \wedge \neg\delta\}$ jest sprzeczny:

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\gamma \rightarrow \delta$	założenie
3.	$\neg\beta \vee \gamma$	założenie
4.	$\alpha \wedge \neg\delta$	założenie
5.	α	OK: 4
6.	$\neg\delta$	OK: 4
7.	β	RO: 1,5
8.	$\neg\gamma$	MT: 2,6
9.	$\neg\beta$	OA: 3,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 7 i 9.

Rozwiązanie ćwiczenia 6 (c)

(c) $\{\alpha \to \neg\beta, \ \ \beta \to \neg\gamma, \ \ \delta \to \beta, \ \ \delta, \ \ \alpha \vee \gamma\}$ jest sprzeczny:

1.	$\alpha \to \neg\beta$	założenie
2.	$\beta \to \neg\gamma$	założenie
3.	$\delta \to \beta$	założenie
4.	δ	założenie
5.	$\alpha \vee \gamma$	założenie
6.	β	RO: 3,4
7.	$\neg\gamma$	RO: 2,6
8.	α	OA: 5,7
9.	$\neg\beta$	RO: 1,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 9.

Rozwiązanie ćwiczenia 6 (d)

(d) $\{\alpha \vee (\gamma \wedge \neg\beta), \quad \beta \vee \neg\gamma, \quad \neg\alpha\}$ jest sprzeczny:

1.	$\alpha \vee (\gamma \wedge \neg\beta)$	założenie
2.	$\beta \vee \neg\gamma$	założenie
3.	$\neg\alpha$	założenie
4.	$\gamma \wedge \neg\beta$	OA: 1,3
5.	$\neg\beta$	OK: 4
6.	γ	OK: 4
7.	$\neg\gamma$	OA: 2,5.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 7.

Rozwiązanie ćwiczenia 7 (a)

(a) $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$

1.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	założenie
2.	α	założenie
3.	β	założenie
4.	$\alpha \to (\neg\alpha \to \gamma)$	wersja prawa Dunsa Scotusa
5.	$\beta \to (\neg\beta \to \gamma)$	wersja prawa Dunsa Scotusa
6.	$\neg\alpha \to \gamma$	RO: 4,2
7.	$\neg\beta \to \gamma$	RO: 5,3
1.1.	$\neg\alpha$	założenie dodatkowe
1.2.	γ	RO: 6,1.1.
2.1.	$\neg\beta$	założenie dodatkowe
2.2.	γ	RO: 7,2.1.
8.	γ	1.1.$\Rightarrow$1.2.; 2.1.$\Rightarrow$2.2.; 1.

Rozwiązanie ćwiczenia 7 (b)

(b) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\neg\gamma \to \neg(\alpha \vee \beta)))$

1.	$\alpha \to \gamma$	założenie
2.	$\beta \to \gamma$	założenie
3.	$\neg\gamma$	założenie
4.	$\neg\neg(\alpha \vee \beta)$	z.d.n.
5.	$\alpha \vee \beta$	ON: 4
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	γ	RO: 1,1.1.
1.3.	$\perp$	3,1.2.
2.1.	β	założenie dodatkowe
2.2.	γ	RO: 2,2.1.
2.3.	$\perp$	3,2.2.
6.	$\perp$	1.1.$\Rightarrow$1.3.; 2.1.$\Rightarrow$2.3.; 5.

Rozwiązanie ćwiczenia 7 (c)

(c) $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \rightarrow (\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))$

1.	$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	założenie
2.	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	założenie
3.	$\neg(\alpha \wedge \gamma)$	z.d.n.
4.	α	OK: 1
5.	$\beta \vee \gamma$	OK: 1
1.1.	β	założenie dodatkowe
1.2.	$\alpha \wedge \beta$	DK: 4,1.1.
1.3.	$\perp$	2,1.2.
2.1.	γ	założenie dodatkowe
2.2.	$\alpha \wedge \gamma$	DK: 4,2.1.
2.3.	$\perp$	3,2.2.
6.	$\perp$	1.1.$\Rightarrow$1.3.; 2.1.$\Rightarrow$2.3.; 5.

Tezy i reguły wyprowadzone w tej prezentacji

Nie było naszym zamiarem podawanie jakiegoś uporządkowanego ciągu tez i reguł wtórnych systemu założeniowego KRZ. Poszczególne wyprowadzenia miały ilustrować kolejne techniki dowodowe.

Wszystkie udowodnione w wykładach 8–9 tezy oraz wyprowadzone reguły wtórne wyliczono w Dodatku 5., dostępnym na:

www.logic.amu.edu.pl

Zachęcam do samodzielnego udowodnienia dalszych tez, np. tych wyliczonych pod koniec wykładów 5–7.

Koniec

To, co najważniejsze w tym wykładzie:

- KRZ można ugruntować na metodzie czysto założeniowej, z użyciem jedynie reguł wnioskowania, bez przyjmowania żadnych aksjomatów;
- metoda założeniowa jest trafna i pełna: tezy systemu założeniowego to dokładnie wszystkie tautologie KRZ;
- planowanie dowodów w metodzie założeniowej jest proste i naturalne.

Inną ważną metodą dowodową jest rachunek sekwentów Gentzena.

Na następnym wykładzie poznamy operację konsekwencji w KRZ opartą na metodzie rezolucyjnej.