

# Logika Matematyczna (8-9)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM  
[www.logic.amu.edu.pl](http://www.logic.amu.edu.pl)

[pogon@amu.edu.pl](mailto:pogon@amu.edu.pl)

System założeniowy KRZ

# Plan na dziś

Następna z omawianych operacji konsekwencji w KRZ jest oparta na **metodzie założeniowej**. Omówimy jeden z systemów założeniowych KRZ, wywodzący się z prac **Stanisława Jaśkowskiego**.

- Reguły pierwotne systemu.
- Konsekwencja założeniowa.
- Przykłady dowodów tez.
- Reguły wtórne.
- System założeniowy KRZ a system aksjomatyczny KRZ.
- Dowody nie wprost.
- Dodatkowe założenia dowodu. Dowody rozgałęzione.

**Uwaga.** Konsekwencja założeniowa jest bliższa (niż aksjomatyczna) **praktyki** dowodzenia twierdzeń w naukach dedukcyjnych.

# Reguły pierwotne

Pracujemy w języku KRZ zdefiniowanym w wykładzie 2.  
Konsekwencja **założeniowa** oparta jest jedynie na **regułach**.  
Nie wykorzystujemy żadnych aksjomatów.  
Można na różne sposoby dobrać **reguły pierwotne**.  
Podamy zestaw pochodzący od **Stanisława Jaśkowskiego**.

- (RO) **Reguła odrywania**. Jeśli do dowodu należy implikacja oraz jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji.  
W zapisie symbolicznym:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta}.$$

## Reguły pierwotne

- (DK) **Reguła dołączania koniunkcji**. Do dowodu wolno dołączyć koniunkcję, o ile oba jej człony należą do dowodu.

$$\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}.$$

- (OK) **Reguła opuszczania koniunkcji**. Jeśli do dowodu należy koniunkcja, to wolno dołączyć do dowodu każdy z jej członów.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}.$$

## Reguły pierwotne

- (DP) **Reguła dodawania poprzedników**. Jeśli do dowodu należą dwie implikacje o takim samym następniku, to do dowodu wolno dołączyć implikację o tymże następniku i o poprzedniku będącym alternatywą poprzedników tych implikacji.

$$\frac{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \gamma}{(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma}.$$

- (DA) **Reguła dołączania alternatywy**. Jeśli do dowodu należy jakaś formuła, to do dowodu wolno dołączyć alternatywę, której jednym z członów jest ta formuła.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}.$$

## Reguły pierwotne

- (DR) **Reguła dołączania równoważności**. Do dowodu wolno dołączyć równoważność, o ile należy do dowodu implikacja, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikacja odwrotna.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha}{\alpha \equiv \beta}.$$

- (OR) **Reguła opuszczania równoważności**. Jeśli do dowodu należy równoważność, to wolno dołączyć do dowodu zarówno implikację, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikację odwrotną.

$$\frac{\alpha \equiv \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{\alpha \equiv \beta}{\beta \rightarrow \alpha}.$$

## Reguły pierwotne

- (RK) **Reguła kontrapozycji**. Jeśli do dowodu należy implikacja, której poprzednikiem jest negacja jednej formuły, a następnikiem negacja drugiej formuły, to do dowodu można dołączyć implikację, której poprzednikiem jest druga formuła, a następnikiem pierwsza formuła.

$$\frac{\neg\alpha \rightarrow \neg\beta}{\beta \rightarrow \alpha}.$$

Oznaczmy przez *jas* zbiór powyższych reguł. Każda reguła ze zbioru *jas* jest **nieskończonym** zbiorem sekwentów, o budowie składniowej podanej w symbolicznym zapisie tej reguły.

# Reguły pierwotne

- **Uwaga 1.** Zauważ, że w podanych wyżej regułach nie ma ani słowa o **prawdzie**. Wykonaj jednak **ćwiczenie**: sprawdź, że wszystkie reguły ze zbioru *jas* są niezawodne.
- **Uwaga 2.** Zauważ, że reguły są dwóch rodzajów: dotyczą wprowadzania lub opuszczania stałych logicznych. W szczególności, (RO) jest regułą opuszczania implikacji. Dualna do niej reguła wprowadzania implikacji zostanie omówiona później. Podobnie dla reguł wprowadzających negację.
- **Uwaga 3.** Twoim zalecanym zbiorem zadań z logiki są *Ćwiczenia z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz, gdzie używa się innego zestawu reguł pierwotnych. **Nie lękaj się!** Za chwilę pokażemy, że z podanych reguł pierwotnych wyprowadzić można te reguły jako wtórne.



# Konsekwencja założeńiowa

Określamy zbiór  $T_{jas}$  **tez** systemu dedukcji naturalnej (systemu założeńiowego) KRZ opartego na regułach *jas*:

- $\alpha \in T_{jas}^0$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna  $n \geq 0$  oraz formuły  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma$  takie, że:
  - $\alpha$  jest identyczna z  $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \dots (\beta_n \rightarrow \gamma) \dots))$
  - $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\})$ .
- $\alpha \in T_{jas}^{k+1}$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne  $n \geq 0$ ,  $i < n$  oraz formuły  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  takie, że:
  - $\alpha$  jest identyczna z  $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \dots (\beta_i \rightarrow \gamma) \dots))$
  - $\beta_{i+1}, \beta_{i+2}, \dots, \beta_n \in T_{jas}^k$
  - $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\})$ .

$\alpha \in T_{jas}$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $m$  taka, że  $\alpha \in T_{jas}^m$ .

# Konsekwencja założeniowa

Jeśli  $\alpha \in T_{jas}^m$ , to mówimy, że  $\alpha$  jest **tezą stopnia  $m$**  systemu założeniowego KRZ. Jeśli  $\alpha$  jest tezą stopnia  $m$  i  $m \leq n$ , to  $\alpha$  jest też oczywiście tezą stopnia  $n$ . Jeśli  $\alpha \in T_{jas}$ , to mówimy, że  $\alpha$  jest **tezą** systemu założeniowego KRZ.

**Notacja.** Aby pokazać, że  $\alpha \in T_{jas}$ , gdzie  $\alpha$  jest identyczna z  $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \dots (\beta_n \rightarrow \gamma) \dots))$  budujemy **dowód założeniowy**, w którym  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  są **założeniami** i który zostaje uznany za **zakończony**, gdy  $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\})$ , tj. gdy otrzymamy formułę  $\gamma$  stosując (do założeń i pośrednich kroków dowodowych) reguły ze zbioru  $jas$ . Numerujemy poszczególne wiersze dowodu i opatrujemy je komentarzem wskazującym na ich uzasadnienie, tak samo jak czyniliśmy to w aksjomatycznym ujęciu KRZ.

**Uwaga.** W dowodach tez stopnia  $n$  można wykorzystywać wszystkie tezy stopnia  $m$ , dla  $m \leq n$ .

# Konsekwencja założeniowa

Zdefiniujemy relację  $\vdash_{jas}$  **konsekwencji założeniowej**.

Niech  $X = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  będzie skończonym zbiorem formuł, a  $\alpha$  formułą języka KRZ. Zachodzi  $X \vdash_{jas} \alpha$  wtedy i tylko wtedy, gdy tezą systemu założeniowego jest formuła:

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \dots (\beta_n \rightarrow \alpha) \dots)).$$

Tak więc,  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \vdash_{jas} \alpha$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód założeniowy  $\alpha$  w oparciu o założenia  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  oraz reguły ze zbioru *jas*.

## Przykłady dowodów tez

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

(prawo komutacji)

Należy dowieść, że z założeń  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  można otrzymać  $\gamma$ , używając reguł ze zbioru *jas*.

1.  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$  założenie
2.  $\beta$  założenie
3.  $\alpha$  założenie
4.  $\beta \rightarrow \gamma$  RO: 1,3
5.  $\gamma$  RO: 4,2.

Zauważmy, że ten dowód jest taki sam, jak dowód prawa komutacji w aksjomatycznym ujęciu KRZ, przy wykorzystaniu Twierdzenia o Dedukcji Wprost.

## Przykłady dowodów tez

$$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$$

prawo eksportacji

Trzeba pokazać, że z założeń  $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  można otrzymać  $\gamma$ .

1.  $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$  założenie
2.  $\alpha$  założenie
3.  $\beta$  założenie
4.  $\alpha \wedge \beta$  DK: 2,3
5.  $\gamma$  RO: 1,4.

Zauważ, że **planowanie** dowodu jest w tej metodzie prostsze, niż w metodzie aksjomatycznej.

## Przykłady dowodów tez

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$$

prawo importacji

Trzeba pokazać, że z założeń  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ ,  $\alpha \wedge \beta$  można otrzymać  $\gamma$ .

- |    |   |           |
|----|---|-----------|
| 1. | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ | założenie |
| 2. | $\alpha \wedge \beta$                           | założenie |
| 3. | $\alpha$  | OK: 2     |
| 4. | $\beta$   | OK: 2     |
| 5. | $\beta \rightarrow \gamma$                      | RO: 1,3   |
| 6. | $\gamma$  | RO: 5,4.  |

Zwróć uwagę na różne możliwości kolejności wykonania poszczególnych kroków dowodu.

## Przykłady dowodów tez

$$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \equiv (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$$

prawo eksportacji i importacji

1.  $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$     prawo eksportacji
2.  $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$     prawo importacji
3.  $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \equiv (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$     DR: 1,2.

To prosty przykład wykorzystania tez już udowodnionych w dowodach dalszych tez.

## Przykłady dowodów tez

$$((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

Trzeba pokazać, że z założeń  $(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$  oraz  $\alpha$  można otrzymać  $\gamma$ .

1.  $(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$       założenie
2.  $\alpha$                               założenie
3.  $\alpha \vee \beta$                       DA: 2
4.  $\gamma$                                 RO: 1,2.



# Prawo sylogizmu hipotetycznego

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$       prawo sylogizmu hipotetycznego

Trzeba pokazać, że z założeń:  $\alpha \rightarrow \beta$ ,  $\beta \rightarrow \gamma$  oraz  $\alpha$  można otrzymać  $\gamma$ .

1.  $\alpha \rightarrow \beta$       założenie
2.  $\beta \rightarrow \gamma$       założenie
3.  $\alpha$               założenie
4.  $\beta$               RO: 1,3
5.  $\gamma$               RO: 2,3.

## Prawo Fregego

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

prawo Fregego

Trzeba pokazać, że z założeń:  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ ,  $\alpha \rightarrow \beta$  oraz  $\alpha$  można otrzymać  $\gamma$ .

1.  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$  założenie
2.  $\alpha \rightarrow \beta$  założenie
3.  $\alpha$  założenie
4.  $\beta$  RO: 2,3
5.  $\beta \rightarrow \gamma$  RO: 1,3
6.  $\gamma$  RO: 5,4.

## Ćwiczenie 1

Pokaż, że są tezami systemu założeniowego KRZ:

- (a)  $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$
- (b)  $(\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$
- (c)  $(\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \gamma)).$

**Uwaga.** Rozwiązania wszystkich ćwiczeń — na końcu tej prezentacji.

## Reguły wtórne

Zgodnie z ogólną definicją podaną na poprzednim wykładzie, reguła  $R$  jest regułą wyprowadzalną (wtórną) systemu założeniowego KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego sekwentu  $(X, \alpha) \in R$  mamy:

$$\alpha \in C_{jas}(X).$$

Jeśli  $R$  jest regułą wtórną systemu założeniowego KRZ, to można jej używać w dowodach dalszych tez tego systemu oraz w dowodach wyprowadzalności kolejnych reguł wtórnych. Zauważmy, że jeśli pokazaliśmy, iż tezą systemu założeniowego jest implikacja o postaci  $\Psi \rightarrow \Phi$ , to reguła:

$$\frac{\Psi}{\Phi}$$

jest regułą wtórną.

## Reguła sylogizmu hipotetycznego

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

Trzeba pokazać, że z założeń:  $\alpha \rightarrow \beta$  i  $\beta \rightarrow \gamma$  można otrzymać  $\alpha \rightarrow \gamma$ .

- |    |   |                                |
|----|---|--------------------------------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$  | założenie                      |
| 2. | $\beta \rightarrow \gamma$  | założenie                      |
| 3. | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ | prawo sylogizmu hipotetycznego |
| 4. | $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$  | RO: 3,1                        |
| 5. | $\alpha \rightarrow \gamma$   | RO: 4,2.                       |

## Reguła Fregego

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \quad \alpha \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

Trzeba pokazać, że z założeń:  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$  oraz  $\alpha \rightarrow \beta$  można otrzymać  $\alpha \rightarrow \gamma$ .

- |    |  |               |
|----|--|---------------|
| 1. | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$  | założenie     |
| 2. | $\alpha \rightarrow \beta$   | założenie     |
| 3. | $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ | prawo Fregego |
| 4. | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$   | RO: 3,1       |
| 5. | $\alpha \rightarrow \gamma$  | RO: 4,2.      |

## Reguły wtórne

Aby pokazać, że reguła  $\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}$  wewnętrznego poprzedzania (RWP) jest wyprowadzalna w systemie założeniowym KRZ, trzeba pokazać, że z założeń  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$  i  $\beta$  otrzymać można  $\alpha \rightarrow \gamma$ :

- |    |   |                 |
|----|---|-----------------|
| 1. | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$   | założenie       |
| 2. | $\beta$   | założenie       |
| 3. | $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ | prawo komutacji |
| 4. | $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$   | RO: 3,1         |
| 5. | $\alpha \rightarrow \gamma$   | RO: 4,2.        |

# System założeniowy KRZ a system aksjomatyczny KRZ

**Twierdzenie 8.1.** (O równoważności systemu założeniowego KRZ z systemem aksjomatycznym KRZ.)

- (1) Każda teza aksjomatycznego systemu KRZ jest tezą założeniowego systemu KRZ.
- (2) Każda teza założeniowego systemu KRZ jest tezą aksjomatycznego systemu KRZ.
- (3) Każda reguła wyprowadzalna w aksjomatycznym systemie KRZ jest też wyprowadzalna w założeniowym systemie KRZ.
- (4) Każda reguła wyprowadzalna w założeniowym systemie KRZ jest też wyprowadzalna w aksjomatycznym systemie KRZ.

Na mocy tego twierdzenia systemy: aksjomatyczny oraz założeniowy KRZ są równoważne. [Dowód 8.1.: w Dodatku 4.](#)



## System założeniowy KRZ a system aksjomatyczny KRZ

Z twierdzenia 8.1 oraz twierdzeń 5.6. i 5.9. otrzymujemy natychmiast:

**Twierdzenie 8.2.** (O trafności systemu założeniowego.)

Każda teza systemu założeniowego KRZ jest tautologią KRZ.

**Twierdzenie 8.3.** (O pełności systemu założeniowego.)

Każda tautologia KRZ jest tezą systemu założeniowego KRZ.

Inną konsekwencją twierdzenia 8.1 oraz twierdzeń 5.6. i 5.9. jest tożsamość zakresowa relacji  $\vdash_{jas}$  oraz  $\models_{KRZ}$ :

$$\vdash_{jas} = \models_{KRZ} .$$

# Dowody nie wprost

## Twierdzenie 8.4. Twierdzenie o Dedukcji Nie Wprost.

Jeśli  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{jas} \{\gamma, \neg\gamma\}$ , to  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \vdash_{jas} \alpha$ .

Twierdzenie 8.4. pozwala zatem na stosowanie w systemie założeniowym **dowodów nie wprost**: aby pokazać, że  $\alpha$  ma dowód z założeń  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  wystarczy pokazać, że z założeń  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \neg\alpha\}$  można wyprowadzić w systemie założeniowym KRZ parę formuł wzajemnie sprzecznych.

Nadto, z twierdzenia tego możemy korzystać również przy dowodzeniu wyprowadzalności reguł wtórnych systemu założeniowego KRZ.

Dowód twierdzenia 8.4.: w Dodatku 4.

# Dowody nie wprost: przykłady

W dowodzie nie wprost formuły  $\alpha$  z założeń  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  dopisujemy do założeń  $\neg\alpha$ , czyli **założenie dowodu nie wprost** (w skrócie: z.d.n.) i staramy się wyprowadzić z tych założeń parę formuł wzajem sprzecznych. Gdy to się powiedzie,  $\alpha$  jest konsekwencją  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  w systemie założeniowym KRZ.

Dla przykładu, dowód nie wprost formuły  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$  jest następujący:

1.  $\neg\neg\alpha$  założenie
2.  $\neg\alpha$  z.d.n.

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę **opuszczania negacji ON**:

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}.$$

## Dowody nie wprost: przykłady

$$\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$$

1.  $\alpha$  założenie
2.  $\neg\neg\alpha$  z.d.n.
3.  $\neg\alpha$  ON: 2.

Z tez  $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$  i  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$  otrzymujemy, na mocy reguły DR tezę:  
 $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$ .

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę **dołączania negacji DN**:

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}.$$

## Dowody nie wprost: przykłady

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$$

prawo transpozycji prostej

1.  $\alpha \rightarrow \beta$       założenie
2.  $\neg\beta$               założenie
3.  $\neg\neg\alpha$             z.d.n.
4.  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$     prawo podwójnej negacji
5.  $\alpha$                 RO: 3,4
6.  $\beta$                  RO: 1,5.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 2 i 6.

## Dowody nie wprost: przykłady

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash_{\text{jas}} \neg\alpha$$

1.  $\alpha \rightarrow \beta$  założenie
2.  $\neg\beta$  założenie
3.  $\neg\neg\alpha$  z.d.n.
4.  $\alpha$  ON: 3
5.  $\beta$  RO: 1,4.

Pokazaliśmy więc, że regułą wtórną jest reguła *modus tollendo tollens* MT:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}.$$

## Dowody nie wprost: przykłady

Aby pokazać, że reguła **poprzedzania**  $\frac{\alpha}{\beta \rightarrow \alpha}$  jest regułą wtórną, dowodzimy najpierw, że tezą systemu założeniowego jest prawo poprzedzania  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ . W tym celu wystarczy pokazać, że z założeń  $\alpha$ ,  $\beta$  oraz  $\neg\alpha$  otrzymujemy sprzeczność (dowód niżej, po lewej):

1.	$\alpha$	założenie	1.	$\alpha$	założenie
2.	$\beta$	założenie	2.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$	prawo poprzedzania
3.	$\neg\alpha$	z.d.n.	3.	$\beta \rightarrow \alpha$	RO: 2,1.

Dowód, że  $\frac{\alpha}{\beta \rightarrow \alpha}$  jest regułą wtórną polega na pokazaniu, że z założenia  $\alpha$  możemy otrzymać  $\beta \rightarrow \alpha$ : dowód wyżej, po prawej.

## Ćwiczenie 2

Pokaż, w podanej niżej kolejności, że są tezami systemu założeniowego KRZ:

- (a)  $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (b)  $\alpha \rightarrow \alpha$
- (c)  $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (d)  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
- (e)  $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$ .



# Dowody nie wprost: wyprowadzenie reguły OA

Pokażemy, że wyprowadzalna w systemie założeniowym KRZ jest reguła OA **opuszczania alternatywy**:

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta}.$$

Trzeba pokazać, że z założeń  $\alpha \vee \beta$  oraz  $\neg\alpha$ , a także z założenia dowodu nie wprost  $\neg\beta$  otrzymać można parę formuł wzajem sprzecznych.

W dowodzie tym skorzystamy z tez udowodnionych w ćwiczeniu 2:

- (a)  $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (b)  $\alpha \rightarrow \alpha$
- (c)  $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (d)  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
- (e)  $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha).$

## Dowody nie wprost: wyprowadzenie reguły OA

1.	$\alpha \vee \beta$	założenie
2.	$\neg\alpha$	założenie
3.	$\neg\beta$	z.d.n.
4.	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	DK: 2,3
5.	$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$	na mocy reg. pierw. (OK)
6.	$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\beta$	na mocy reg. pierw. (OK)
7.	$\alpha \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	5, ćwiczenie 2 (e)
8.	$\beta \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	6, ćwiczenie 2 (e)
9.	$(7) \rightarrow ((8) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)))$	DP: 7,8
10.	$(8) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta))$	RO: 9,7
11.	$(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	RO: 10,8
12.	$\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	RO: 11,1.

Możemy zatem korzystać w dowodach z reguły OA **opuszczania alternatywy**:

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta}.$$

## Ćwiczenie 3

Pokaż, że są tezami systemu założeniowego KRZ:

- (a)  $(\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (b)  $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\beta)$
- (c)  $((\alpha \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$

**Uwaga.** Pamiętaj, że w dowodach możesz wykorzystywać zarówno wcześniej udowodnione tezy, jak i reguły, o których wcześniej pokazałaś, że są wyprowadzalne. Możesz też korzystać z dowodów nie wprost.

# Dodatkowe założenia dowodu

Kolejna wielce użyteczna technika dowodowa w systemie założeniowym KRZ polega na korzystaniu z tzw. **dodatkowych założeń dowodu**. Jest to procedura następująca:

- Czynimy w dowodzie **dodatkowe założenie**  $\alpha$ .
- Jeśli z założenia  $\alpha$  (oraz wcześniejszych kroków dowodu) możemy wyprowadzić formułę  $\beta$ , to do dowodu wolno włączyć formułę  $\alpha \rightarrow \beta$ .
- Z kroków wyprowadzenia  $\beta$  z  $\alpha$  **nie wolno** korzystać **poza tym wyprowadzeniem**. Zwykle stosuje się stosowną numerację: jeśli dodatkowe założenie  $\alpha$  ma numer  $n.1.$ , a wyprowadzona z niego formuła ma numer  $n.m.$ , to z kroków o numerach od  $n.1.$  do  $n.m.$  **nie** korzystamy w dowodzie głównym.

Prawomocność tego postępowania wynika z definicji dowodów założeniowych. Każdy dowód z dodatkowymi założeniami można zastąpić dowodem bez nich.

## Dodatkowe założenia dowodu: przykład 1

$$((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \wedge \delta)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \delta))$$

- |      |  |                         |
|------|--|-------------------------|
| 1.   | $(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \wedge \delta)$             | założenie               |
| 1.1. | $\alpha$   | założenie dodatkowe     |
| 1.2. | $\alpha \vee \beta$  | DA: 1.1.                |
| 1.3. | $\gamma \wedge \delta$   | RO: 1,1.2.              |
| 1.4. | $\gamma$   | OK: 1.3.                |
| 2.   | $\alpha \rightarrow \gamma$  | 1.1. $\Rightarrow$ 1.4. |
| 2.1. | $\beta$  | założenie dodatkowe     |
| 2.2. | $\alpha \vee \beta$  | DA: 2.1.                |
| 2.3. | $\gamma \wedge \delta$   | RO: 1,2.2.              |
| 2.4. | $\delta$   | OK: 2.3.                |
| 3.   | $\beta \rightarrow \delta$   | 2.1. $\Rightarrow$ 2.4. |
| 4.   | $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)$ | DK: 2,3.                |

## Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

Udowodnimy najpierw tezę pomocniczą (\*):

$$(*) \quad (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg(\beta \vee \delta) \rightarrow \neg\alpha)$$

1.  $\alpha \rightarrow \beta$       założenie
2.  $\neg(\beta \vee \delta)$     założenie
3.  $\neg\neg\alpha$           z.d.n.
4.  $\alpha$                 ON: 3
5.  $\beta$                 RO: 1,4
6.  $\beta \vee \delta$          DA: 5.

W wierszach 2 i 6 mamy parę formuł wzajem sprzecznych, a więc dowód nie wprost tezy (\*) został zakończony.

## Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow (\neg(\beta \vee \delta) \rightarrow \neg(\alpha \vee \gamma)))$$

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\gamma \rightarrow \delta$	założenie
3.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
4.	$\neg\neg(\alpha \vee \gamma)$	z.d.n.
5.	$\alpha \vee \gamma$	ON: 4
6.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg(\beta \vee \delta) \rightarrow \neg\alpha)$	teza (*)
7.	$\neg(\beta \vee \delta) \rightarrow \neg\alpha$	RO: 6,1
8.	$\neg\alpha$	RO: 7,3
9.	$\gamma$	OA: 5,8
10.	$\delta$	RO: 2,9
11.	$\beta \vee \delta$	DA: 10.

Dowód powyższy można zastąpić dowodem z dodatkowymi założeniami, bez wykorzystania tezy (\*):

## Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

- |      |  |                         |
|------|--|-------------------------|
| 1.   | $\alpha \rightarrow \beta$               | założenie               |
| 2.   | $\gamma \rightarrow \delta$              | założenie               |
| 3.   | $\neg(\beta \vee \delta)$                | założenie               |
| 4.   | $\neg\neg(\alpha \vee \gamma)$           | z.d.n.                  |
| 5.   | $\alpha \vee \gamma$                     | ON: 4                   |
| 1.1. | $\alpha$                                 | założenie dodatkowe     |
| 1.2. | $\beta$                                  | RO: 1,1.1.              |
| 1.3. | $\beta \vee \delta$                      | DA: 1.2.                |
| 6.   | $\alpha \rightarrow (\beta \vee \delta)$ | 1.1. $\Rightarrow$ 1.4. |
| 7.   | $\neg\alpha$                             | MT: 6,3                 |
| 8.   | $\gamma$                                 | OA: 5,7                 |
| 9.   | $\delta$                                 | RO: 2,8                 |
| 10.  | $\beta \vee \delta$                      | DA: 9.                  |

W kroku 7 korzystamy z wtórnej reguły *modus tollendo tollens* MT:  $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}$ .



## Dowody dalszych tez

$$(\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \gamma))$$

Trzeba pokazać, że z założeń  $\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)$ ,  $\alpha$  oraz  $\neg\beta$  można otrzymać  $\gamma$ .

1.  $\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)$  założenie
2.  $\alpha$  założenie
3.  $\neg\beta$  założenie
4.  $\beta \vee \gamma$  RO: 1,2
5.  $\gamma$  OA: 4,3.

## Dowody dalszych tez

Pokażemy, że wyprowadzalna jest reguła  $\frac{\neg\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta}{\alpha}$ .

1.  $\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$  założenie
2.  $\beta$  założenie
3.  $\neg\neg\beta$  DN: 2
4.  $\neg\neg\alpha$  MT: 1,3
5.  $\alpha$  ON: 4.

W podobny sposób można pokazać wyprowadzalność np. reguł:  $\frac{\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta}{\neg\alpha}$  i  $\frac{\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta}{\alpha}$ .

## Dowody dalszych tez

Pokażemy, że wyprowadzalna jest reguła  $\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}$ .

1.  $\alpha$       założenie
2.  $\neg\alpha$      założenie
3.  $\alpha \vee \beta$    DA: 1
4.  $\beta$         OA: 3,2.

Regułę  $\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}$  nazywamy regułą **Dunsa Scotusa** (RDS).

## Dowody dalszych tez

$$\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$$

1.  $\alpha$  założenie
2.  $\neg\alpha$  założenie
3.  $\beta$  RDS: 1,2.

## Dowody dalszych tez

$$\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta.$$

- |      |  |                         |
|------|--|-------------------------|
| 1.   | $\neg(\alpha \vee \beta)$                | założenie               |
| 1.1. | $\alpha$                                 | założenie dodatkowe     |
| 1.2. | $\alpha \vee \beta$                      | DA: 1.1.                |
| 2.   | $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$ | 1.1. $\Rightarrow$ 1.2. |
| 3.   | $\neg\alpha$                             | MT: 2,1                 |
| 2.1. | $\beta$                                  | założenie dodatkowe     |
| 2.2. | $\alpha \vee \beta$                      | DA: 2.1.                |
| 4.   | $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$  | 2.1. $\Rightarrow$ 2.2. |
| 5.   | $\neg\beta$                              | MT: 4,1                 |
| 5.   | $\neg\alpha \wedge \neg\beta$            | DK: 3,5.                |

## Dowody dalszych tez

$$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta).$$

1.  $\neg\alpha \wedge \neg\beta$       założenie
2.  $\neg\neg(\alpha \vee \beta)$     z.d.n.
3.  $\alpha \vee \beta$             ON: 2
4.  $\neg\alpha$                 OK: 1
5.  $\neg\beta$                 OK: 1
6.  $\beta$                   OA: 3,4.

Dwie udowodnione przed chwilą tezy implikacyjne dają łącznie prawo negowania alternatywy  $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ . Regułą wtórną jest zatem reguła negowania alternatywy NA:  $\frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$ .

## Dowody dalszych tez

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta.$$

- |    |                                       |           |
|----|---------------------------------------|-----------|
| 1. | $\neg(\alpha \wedge \beta)$           | założenie |
| 2. | $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$     | z.d.n.    |
| 3. | $\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta$ | NA: 2     |
| 4. | $\neg\neg\alpha$                      | OK: 3     |
| 5. | $\neg\neg\beta$                       | OK: 3     |
| 6. | $\alpha$                              | ON: 4     |
| 7. | $\beta$                               | ON: 5     |
| 8. | $\alpha \wedge \beta$                 | DK: 6,7.  |

## Dowody dalszych tez

$$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta).$$

1.  $\neg\alpha \vee \neg\beta$       założenie
2.  $\neg\neg(\alpha \wedge \beta)$     z.d.n.
3.  $\alpha \wedge \beta$             ON: 2
4.  $\alpha$                     OK: 3
5.  $\beta$                      OK: 3
6.  $\neg\neg\alpha$             DN: 4
7.  $\neg\beta$                  OA: 1,6.

Dwie udowodnione przed chwilą tezy implikacyjne dają łącznie prawo negowania koniunkcji  $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ . Regułą wtórną jest zatem reguła negowania koniunkcji NK:  $\frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}$ .



# Dowody dalszych tez

Prawa negowania koniunkcji i negowania alternatywy nazywane są też prawami **De Morgana**.

Zauważmy, że reguły NA oraz NK są „symetryczne”, w tym sensie, że wyprowadzalne są także reguły:

$$\frac{\neg\alpha \vee \neg\beta}{\neg(\alpha \wedge \beta)} \quad \frac{\neg\alpha \wedge \neg\beta}{\neg(\alpha \vee \beta)}$$

Każda teza równoważnościowa założeniowego systemu KRZ pozwala na wprowadzenie reguły wtórnej „symetrycznej” we wspomnianym wyżej sensie.

## Dowody dalszych tez

$$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

1.  $\neg\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$  z.d.n.
2.  $\alpha \wedge \neg\alpha$  ON: 1
3.  $\alpha$  OK: 2
4.  $\neg\alpha$  OK: 2.

**Uwaga.** W przypadkach poszukiwania dowodów formuł, gdzie nie można poczynić żadnych założeń, zaczynamy dowód od założenia nie wprost.

## Dowody dalszych tez

 $\alpha \vee \neg\alpha$ 

1.  $\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$  z.d.n.
2.  $\neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha$  NA: 1
3.  $\neg\alpha$  OK: 2
4.  $\neg\neg\alpha$  OK: 2.

## Dowody dalszych tez

$$\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \neg\beta).$$

- |      |                                  |                         |
|------|----------------------------------|-------------------------|
| 1.   | $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ | założenie               |
| 2.   | $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$  | z.d.n.                  |
| 3.   | $\neg\alpha \vee \neg\neg\beta$  | NK: 2                   |
| 1.1. | $\alpha$                         | założenie dodatkowe     |
| 1.2. | $\neg\neg\alpha$                 | DN: 1.1.                |
| 1.3. | $\neg\neg\beta$                  | OA: 3,1.2.              |
| 1.4. | $\beta$                          | ON: 1.3.                |
| 4.   | $\alpha \rightarrow \beta$       | 1.1. $\Rightarrow$ 1.4. |

## Dowody dalszych tez

$$(\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta).$$

1.  $\alpha \wedge \neg\beta$
2.  $\neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$  z.d.n.
3.  $\alpha \rightarrow \beta$  ON: 2
4.  $\alpha$  OK: 1
5.  $\neg\beta$  OK: 1
6.  $\beta$  RO: 3,4.

Dwie udowodnione przed chwilą implikacje dają łącznie jedno z praw negowania implikacji:  $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta)$ .

## Dowody dalszych tez

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\alpha \vee \beta).$$

- |    |                                   |           |
|----|-----------------------------------|-----------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$        | założenie |
| 2. | $\neg(\neg\alpha \vee \beta)$     | z.d.n.    |
| 3. | $\neg\neg\alpha \wedge \neg\beta$ | NA: 2     |
| 4. | $\neg\neg\alpha$                  | OK: 3     |
| 5. | $\neg\beta$                       | OK: 3     |
| 6. | $\alpha$                          | ON: 4     |
| 7. | $\beta$                           | RO: 1,6.  |

## Dowody dalszych tez

$$(\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta).$$

- |    |  |                            |
|----|--|----------------------------|
| 1. | $\neg\alpha \vee \beta$  | założenie                  |
| 2. | $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$                                       | z.d.n.                     |
| 3. | $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \neg\beta)$ | prawo negowania implikacji |
| 4. | $\alpha \wedge \neg\beta$  | RO: 3,2                    |
| 5. | $\neg\beta$  | OK: 4                      |
| 6. | $\neg\alpha$   | OA: 1,5                    |
| 7. | $\alpha$   | OK: 4.                     |

Dwie udowodnione przed chwilą implikacje dają łącznie równoważność:

$(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$ , pozwalającą zastępować implikację przez alternatywę i negację (oraz na odwrót). **Co zarzucisz powyższemu dowodowi? Zob. ćw. 3 (a).**

## Dowody dalszych tez

$$\{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma, \neg\gamma \wedge \neg\delta, (\alpha \rightarrow \beta) \vee \vartheta, \vartheta \rightarrow (\gamma \vee \beta)\} \vdash_{jas} \beta.$$

- |    |   |           |
|----|---|-----------|
| 1. | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$ | założenie |
| 2. | $\neg\gamma \wedge \neg\delta$                  | założenie |
| 3. | $(\alpha \rightarrow \beta) \vee \vartheta$     | założenie |
| 4. | $\vartheta \rightarrow (\gamma \vee \beta)$     | założenie |
| 5. | $\neg\gamma$                                    | OK: 2     |
| 6. | $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$                | MT: 1,5   |
| 7. | $\vartheta$                                     | OA: 3,6   |
| 8. | $\gamma \vee \beta$                             | RO: 4,7   |
| 9. | $\beta$   | OA: 8,5.  |



## Dowody dalszych tez

$$\{(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma, \neg\delta, (\gamma \vee \delta) \rightarrow \vartheta, \delta \vee \alpha\} \vdash_{jas} \vartheta.$$

- |    |  |           |
|----|--|-----------|
| 1. | $(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$     | założenie |
| 2. | $\neg\delta$                                 | założenie |
| 3. | $(\gamma \vee \delta) \rightarrow \vartheta$ | założenie |
| 4. | $\delta \vee \alpha$                         | założenie |
| 5. | $\alpha$                                     | OA: 4,2   |
| 6. | $\alpha \vee \beta$                          | DA: 5     |
| 7. | $\gamma$                                     | RO: 1,6   |
| 8. | $\gamma \vee \delta$                         | DA: 7     |
| 9. | $\vartheta$                                  | RO: 3,8.  |

## Dygresja: Teodycea i kule w płocie

Pokażemy, że następujące wnioskowanie jest dedukcyjne:

*Bóg jest miłosierny, o ile jest doskonały. Jeśli Bóg jest doskonały i stworzył Świat, to w Świecie nie ma Zła. Jednak w Świecie jest Zło. Ponadto, twierdzi się, że Bóg stworzył Świat. Zatem Bóg nie jest doskonały lub nie jest miłosierny.*

- $\alpha$  — Bóg jest doskonały.
- $\beta$  — Bóg jest miłosierny.
- $\gamma$  — Bóg stworzył Świat.
- $\delta$  — W Świecie jest Zło.

## Dygresja: Teodycea i kule w płocie

$$\{\alpha \rightarrow \beta, (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \neg\delta, \gamma, \delta\} \vdash_{jas} \neg\alpha \vee \neg\beta.$$

- |     |   |           |
|-----|---|-----------|
| 1.  | $\alpha \rightarrow \beta$                      | założenie |
| 2.  | $(\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \neg\delta$ | założenie |
| 3.  | $\delta$  | założenie |
| 4.  | $\gamma$  | założenie |
| 5.  | $\neg\neg\delta$                                | DN: 3     |
| 6.  | $\neg(\alpha \wedge \gamma)$                    | MT: 2,5   |
| 7.  | $\neg\alpha \vee \neg\gamma$                    | NK: 6     |
| 8.  | $\neg\neg\gamma$                                | DN: 4     |
| 9.  | $\neg\alpha$                                    | OA: 7,8   |
| 10. | $\neg\alpha \vee \neg\beta$                     | DA: 9.    |

Zauważmy, że w dowodzie nie korzystano z pierwszego założenia.

## Ćwiczenie 4

Pokaż, że są tezami systemu założeniowego KRZ:

- (a)  $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$
- (b)  $(\alpha \vee \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma))$
- (c)  $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha$
- (d)  $(\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma))$ .

**Uwaga.** Pamiętaj, że w dowodach możesz wykorzystywać zarówno wcześniej udowodnione tezy, jak i reguły, o których wcześniej pokazałaś, że są wyprowadzalne. Możesz też korzystać z dowodów nie wprost oraz z dowodów z dodatkowymi założeniami.

## Ćwiczenie 5

Pokaż, że są regułami wyprowadzalnymi w systemie założeniowym KRZ:

- (a)  $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$
- (b)  $\frac{\neg \alpha \rightarrow \beta}{\alpha \vee \beta}$
- (c)  $\frac{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma}{\neg \alpha \rightarrow \gamma}$
- (d)  $\frac{(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma}{(\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)}$ .

**Uwaga.** Pamiętaj, że w dowodach możesz wykorzystywać zarówno wcześniej udowodnione tezy, jak i reguły, o których wcześniej pokazałaś, że są wyprowadzalne. Możesz też korzystać z dowodów nie wprost oraz z dowodów z dodatkowymi założeniami.

# Sprzeczne zbiory formuł

Zbiór formuł  $X$  jest (syntaktycznie) **sprzeczny**, jeśli istnieje formuła  $\alpha$  taka, że  $X \vdash_{j\alpha s} \alpha$  oraz  $X \vdash_{j\alpha s} \neg\alpha$ . Jeśli  $X$  nie jest sprzeczny, to mówimy, że  $X$  jest (syntaktycznie) **niesprzeczny**.

**Twierdzenie 8.5.** (Twierdzenie o zwartości.)

Zbiór  $X$  formuł języka KRZ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy pewien jego skończony podzbiór jest sprzeczny.

Wykazanie syntaktycznej sprzeczności zbioru formuł  $X$  polega na zbudowaniu dowodu założeniowego, którego przesłankami są elementy jakiegoś **skończonego** podzbioru zbioru  $X$  i w którego wierszach znajduje się para formuł wzajem sprzecznych.

Z Twierdzenia o Pełności KRZ wynika, że pojęcia: syntaktycznej i semantycznej niesprzeczności są tożsame zakresowo.

## Sprzeczne zbiory formuł: przykłady

Pokażemy, że  $\{\alpha \vee \neg\beta, \gamma \rightarrow \beta, \neg(\delta \wedge \neg\gamma), \delta \wedge \neg\alpha\}$  jest sprzecznym zbiorem formuł.

- |    |                                  |           |
|----|----------------------------------|-----------|
| 1. | $\alpha \vee \neg\beta$          | założenie |
| 2. | $\gamma \rightarrow \beta$       | założenie |
| 3. | $\neg(\delta \wedge \neg\gamma)$ | założenie |
| 4. | $\delta \wedge \neg\alpha$       | założenie |
| 5. | $\delta$                         | OK: 4     |
| 6. | $\neg\alpha$                     | OK: 4     |
| 7. | $\neg\beta$                      | OA: 1,6   |
| 8. | $\neg\gamma$                     | MT: 2,7   |
| 9. | $\delta \wedge \neg\gamma$       | DK: 5,8.  |

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 3 i 9.

## Dygresja: ekonomia telewizyjna.

Zwróćmy uwagę, że wykazaliśmy przed chwilą dedukcyjną sprzeczność telewizyjnej „analizy ekonomicznej”:

*Jest kapitalizm lub nie ma bezrobocia. Jeśli jest recesja, to jest też bezrobocie. Nie ma jednocześnie: biedy oraz braku recesji. Jest bieda, a nie ma kapitalizmu.*

- $\alpha$  — Jest kapitalizm.
- $\beta$  — Jest bezrobocie.
- $\gamma$  — Jest recesja.
- $\delta$  — Jest bieda.



## Sprzeczne zbiory formuł: przykłady

Pokażemy, że  $\{\neg\gamma \wedge \beta, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \vee \neg\delta)), \alpha, \vartheta \wedge (\beta \rightarrow \gamma)\}$  jest sprzeczny.

1.	$\neg\gamma \wedge \beta$	założenie
2.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \vee \neg\delta))$	założenie
3.	$\alpha$	założenie
4.	$\vartheta \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
5.	$\neg\gamma$	OK: 1
6.	$\beta$	OK: 1
7.	$\beta \rightarrow (\gamma \vee \neg\delta)$	RO: 2,3
8.	$\gamma \vee \neg\delta$	RO: 7,6
9.	$\neg\delta$	OA: 8,5
10.	$\beta \rightarrow \gamma$	OK: 4
11.	$\gamma$	RO: 10,6.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 5 i 11.

## Ćwiczenie 6

Pokaż, że są sprzecznymi zbiorami formuł:

- (a)  $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \neg\gamma, \delta \rightarrow \gamma, \alpha \wedge \delta\}$
- (b)  $\{\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \neg\beta \vee \gamma, \alpha \wedge \neg\delta\}$
- (c)  $\{\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta \rightarrow \neg\gamma, \delta \rightarrow \beta, \delta, \alpha \vee \gamma\}$
- (d)  $\{\alpha \vee (\gamma \wedge \neg\beta), \beta \vee \neg\gamma, \neg\alpha\}$ .

# Dowody rozgałęzione

Czasami dla skrótu wygodnie jest stosować dowody rozgałęzione.

Dowód założeniowy wprost formuły  $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \dots (\beta_n \rightarrow \gamma) \dots))$  uważamy za zakończony, jeśli:

- (a) istnieje dowód  $\gamma$  z **każdego** z dodatkowych założeń  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$
- (b) alternatywa  $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_m$  jest jednym z wierszy dowodu formuły  $\gamma$ .

**Uzasadnienie.** Jeśli (a), to do dowodu  $\gamma$  można dołączyć wszystkie implikacje  $\gamma_i \rightarrow \gamma$ , dla  $1 \leq i \leq m$ . Na mocy reguły dodawania poprzedników, można też dołączyć formułę:  $(\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_m) \rightarrow \gamma$ . Na mocy (b) i reguły odrywania otrzymujemy  $\gamma$ .

# Dowody rozgałęzione

Dowód założeniowy nie wprost formuły  $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \dots (\beta_n \rightarrow \gamma) \dots))$  uważamy za zakończony, jeśli:

- (a) uzyskujemy sprzeczność na podstawie **każdego** z dodatkowych założeń  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$
- (b) alternatywa  $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_m$  jest jednym z wierszy dowodu formuły  $\gamma$ .

**Uzasadnienie.** Jeśli (a), to na mocy MT możemy dołączyć do dowodu wszystkie wyrażenia  $\neg\gamma_i$ , dla  $1 \leq i \leq m$ . Skoro (b), to z reguły OA zastosowanej do  $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_m$  oraz wszystkich  $\neg\gamma_i$  dla  $i \neq j$  otrzymujemy  $\gamma_j$ , dla  $1 \leq j \leq m$ . Mamy zatem w dowodzie parę  $\neg\gamma_i, \gamma_i$  dla  $1 \leq i \leq m$ , co kończy dowód nie wprost formuły  $\gamma$ .

Będziemy używać symbolu  $\perp$  na oznaczenie sprzeczności.

## Dowody rozgałęzione: przykłady

$$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$$

- |      |                                     |   |
|------|-------------------------------------|---|
| 1.   | $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$ | założenie                                       |
| 1.1. | $\alpha$                            | założenie dodatkowe                             |
| 1.2. | $\alpha \vee \beta$                 | DA: 1.1.  |
| 2.1. | $\beta \wedge \gamma$               | założenie dodatkowe                             |
| 2.2. | $\beta$                             | OK: 2.1.  |
| 2.3. | $\alpha \vee \beta$                 | DA: 2.2.  |
| 3.   | $\alpha \vee \beta$                 | 1.1. $\Rightarrow$ 1.2, 2.1. $\Rightarrow$ 2.3. |

## Dowody rozgałęzienie: przykłady

$$(((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \delta)) \wedge \neg(\beta \vee \delta)) \rightarrow \neg(\alpha \vee \gamma)$$

1.	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \delta)$	założenie
2.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
3.	$\neg\neg(\alpha \vee \gamma)$	z.d.n.
4.	$\alpha \rightarrow \beta$	OK: 1
5.	$\gamma \rightarrow \delta$	OK: 1
6.	$\alpha \vee \gamma$	ON: 3
1.1.	$\alpha$	założenie dodatkowe
1.2.	$\beta$	RO: 4,1.1.
1.3.	$\beta \vee \delta$	DA: 1.2.
2.1.	$\gamma$	założenie dodatkowe
2.2.	$\delta$	RO: 5,2.1.
2.3.	$\beta \vee \delta$	DA: 2.2.
7.	$\perp$	1.1. $\Rightarrow\perp_{1.3.,2}$ ; 2.1. $\Rightarrow\perp_{2.3.,2}$ ; 3.

**Uwaga.** Powyższy dowód jest w istocie skrótowym zapisem dowodu nie wprost: 

1.	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \delta)$	założenie
2.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
3.	$\neg\neg(\alpha \vee \gamma)$	z.d.n.
4.	$\alpha \rightarrow \beta$	OK: 1
5.	$\gamma \rightarrow \delta$	OK: 1
6.	$\alpha \vee \gamma$	ON: 3
1.1.	$\alpha$	założenie dodatkowe
1.2.	$\beta$	RO: 4,1.1.
1.3.	$\beta \vee \delta$	DA: 1.2.
7.	$\alpha \rightarrow (\beta \vee \delta)$	1.1. $\Rightarrow$ 1.3.
8.	$\neg\alpha$	MT: 7,2
2.1.	$\gamma$	założenie dodatkowe
2.2.	$\delta$	RO: 5,2.1.
2.3.	$\beta \vee \delta$	DA: 2.2.
9.	$\gamma \rightarrow (\beta \vee \delta)$	2.1. $\Rightarrow$ 2.3.
10.	$\neg\gamma$	MT: 9,2
11.	$\neg\alpha \wedge \neg\gamma$	DK: 8,10
12.	$\neg(\alpha \vee \gamma)$	prawo De Morgana: 11.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 12.

## Dowody rozgałęzione: przykłady

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow (\beta \vee \gamma))$$

1.  $\alpha \rightarrow \beta$  założenie
2.  $\alpha \vee \gamma$  założenie
  - 1.1.  $\alpha$  założenie dodatkowe
  - 1.2.  $\beta$  RO: 1,1.1.
  - 1.3.  $\beta \vee \gamma$  DA: 1.2.
- 2.1.  $\gamma$  założenie dodatkowe
- 2.2.  $\beta \vee \gamma$  DA: 2.1.
3.  $\beta \vee \gamma$  1.1. $\Rightarrow$ 1.3.; 2.1. $\Rightarrow$ 2.2.; 2.



## Dowody rozgałęzione: przykłady

$$((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \delta)) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow (\beta \vee \delta))$$

- |      |   |  |
|------|---|--|
| 1.   | $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \delta)$ | założenie  |
| 2.   | $\alpha \vee \gamma$  | założenie  |
| 3.   | $\alpha \rightarrow \beta$                                      | OK: 1  |
| 4.   | $\gamma \rightarrow \delta$                                     | OK: 1  |
| 1.1. | $\alpha$  | założenie dodatkowe                                  |
| 1.2. | $\beta$   | RO: 3,1.1.   |
| 1.3. | $\beta \vee \delta$   | DA: 1.2.   |
| 2.1. | $\gamma$  | założenie dodatkowe                                  |
| 2.2. | $\delta$  | RO: 4,2.1.   |
| 2.3. | $\beta \vee \delta$   | DA: 2.2.   |
| 5.   | $\beta \vee \delta$   | 1.1. $\Rightarrow$ 1.3.; 2.1. $\Rightarrow$ 2.3.; 2. |

## Ćwiczenie 7

Podaj dowody następujących tez:

- (a)  $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$
- (b)  $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\neg\gamma \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)))$
- (c)  $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \rightarrow (\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))$

# Wykorzystywana literatura

- Borkowski, L. 1991. *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*. Wydawnictwo Naukowe KUL, Lublin.
- Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary formal logic*. McGraw-Hill Book Company.
- Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii*. PWN, Warszawa.
- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej*. Białystok.
- Słupecki, J., Borkowski, L. 1962. *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Słupecki, J., Hałkowska, K., Piróg-Rzepecka, K. 1999. *Logika matematyczna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Surma, S. 1967. Twierdzenia o dedukcji niewprost. *Studia Logica* **XX**, 151–166.

## Rozwiązanie ćwiczenia 1 (a)

$$(a) ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$$

Trzeba pokazać, że z założeń  $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma)$  i  $\alpha$  otrzymać można  $\beta \wedge \gamma$ .

- |    |   |           |
|----|---|-----------|
| 1. | $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma)$ | założenie |
| 2. | $\alpha$  | założenie |
| 3. | $\alpha \rightarrow \beta$                                      | OK: 1     |
| 4. | $\alpha \rightarrow \gamma$                                     | OK: 1     |
| 5. | $\beta$   | RO: 3,2   |
| 6. | $\gamma$  | RO: 4,2   |
| 7. | $\beta \wedge \gamma$   | DK: 5,6.  |

## Rozwiązanie ćwiczenia 1 (b)

$$(b) (\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$$

Trzeba pokazać, że z założeń  $\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$  i  $\alpha \wedge \beta$  otrzymać można  $\gamma$ .

1.  $\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$  założenie
2.  $\alpha \wedge \beta$  założenie
3.  $\beta \rightarrow \gamma$  OK: 1
4.  $\beta$  OK: 2
5.  $\gamma$  RO: 3,4.

## Rozwiązanie ćwiczenia 1 (c)

$$(c) (\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))$$

Trzeba pokazać, że z założeń  $\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$  i  $\beta$  otrzymać można  $\alpha \wedge \gamma$ .

- |    |  |           |
|----|--|-----------|
| 1. | $\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$ | założenie |
| 2. | $\beta$                                    | założenie |
| 3. | $\alpha$                                   | OK: 1     |
| 4. | $\beta \rightarrow \gamma$                 | OK: 1     |
| 5. | $\gamma$                                   | RO: 4,2   |
| 6. | $\alpha \wedge \gamma$                     | DK: 3,5.  |

## Rozwiązanie ćwiczenia 2 (a)

$$(a) (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

Trzeba pokazać, że z założeń  $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$  i  $\alpha$  można otrzymać  $\beta$ .

1.  $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$  założenie
2.  $\alpha$  założenie
3.  $\alpha \rightarrow \beta$  RO: 1,2
4.  $\beta$  RO: 3,2.

## Rozwiązanie ćwiczenia 2 (b)

(b)  $\alpha \rightarrow \alpha$ 

Trzeba pokazać, że ta implikacja jest tezą systemu założeniowego KRZ.

1.  $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$     ćwiczenie 1 (a)  $\beta/\alpha$
2.  $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$     prawo poprzednika  $\beta/\alpha$
3.  $\alpha \rightarrow \alpha$     RO: 2,1.

Przypomnijmy, że prawo poprzednika (prawo symplifikacji) jest tezą systemu założeniowego KRZ. Prostszy dowód:

1.  $\alpha$     założenie
2.  $\neg\alpha$     z.d.n.



## Rozwiązanie ćwiczenia 2 (c)

$$(c) \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

Trzeba pokazać, że z założeń  $\neg\alpha$  i  $\alpha$  można otrzymać  $\beta$ .

- |    |   |                     |
|----|---|---------------------|
| 1. | $\neg\alpha$  | założenie           |
| 2. | $\alpha$  | założenie           |
| 3. | $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ | prawo kontrapozycji |
| 4. | $\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$                 | prawo poprzednika   |
| 5. | $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$                         | RSyl: 2,1.          |

Przypomnijmy, że prawo kontrapozycji jest tezą systemu założeniowego KRZ, a RSyl jest w tym systemie regułą wyprowadzalną. Prostszy dowód:  $\beta$  wyprowadzamy z  $\alpha$  oraz  $\neg\neg\alpha$  na mocy RDS.

## Rozwiązanie ćwiczenia 2 (d)

(d)  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ 

Trzeba pokazać, że ta implikacja jest tezą systemu założeniowego KRZ.

- |    |   |                     |
|----|---|---------------------|
| 1. | $\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \alpha))$                                   | ćwiczenie 2 (c)     |
| 2. | $(\neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ | prawo kontrapozycji |
| 3. | $\neg\neg\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$   | RSyl: 1,2           |
| 4. | $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$   | RKom: 3             |
| 5. | $\alpha \rightarrow \alpha$   | ćwiczenie 2 (b)     |
| 6. | $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$   | RO: 4,5.            |

Przypomnijmy, że RSyl jest regułą wyprowadzalną w systemie założeniowym KRZ. Prostszy dowód:  $\alpha$  wyprowadzamy z  $\neg\neg\alpha$  na mocy reguły ON.

## Rozwiązanie ćwiczenia 2 (e)

$$(e) (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$$

Trzeba pokazać, że z założeń  $\alpha \rightarrow \neg\beta$  i  $\beta$  można otrzymać  $\beta \rightarrow \neg\alpha$ .

1.  $\alpha \rightarrow \neg\beta$       założenie
2.  $\beta$                       założenie
3.  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$       ćwiczenie 2 (d)
4.  $\neg\neg\alpha \rightarrow \beta$       RSyl: 3,1
5.  $\beta \rightarrow \neg\alpha$       RK: 4.

## Rozwiązanie ćwiczenia 3 (a)

$$(a) (\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

1.  $\neg\alpha \vee \beta$  założenie
2.  $\alpha$  założenie
3.  $\neg\beta$  z.d.n.
4.  $\neg\alpha$  OA: 1,3.

Zauważ, że ten dowód jest prostszy od podanego poprzednio dowodu tej tezy.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 2 i 4.

## Rozwiązanie ćwiczenia 3 (b)

$$(b) ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\beta)$$

Przeprowadzimy dowód nie wprost:

- |    |  |           |
|----|--|-----------|
| 1. | $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$ | założenie |
| 2. | $\alpha \wedge \neg\gamma$                 | założenie |
| 3. | $\neg\neg\beta$                            | z.d.n.    |
| 4. | $\beta$                                    | ON: 3     |
| 5. | $\alpha$                                   | OK: 2     |
| 6. | $\neg\gamma$                               | OK: 2     |
| 7. | $\alpha \wedge \beta$                      | DK: 5,4   |
| 8. | $\gamma$                                   | RO: 1,7.  |

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 8.

## Rozwiązanie ćwiczenia 3 (c)

$$(c) ((\alpha \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$$

Przeprowadzimy dowód nie wprost:

- |    |  |           |
|----|--|-----------|
| 1. | $(\alpha \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg\beta$ | założenie |
| 2. | $\alpha \wedge \beta$                              | założenie |
| 3. | $\neg\gamma$                                       | z.d.n.    |
| 4. | $\alpha$   | OK: 2     |
| 5. | $\alpha \wedge \neg\gamma$                         | DK: 4,3   |
| 6. | $\beta$  | OK: 2     |
| 7. | $\neg\beta$  | RO: 1,5.  |

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 7.

## Rozwiązanie ćwiczenia 4 (a)

$$(a) (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$$

Pokażemy, że z założeń  $\alpha \rightarrow \neg\beta$  i  $\neg\neg(\alpha \wedge \beta)$  można otrzymać parę formuł wzajem sprzecznych.

- |    |                                 |           |
|----|---------------------------------|-----------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \neg\beta$  | założenie |
| 2. | $\neg\neg(\alpha \wedge \beta)$ | z.d.n.    |
| 3. | $\alpha \wedge \beta$           | ON: 2     |
| 4. | $\alpha$                        | OK: 3     |
| 5. | $\beta$                         | OK: 3     |
| 6. | $\neg\beta$                     | RO: 1,4.  |

## Rozwiązanie ćwiczenia 4 (b)

$$(b) (\alpha \vee \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma))$$

Pokażemy, że z założeń  $\alpha \vee \beta$ ,  $\alpha \rightarrow \gamma$ ,  $\beta \rightarrow \gamma$  i  $\neg\gamma$  można otrzymać parę formuł wzajem sprzecznych.

- |    |   |                            |
|----|---|----------------------------|
| 1. | $\alpha \vee \beta$   | założenie                  |
| 2. | $\alpha \rightarrow \gamma$   | założenie                  |
| 3. | $\beta \rightarrow \gamma$  | założenie                  |
| 4. | $\neg\gamma$  | z.d.n.                     |
| 5. | $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\neg\gamma \rightarrow \neg\alpha)$ | prawo transpozycji prostej |
| 6. | $\neg\gamma \rightarrow \neg\alpha$   | RO: 5,2                    |
| 7. | $\neg\alpha$  | RO: 6,4                    |
| 8. | $\beta$   | OA: 1,7                    |
| 9. | $\gamma$  | RO: 3,8.                   |



## Rozwiązanie ćwiczenia 4 (c)

$$(c) \neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha$$

Pokażemy, że z założeń  $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$  i  $\neg\neg\alpha$  można otrzymać parę formuł wzajem sprzecznych.

- |    |   |   |
|----|---|---|
| 1. | $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$                | założenie                                       |
| 2. | $\neg\neg\alpha$                                | z.d.n.  |
| 3. | $\alpha$  | ON: 2   |
| 4. | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ | prawo poprzedzania (poprzednika, symplifikacji) |
| 5. | $\beta \rightarrow \alpha$                      | RO: 4,3.  |

## Rozwiązanie ćwiczenia 4 (d)

$$(d) (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma))$$

Trzeba pokazać, że z założenia  $\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)$  można otrzymać  $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma)$ .

- |      |   |                         |
|------|---|-------------------------|
| 1.   | $\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)$                      | założenie               |
| 1.1. | $\alpha$  | założenie dodatkowe     |
| 1.2. | $\beta \wedge \gamma$   | RO: 1,1.1.              |
| 1.3. | $\beta$   | OK: 1.2.                |
| 2.   | $\alpha \rightarrow \beta$                                      | 1.1. $\Rightarrow$ 1.3. |
| 2.1. | $\alpha$  | założenie dodatkowe     |
| 2.2. | $\beta \wedge \gamma$   | RO: 1,2.1.              |
| 2.3. | $\gamma$  | OK: 2.2.                |
| 3.   | $\alpha \rightarrow \gamma$                                     | 2.1. $\Rightarrow$ 2.3. |
| 4.   | $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma)$ | DK: 2,3.                |

## Rozwiązanie ćwiczenia 5 (a)

(a) 
$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Trzeba pokazać, że z założeń  $\alpha \rightarrow \beta$ ,  $\neg \alpha \rightarrow \beta$  i  $\neg \beta$  można otrzymać parę formuł wzajem sprzecznych.

- |    |   |                            |
|----|---|----------------------------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$  | założenie                  |
| 2. | $\neg \alpha \rightarrow \beta$   | założenie                  |
| 3. | $\neg \beta$  | z.d.n.                     |
| 4. | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$ | prawo transpozycji prostej |
| 5. | $\neg \beta \rightarrow \neg \alpha$  | RO: 4,1                    |
| 6. | $\neg \alpha$   | RO: 5,3                    |
| 7. | $\beta$   | RO: 2,6.                   |

## Rozwiązanie ćwiczenia 5 (b)

$$(b) \frac{\neg\alpha \rightarrow \beta}{\alpha \vee \beta}$$

Udowodnimy najpierw tezy pomocnicze:

(5 (b) 1)  $\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\alpha$  oraz (5 (b) 2)  $\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\beta$ .

Dowód (5 (b) 1) jest dowodem nie wprost:

1.  $\neg(\alpha \vee \beta)$  założenie
2.  $\neg\neg\alpha$  z.d.n.
3.  $\alpha$  ON: 2
4.  $\alpha \vee \beta$  DA: 3.

Dowód tezy (5 (b) 2) przebiega analogicznie.

## Rozwiązanie ćwiczenia 5 (b)

(b) 
$$\frac{\neg\alpha \rightarrow \beta}{\alpha \vee \beta}$$

Trzeba pokazać, że z założeń  $\neg\alpha \rightarrow \beta$  i  $\neg(\alpha \vee \beta)$  można otrzymać parę formuł wzajem sprzecznych.

- |    |  |                |
|----|--|----------------|
| 1. | $\neg\alpha \rightarrow \beta$                   | założenie      |
| 2. | $\neg(\alpha \vee \beta)$                        | z.d.n.         |
| 3. | $\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\alpha$ | teza (5 (b) 1) |
| 4. | $\neg\alpha$                                     | RO: 3,2        |
| 5. | $\beta$  | RO: 1,4        |
| 6. | $\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\beta$  | teza (5 (b) 2) |
| 7. | $\neg\beta$                                      | RO: 6,2.       |

## Rozwiązanie ćwiczenia 5 (c)

$$(c) \frac{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma}{\neg \alpha \rightarrow \gamma}$$

Trzeba pokazać, że z założeń  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$ ,  $\neg \alpha$  i  $\neg \gamma$  można otrzymać parę formuł wzajem sprzecznych.

1.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$       założenie
2.  $\neg \alpha$                       założenie
3.  $\neg \gamma$                       z.d.n.
4.  $\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$     prawo Dunsa Scotusa
5.  $\alpha \rightarrow \beta$                 RO: 4,2
6.  $\gamma$                          RO: 1,5.

## Rozwiązanie ćwiczenia 5 (d)

$$(d) \frac{(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma}{(\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)}$$

Trzeba pokazać, że z założenia  $(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$  można otrzymać  $(\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$ .

1.	$(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$	założenie
1.1.	$\alpha$	założenie dodatkowe
1.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 1.1.
1.3.	$\gamma$	RO: 1,1.2.
2.	$\alpha \rightarrow \gamma$	1.1. $\Rightarrow$ 1.3.
2.1.	$\beta$	założenie dodatkowe
2.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 2.1.
2.3.	$\gamma$	RO: 1,2.2.
3.	$\beta \rightarrow \gamma$	2.1. $\Rightarrow$ 2.3.
4.	$(\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$	DK: 2,3.

## Rozwiązanie ćwiczenia 6 (a)

(a)  $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \neg\gamma, \delta \rightarrow \gamma, \alpha \wedge \delta\}$  jest sprzeczny:

1.  $\alpha \rightarrow \beta$  założenie
2.  $\beta \rightarrow \neg\gamma$  założenie
3.  $\delta \rightarrow \gamma$  założenie
4.  $\alpha \wedge \delta$  założenie
5.  $\alpha$  OK: 4
6.  $\delta$  OK: 4
7.  $\beta$  RO: 1,5
8.  $\neg\gamma$  RO: 2,7
9.  $\gamma$  RO: 3,6.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 8 i 9.



## Rozwiązanie ćwiczenia 6 (b)

(b)  $\{\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \neg\beta \vee \gamma, \alpha \wedge \neg\delta\}$  jest sprzeczny:

1.  $\alpha \rightarrow \beta$  założenie
2.  $\gamma \rightarrow \delta$  założenie
3.  $\neg\beta \vee \gamma$  założenie
4.  $\alpha \wedge \neg\delta$  założenie
5.  $\alpha$  OK: 4
6.  $\neg\delta$  OK: 4
7.  $\beta$  RO: 1,5
8.  $\neg\gamma$  MT: 2,6
9.  $\neg\beta$  OA: 3,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 7 i 9.

## Rozwiązanie ćwiczenia 6 (c)

(c)  $\{\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta \rightarrow \neg\gamma, \delta \rightarrow \beta, \delta, \alpha \vee \gamma\}$  jest sprzeczny:

1.  $\alpha \rightarrow \neg\beta$  założenie
2.  $\beta \rightarrow \neg\gamma$  założenie
3.  $\delta \rightarrow \beta$  założenie
4.  $\delta$  założenie
5.  $\alpha \vee \gamma$  założenie
6.  $\beta$  RO: 3,4
7.  $\neg\gamma$  RO: 2,6
8.  $\alpha$  OA: 5,7
9.  $\neg\beta$  RO: 1,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 9.

## Rozwiązanie ćwiczenia 6 (d)

(d)  $\{\alpha \vee (\gamma \wedge \neg\beta), \beta \vee \neg\gamma, \neg\alpha\}$  jest sprzeczny:

- |    |   |           |
|----|---|-----------|
| 1. | $\alpha \vee (\gamma \wedge \neg\beta)$ | założenie |
| 2. | $\beta \vee \neg\gamma$                 | założenie |
| 3. | $\neg\alpha$                            | założenie |
| 4. | $\gamma \wedge \neg\beta$               | OA: 1,3   |
| 5. | $\neg\beta$                             | OK: 4     |
| 6. | $\gamma$                                | OK: 4     |
| 7. | $\neg\gamma$                            | OA: 2,5.  |

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 7.

## Rozwiązanie ćwiczenia 7 (a)

$$(a) (\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$$

- |      |  |  |
|------|--|--|
| 1.   | $\neg\alpha \vee \neg\beta$                          | założenie  |
| 2.   | $\alpha$   | założenie  |
| 3.   | $\beta$  | założenie  |
| 4.   | $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \gamma)$ | wersja prawa Dunsza Scotusa                          |
| 5.   | $\beta \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \gamma)$   | wersja prawa Dunsza Scotusa                          |
| 6.   | $\neg\alpha \rightarrow \gamma$                      | RO: 4,2  |
| 7.   | $\neg\beta \rightarrow \gamma$                       | RO: 5,3  |
| 1.1. | $\neg\alpha$   | założenie dodatkowe                                  |
| 1.2. | $\gamma$   | RO: 6,1.1.   |
| 2.1. | $\neg\beta$  | założenie dodatkowe                                  |
| 2.2. | $\gamma$   | RO: 7,2.1.   |
| 8.   | $\gamma$   | 1.1. $\Rightarrow$ 1.2.; 2.1. $\Rightarrow$ 2.2.; 1. |

## Rozwiązanie ćwiczenia 7 (b)

$$(b) (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\neg\gamma \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)))$$

- |      |                               |  |
|------|-------------------------------|--|
| 1.   | $\alpha \rightarrow \gamma$   | założenie  |
| 2.   | $\beta \rightarrow \gamma$    | założenie  |
| 3.   | $\neg\gamma$                  | założenie  |
| 4.   | $\neg\neg(\alpha \vee \beta)$ | z.d.n.   |
| 5.   | $\alpha \vee \beta$           | ON: 4  |
| 1.1. | $\alpha$                      | założenie dodatkowe                                  |
| 1.2. | $\gamma$                      | RO: 1,1.1.   |
| 1.3. | $\perp$                       | 3,1.2.   |
| 2.1. | $\beta$                       | założenie dodatkowe                                  |
| 2.2. | $\gamma$                      | RO: 2,2.1.   |
| 2.3. | $\perp$                       | 3,2.2.   |
| 6.   | $\perp$                       | 1.1. $\Rightarrow$ 1.3.; 2.1. $\Rightarrow$ 2.3.; 5. |

## Rozwiązanie ćwiczenia 7 (c)

$$(c) (\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \rightarrow (\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))$$

- |      |                                     |  |
|------|-------------------------------------|--|
| 1.   | $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$ | założenie  |
| 2.   | $\neg(\alpha \wedge \beta)$         | założenie  |
| 3.   | $\neg(\alpha \wedge \gamma)$        | z.d.n.   |
| 4.   | $\alpha$                            | OK: 1  |
| 5.   | $\beta \vee \gamma$                 | OK: 1  |
| 1.1. | $\beta$                             | założenie dodatkowe                                  |
| 1.2. | $\alpha \wedge \beta$               | DK: 4,1.1.   |
| 1.3. | $\perp$                             | 2,1.2.   |
| 2.1. | $\gamma$                            | założenie dodatkowe                                  |
| 2.2. | $\alpha \wedge \gamma$              | DK: 4,2.1.   |
| 2.3. | $\perp$                             | 3,2.2.   |
| 6.   | $\perp$                             | 1.1. $\Rightarrow$ 1.3.; 2.1. $\Rightarrow$ 2.3.; 5. |

# Tezy i reguły wyprowadzone w tej prezentacji

Nie było naszym zamiarem podawanie jakiegoś uporządkowanego ciągu tez i reguł wtórnych systemu założeniowego KRZ. Poszczególne wyprowadzenia miały ilustrować kolejne techniki dowodowe.

Wszystkie udowodnione w wykładach 8–9 tezy oraz wyprowadzone reguły wtórne wyliczono w Dodatku 5., dostępnym na:

[www.logic.amu.edu.pl](http://www.logic.amu.edu.pl)

Zachęcam do samodzielnego udowodnienia dalszych tez, np. tych wyliczonych pod koniec wykładów 5–7.

# Koniec

To, co najważniejsze w tym wykładzie:

- KRZ można ugruntować na metodzie czysto założeniowej, z użyciem jedynie reguł wnioskowania, bez przyjmowania żadnych aksjomatów;
- metoda założeniowa jest trafna i pełna: tezy systemu założeniowego to dokładnie wszystkie tautologie KRZ;
- planowanie dowodów w metodzie założeniowej jest proste i naturalne.

Inną ważną metodą dowodową jest [rachunek sekwentów Gentzena](#).

Na następnym wykładzie poznamy operację konsekwencji w KRZ opartą na [metodzie rezolucyjnej](#).