

# Logika Radosna 1

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM  
[www.logic.amu.edu.pl](http://www.logic.amu.edu.pl)  
[pogon@amu.edu.pl](mailto:pogon@amu.edu.pl)

Czym jest logika?

# Plan na dziś

Dziś pogwarzymy sobie (bardzo ogólnikowo) o logice. Rozważymy też kilka prostych przykładów zagadnień logicznych.

U słuchaczy zakłada się znajomość materiału przedstawionego w semestrze zimowym przez Pana Profesora Władysława Zabrockiego, tj. semantyki **Klasycznego Rachunku Zdań** (odtąd: KRZ).

Zalecaną literaturą przedmiotu są dwie pozycje autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz:

- *Wprowadzenie do logiki formalnej*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- *Ćwiczenia z logiki*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.

# System logiczny

**Systemem logicznym** nazywamy dowolną trójkę uporządkowaną  $(L, C, S)$ , gdzie:

- $L$  jest **językiem** systemu;
- $C$  jest **operatorem konsekwencji**;
- $S$  jest **semantyką** systemu.

$L$  jest (precyzyjnie określonym) **językiem formalnym**.  $C$  jest **funkcją** przyporządkowującą każdemu zbiorowi  $X$  formuł z  $L$  zbiór  $C(X)$  wszystkich logicznych konsekwencji  $X$ .  $S$  jest pewną klasą **systemów relacyjnych** (układów złożonych ze zbioru obiektów oraz wiążących je relacji).

# Elementarz logiczny

Jest nieprzebrane mnóstwo systemów logicznych. W tych wykładach ograniczamy się do dwóch: KRZ oraz **Klasycznego Rachunku Predykatów** (odtąd: KRP). Te dwa systemy stanowią **Elementarz Logiczny**, którego znajomość jest wymagana od wykształconego Europejczyka dowolnej płci.

W przypadku KRZ poznaliście dwa składniki tego systemu: jego **język** oraz **semantykę**. Do omówienia pozostaje zatem jego komponent inferencyjny, czyli **operacje konsekwencji** w KRZ. Wybierzemy dwie:

- konsekwencję założeniową [system **dedukcji naturalnej**]
- konsekwencję tablicową [system **tablic analitycznych**].

Pozostałe wykłady będą poświęcone KRP. Na koniec grzecznie zdamy egzamin pisemny. Potem wesoło spalimy notatki (nie będą już potrzebne: Logika pozostanie tam, gdzie jej miejsce, czyli w głowach).

# A czym zajmuje się Logika?

Logika zajmuje się **dowodzeniem**. Nie w sensie militarnym, lecz dowodzeniem rozumianym jako **uzasadnianie** twierdzeń.

Tylko niektóre rodzaje uzasadnień są prawomocne z punktu widzenia logiki. Nie są prawomocne np. uzasadnienia odwołujące się do:

- autorytetu lub powszechnych mniemań
- myślenia życzeniowego
- ustaleń na drodze demokratycznych wyborów
- przemocy, pochlebstwa, itp.

Uzasadnienia uznawane za poprawne z logicznego punktu widzenia są przeprowadzane wedle **niezawodnych reguł wnioskowania**.

# Pies Chryzypa

**Pies Chryzypa.** Tropiący Pies staje na rozwidleniu ścieżek. Obwąchuje jedną z nich, a potem już bez obwąchiwania drugiej, puszcza się nią biegiem.

Pies Chryzypa zastosował niezawodną regułę wnioskowania zwaną **regułą opuszczania alternatywy**. Z przesłanek postaci:

Zwierzyna na pierwszej ścieżce lub na drugiej ścieżce.  
Ale na pierwszej ścieżce nie było Zwierzyny.

wyprowadza wniosek:

Zwierzyna na drugiej ścieżce.

$$\frac{\alpha \vee \beta, \quad \neg\alpha}{\beta}.$$

# Pies Chryzypa

Na podstawie wiadomości z semestru zimowego potraficie uzasadnić, że strategia Psa Chryzypa jest trafna z logicznego punktu widzenia. Wystarczy do tego znajomość warunków prawdziwości alternatywy oraz negacji.

Otóż jest **wykluczone**, aby wniosek w Psim rozumowaniu był fałszywy, a przesłanki tego rozumowania były prawdziwe:

Gdyby  $\beta$  było fałszem, a  $\alpha \vee \beta$  oraz  $\neg\alpha$  były prawdą, to:  $\alpha$  byłoby fałszem i wtedy  $\alpha \vee \beta$ , jako alternatywa dwóch fałszów, też byłaby fałszem.

Alternatywa  $\alpha \vee \beta$  nie może być jednocześnie prawdą i fałszem.

**Wkluczylismy** więc, aby przesłanki były prawdziwe, a wniosek fałszywy. Reguła jest niezawodna. Pies ma rację.

# Pies Chryzypa





# Ziuta i Zygryd

**Ziuta i Zygryd.** W kuchni w familoku na Śląsku Ziuta дума wieczorem:

*Jeśli dziś była wypłata, to mój Zygryd już jest pijany.*

[Wchodzi Zygryd, cały trzeźwy.] Ziuta konstatuje:

*Ale przecie — chwiała Panu Najwyższemu — mój Zygryd nie jest pijany!*

A po 2 sekundach oszołomienia konkluduje:

*Znaczy, psiakość, nie było dziś wypłaty.*

Ziuta stosuje niezawodną regułę wnioskowania, zwaną **modus tollendo tollens**:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \quad \neg\beta}{\neg\alpha}.$$

# Ziuta i Zygfryd

Czy konkluzja Ziuty **wynika logicznie** z jej przesłanek? Gdyby wniosek mógł być fałszywy, przy prawdziwych przesłankach, to nie zachodziłoby wynikanie logiczne. Pytamy: czy wniosek może być fałszywy, przy prawdziwych przesłankach? Lub: czy przesłanki oraz negacja wniosku mogą być jednocześnie prawdziwe?

Zdania proste we wnioskowaniu Ziuty:

- $p$  — Dziś była wypłata.
- $q$  — Dziś Zygfryd jest pijany.

Schemat wnioskowania Ziuty:

$$\frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$$

# Ziuta i Zygryd

Przypuśćmy, że przesłanki wnioskowania Ziuty są prawdziwe, a jego wniosek fałszywy. Pokażemy, że to niemożliwe.

- 1 Gdyby  $\neg q$  było prawdziwe, to  $q$  byłoby fałszywe.
- 2 Gdyby  $\neg\neg p$  było prawdziwe, to  $\neg p$  byłoby fałszywe.
- 3 Gdyby  $\neg p$  było fałszywe, to  $p$  byłoby prawdziwe.
- 4 Gdyby  $p$  było prawdziwe, a  $q$  fałszywe, to  $p \rightarrow q$  byłoby fałszywe.
- 5 Ale przypuściliśmy, że  $p \rightarrow q$  jest prawdziwe, otrzymaliśmy więc **sprzeczność**:  $p \rightarrow q$  nie może być jednocześnie prawdziwe i fałszywe.

Tak więc, przy prawdziwych przesłankach i wniosek musi być prawdziwy.

# Zygryd wraca do domu



## Nasza Pani od Biologii: epizod pierwszy

**Nasza Pani od Biologii.** Każe zapisać w kajetach:

*Wieloryby, drogie dzieci, to takie bardzo, bardzo duże Ryby, jak sama nazwa wskazuje. Wszystkie Ryby żyją w wodzie. Gdzie zatem żyją Wieloryby, kto nam powie, może ty, Jasiu? Nie wiesz? No przecież to takie proste: Wieloryby żyją w wodzie. Wszyscy zapisali?*

Nasza Pani od Biologii rozumuje wedle **niezawodnej (!)** reguły wnioskowania:

Wszystkie  $A$  są  $B$ .

Wszystkie  $B$  są  $C$ .

---

Zatem: wszystkie  $A$  są  $C$ .

Jej rozumowanie obarczone jest **błędem materialnym**: użyła fałszywej przesłanki (Wieloryby są bowiem Ssakami, nie Rybami). Z biologii jest zatem kiepska, ale logikę zna.

# Nasza Pani od Biologii: epizod pierwszy



## Nasza Pani od Biologii: epizod drugi

Gdyby natomiast Nasza Pani od Biologii rozumowała tak:

*Żadna Mucha nie jest Pająkiem. Ale wszystkie Muchy są Owadami.  
Zdziwicie się dzieci, ale stąd wynika, że Pająki nie są Owadami.*

to jej uzasadnienie jest z punktu widzenia logiki **niepoprawne**, choć zarówno przesłanki, jak i wniosek są zdaniami **prawdziwymi (!)**. Rozumowała bowiem wedle **zawodnej (!)** reguły:

Żadne  $A$  nie jest  $C$ .

Wszystkie  $A$  są  $B$ .

---

Zatem: żadne  $B$  nie jest  $C$ .

Podstaw:  $A$  — Psy,  $B$  — Ssaki,  $C$  — Koty. Dostaniesz prawdziwe przesłanki i fałszywy wniosek. [Bo KotoPsy nie istnieją, a Psy i Koty są Ssakami.]

# Nasza Pani od Biologii: Muchy i Pająki

Zauważmy na marginesie, że Nasza Pani od Biologii miała prawdopodobnie na myśli to, że Rodzaj *Musca* jest rozłączny z Rzędem *Araneae*:

Rząd:	Araneae	Pająki
Gromada:	Arachnida	Pajęczaki
Podtyp:	Chelicerata	Szczękoczułkowce
Typ:	Arthropoda	Stawonogi

Rodzaj:	Musca	Mucha
Rząd:	Diptera	Muchówki
Podgromada:	Pterygota	Uskrzydłone
Gromada:	Insecta	Owady
Typ:	Arthropoda	Stawonogi

Rząd *Araneae* ma 2 Podrzędy (*Mesothelae* i *Opisthothela*, a dalej 106 Rodzin).



# Nasza Pani od Biologii: Muchy i Pająki



## Nasza Pani od Biologii: Uszy i Ogon

Proszę zauważyć, że metodami, które poznaliście w semestrze zimowym, nie można wykazać niezawodności (w epizodzie pierwszym) oraz zawodności (w epizodzie drugim) stosowanych reguł wnioskowania.

Podobnie, nie można tymi metodami uzasadnić poprawności nawet tak prostego wnioskowania:

Uszy są krótsze od Ogona.

Zatem: Ogon jest dłuższy od Uszu.

(przy naturalnym założeniu dotyczącym znaczenia słów: *krótszy od* oraz *dłuższy od*).

Takie rozumowania analizowane mogą być dopiero w KRP.

# Rozmyślania Kremłowskie

**Rozmyślania Kremłowskie.** Środek nocy. Tylko w jednym oknie na Kremlu pali się światło. Towarzysz Stalin (Josif Dżugaszwili) rozmyśla o wykończeniu towarzysza Trockiego (Leo Bronsteina):

*Jest cieżowiek, jest probliema.*

*Nu Leo, pagadi! Niet cieżowieka, niet probliemy.*

Rozumowanie towarzysza Stalina **nie jest** poprawne z logicznego punktu widzenia. Wnioskuje on tu wedle **zawodnej** reguły wnioskowania (nazwiemy ją **Regułą Stalina**):

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\neg\alpha \rightarrow \neg\beta}.$$

# Rozmyślania Kremlowskie

Zdania proste w powyższym wnioskowaniu:

- $p$  — Jest człowiek.
- $q$  — Jest problem.

Schemat powyższego wnioskowania:

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg p \rightarrow \neg q}$$

Pytamy, czy mogą być jednocześnie prawdziwe: przesłanka oraz negacja wniosku, tj.:

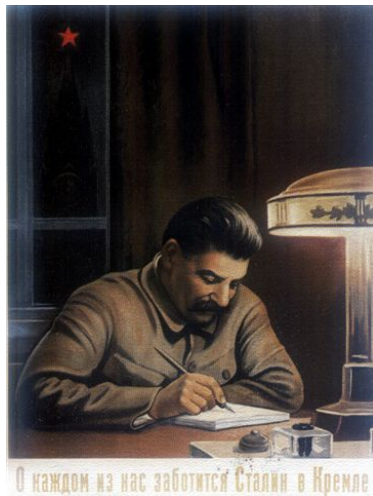
- $p \rightarrow q$
- $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$ .

# Rozmyślania Kremlowskie

- 1 Gdyby  $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$  było prawdziwe, to  $\neg p \rightarrow \neg q$  byłoby fałszywe.
- 2 Gdyby  $\neg p \rightarrow \neg q$  było fałszywe, to  $\neg p$  byłoby prawdziwe, a  $\neg q$  byłoby fałszywe.
- 3 Gdyby  $\neg p$  było prawdziwe, to  $p$  byłoby fałszywe.
- 4 Gdyby  $\neg q$  było fałszywe, to  $q$  byłoby prawdziwe.
- 5 Dla  $p$  fałszywego oraz  $q$  prawdziwego przesłanka oraz zaprzeczenie wniosku są prawdziwe.
- 6 Inaczej mówiąc, dla  $p$  fałszywego oraz  $q$  prawdziwego przesłanka jest prawdziwa, a wniosek fałszywy.
- 7 Zatem: wniosek nie wynika logicznie z przesłanki.

Pokazaliśmy więc, że *Reguła Stalina* jest *zawodna*.

# Rozmyślania Kremłowskie



# Uroczą Koreanistka

**Uroczą Koreanistka.** Egzamin z logiki.

Pytanie 1: Czy zdanie *Każdy Polak to katolik* jest prawdziwe?

Odpowiedź: Nie, jest fałszywe.

Pytanie 2: Czy zdanie *Żaden Polak nie jest katolikiem* jest prawdziwe?

Odpowiedź: Nie, jest fałszywe.

Pytanie 3: Proszę podać zaprzeczenie zdania *Każdy Polak to katolik*.

Odpowiedź: *Żaden Polak nie jest katolikiem*.

Pytanie 4: Czyli wedle Pani, zaprzeczenie zdania fałszywego jest fałszywe?

Odpowiedź: Oj, bo ja jestem taka radykalna w swoich poglądach.

Prawidłową odpowiedzią na pytanie 3 jest oczywiście: *Nie wszyscy Polacy sa katolikami*. Stosowną regułę dotyczącą negowania zdań z kwantyfikatorami poznamy później.

Jest *Niezbadaną Tajemnicą*, wedle jakiej (zawodnej!) reguły wnioskowała Uroczą Koreanistka, udzielając odpowiedzi na pytanie 3.

# Urocza Koreanistka (zażenowana)





## Roztargniony Lekarz

**Roztargniony Lekarz.** Czyta twoją kartę i mruczy:

*Pacjentka ma krew w moczu, chociaż nie ma wysokiej gorączki. Zaraz, jak to było na wykładach... Nie jest tak, aby jednocześnie była krew w moczu, a nie było przerzutów nowotworowych. Jeśli pacjentka ma przerzuty nowotworowe, to zaatakowana jest wątroba. Pacjentka ma wysoką gorączkę, o ile zaatakowana jest wątroba. Taak, no chyba wszystko się zgadza...*

Na to asystująca Pielęgniarka o Frenetycznej Urodzie (której doktor nie dostrzega), z przekazem:

*Wynika z tego, że pacjentka wyzdrowieje, o ile usuniemy jej oba płuca, prawda, doktorze?*

Pokażemy, że istotnie z ustaleń lekarza wynika logicznie **wszystko**: zarówno diagnoza pielęgniarki, jak i to, że pacjentka symuluje, jak i to, że Pingwiny rządzą światem, itd.

## Roztargniony Lekarz

- $p$  — Pacjentka ma przerzuty nowotworowe.
- $q$  — Zaatakowana jest wątroba.
- $r$  — Pacjentka ma krew w moczu.
- $s$  — Pacjentka ma wysoką gorączkę.

Zdania złożone w tekście doktora mają następujące struktury składniowe:

1.  $r \wedge \neg s$
2.  $\neg(r \wedge \neg p)$
3.  $p \rightarrow q$
4.  $q \rightarrow s$ .

Pokażemy, że powyższe formuły przy żadnym wartościowaniu zmiennych zdaniowych nie są **wszystkie** prawdziwe.

# Roztargniony Lekarz

- A. Przypuśćmy, że formuły 1.–4. są wszystkie prawdziwe przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych.
- B. Skoro  $r \wedge \neg s$  jest prawdziwa, to  $r$  jest prawdziwe oraz  $\neg s$  jest prawdziwa, czyli  $s$  jest fałszywa.
- C. Skoro  $q \rightarrow s$  jest prawdziwa i  $s$  jest fałszywa, to  $q$  jest fałszywa.
- D. Skoro  $p \rightarrow q$  jest prawdziwa i  $q$  jest fałszywa, to  $p$  jest fałszywa.
- E. Obliczamy zatem  $\neg(r \wedge \neg p)$  dla  $r = 1$  oraz  $p = 0$ . Mamy:  
 $\neg(1 \wedge \neg 0) = \neg(1 \wedge 1) = \neg 1 = 0$ .
- F. Otrzymujemy **sprzeczność**: wedle A. formuła  $\neg(r \wedge \neg p)$  jest prawdziwa, a wedle E. jest fałszywa.
- G. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie A.
- H. Tak więc, rozważany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny.
- I. Z semantycznie sprzecznego zbioru formuł wynika logicznie alert **każda** formuła, więc konkluzja asystentki jest trafna: z tego, co powiedział doktor wynika logicznie, że jeśli usuną ci oba płuca, to wyzdrowiejesz.

## Roztargniony Lekarz

Odwołujemy się tutaj do następującej ważnej niezawodnej reguły wnioskowania w KRZ, znanej pod nazwą reguły **Dunsa Scotusa**:

$$\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}.$$

**Ćwiczenie.** Pokaż, że jeśli przesłanki reguły Dunsa Scotusa są prawdziwe, to i jej wniosek jest prawdziwy.

Z pary formuł wzajem sprzecznych wynika logicznie **dowolna** formuła. Tak więc, zbiory przesłanek, które zawierają parę zdań wzajem sprzecznych, są bezwartościowe: można z takich przesłanek wywieść (poprawnie!) dowolne zdanie. Np., że Pingwiny rządzą światem. Albo, że lekarz powinien wreszcie zachwycić się Frenetyczną Urodą Pielęgniarki.

# Kto rządzi światem?



# Ekonomista Telewizyjny

**Ekonomista Telewizyjny.** Ze swadą wywodzi:

*Jest kapitalizm lub nie ma bezrobocia. Jeśli jest recesja, to jest także bezrobocie. Nie ma jednak jednocześnie: biedy oraz braku recesji. Jest bieda, a nie ma kapitalizmu.*

Gdyby ten tekst był semantycznie niesprzeczny (opisywał sytuację mogącą zajść), to prawdziwa byłaby koniunkcja zdań tego tekstu.

Przypuśćmy, że koniunkcja ta jest prawdziwa.

Pokażemy, że jest to niemożliwe.

Odwołamy się przy tym jedynie do wiadomości z semestru zimowego, tj. do semantyki KRZ.

# Ekonomista Telewizyjny

Zdania proste w powyższym tekście to:

- $p$  — Jest kapitalizm.
- $q$  — Jest bezrobocie.
- $r$  — Jest recesja.
- $s$  — Jest bieda.

Schematy składniowe zdań badanego tekstu to:

- $\alpha_1: p \vee \neg q$
- $\alpha_2: r \rightarrow q$
- $\alpha_3: \neg(s \wedge \neg r)$
- $\alpha_4: s \wedge \neg p.$

# Ekonomista Telewizyjny

- 1 Gdyby  $s \wedge \neg p$  było prawdziwe, to prawdziwe byłoby  $s$  i prawdziwe byłoby  $\neg p$ .
- 2 Zatem  $p$  byłoby fałszywe.
- 3 Gdyby  $p \vee \neg q$  było prawdziwe, przy fałszywym  $p$ , to  $\neg q$  musiałoby być prawdziwe.
- 4 Stąd,  $q$  musiałoby być fałszywe.
- 5 Gdyby  $r \rightarrow q$  było prawdziwe, przy fałszywym  $q$ , to  $r$  musiałoby być fałszywe.
- 6 Gdyby  $\neg(s \wedge \neg r)$  było prawdziwe, to  $s \wedge \neg r$  byłoby fałszywe.
- 7 Ponieważ ustaliliśmy, że  $r$  fałszywe, więc  $\neg r$  jest prawdziwe.
- 8 Ponieważ zarówno  $s$ , jak i  $\neg r$  są prawdziwe, więc  $s \wedge \neg r$  jest prawdziwe.
- 9 **Sprzeczność:**  $s \wedge \neg r$  nie może być jednocześnie prawdziwe i fałszywe.



# Ekonomista Telewizyjny

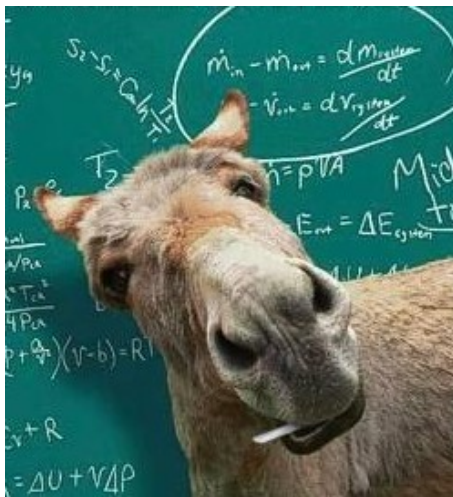
Co wykazaliśmy? Ano to, że facet bredzi. Jego tekst, **jako całość**, nie opisuje żadnej: ani istniejącej, ani nawet mogącej zaistnieć sytuacji.

Jest 16 możliwych sytuacji (światów), w których realizują się (lub nie) stany rzeczy opisywane przez zdania proste tego tekstu.

Pokazaliśmy, że w żadnej z tych możliwych 16 sytuacji **wszystkie zdania złożone** jego tekstu nie mogą być razem prawdziwe.

Proszę zwrócić uwagę na **apagogeniczny** (nie wprost) charakter naszego wywodu. Będziemy takie rozumowania często stosować.

# Ekonomista Telewizyjny



## A czymże jest niezawodna reguła wnioskowania?

Pies Chryzypa, Ziuta, Nasza Pani od Biologii (w pierwszym epizodzie) i Pielęgniarka o Frenetycznej Urodzie posługują się zatem poprawnie zasadami logiki, czego nie można powiedzieć o Towarzyszu Stalinie, Uroczej Koreanistce, Roztargnionym Lekarzu, Ekonomiście Telewizyjnym i Naszej Pani od Biologii (w drugim epizodzie).

Jak jednak odróżnić reguły niezawodne od reguł zawodnych?

To właśnie jest podstawowym zadaniem rozważanym w Elementarzu Logicznym.

Niezawodne reguły wnioskowania mają być takimi „przepisami” na wnioskowania, aby na ich podstawie nie docierać do fałszywych wniosków przy prawdziwych przesłankach. To metaforyczne określenie poddane zostanie w niniejszych wykładach precyzacji.

## A czymże jest niezawodna reguła wnioskowania?

Przyjmiemy kilka ważnych ustaleń. Wnioskowania przeprowadzamy w językach etnicznych. **Wnioskowaniem** jest dowolna para złożona ze zbioru zdań (**przesłanek**) oraz zdania (**wniosku**).

Reguły wnioskowania są konstrukcjami w (sztucznych) językach systemów logicznych. Na razie znacie tylko język KRZ, więc podamy definicję reguły wnioskowania dla KRZ.

**Sekwentem** nazywamy dowolny układ  $(X, \alpha)$  złożony ze zbioru formuł  $X$  języka KRZ oraz formuły  $\alpha$  tego języka. Jeśli  $(X, \alpha)$  jest sekwentem, to  $X$  stanowi jego zbiór **przesłanek**, a  $\alpha$  jest jego **wnioskiem**.

Dowolny zbiór sekwentów nazywamy **regułą wnioskowania**.

## A czymże jest niezawodna reguła wnioskowania?

Zwykle interesujemy się jedynie takimi regułami wnioskowania, których wszystkie sekwenty mają taką samą budowę składniową. Możemy wtedy reguły wnioskowania zapisywać schematycznie, tak jak czyniliśmy to w przypadku Psa Chryzypa, czy też Ziuty i Zygryda:

$$\frac{\alpha \vee \beta, \quad \neg\alpha}{\beta}$$

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \quad \neg\beta}{\neg\alpha}.$$

Formuły nad kreską w tym zapisie są **przesłankami** danej reguły, a formuła pod kreską jest jej **wnioskiem**.

## Oto czym są reguły niezawodne:

Zakładam, że wszyscy Pamiętają ze Zrozumieniem, czym są **wartościowania zmiennych zdaniowych** (odtąd: wzz) oraz **wartości formuł** (przy danym wzz) języka KRZ. Ustalmy, że wartościami logicznymi są dwa różne przedmioty: 0 oraz 1. Zakładam, że wszyscy pamiętają **tabliczki prawdziwościowe** spójników logicznych.

Piszemy  $X \models_{krz} \alpha$  wtedy i tylko wtedy, gdy: dla dowolnego wzz, jeśli wszystkie elementy  $X$  mają przy tym wzz wartość 1, to  $\alpha$  ma przy tym wzz wartość 1.

Jeśli  $X \models_{krz} \alpha$ , to mówimy, że  $\alpha$  **wynika logicznie** z  $X$ .

Reguła  $\mathcal{R}$  jest **niezawodna** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego jej sekwentu  $(X, \alpha)$  zachodzi  $X \models_{krz} \alpha$ , czyli gdy wnioski jej sekwentów wynikają logicznie z przesłanek tych sekwentów.

# Tautologie KRZ

Niech  $\emptyset$  oznacza zbiór pusty, czyli zbiór, który nie ma żadnych elementów.

Mówimy, że formuła  $\alpha$  języka KRZ jest **tautologią** KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy:  $\emptyset \models_{krz} \alpha$ .

Formuła  $\alpha$  języka KRZ jest więc tautologią KRZ, gdy wynika logicznie z pustego zbioru przesłanek.

Bezpośrednio z tej definicji widać, że  $\alpha$  jest tautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy  $\alpha$  ma wartość 1 przy **każdym** wzz. Widać też, że:  $\alpha$  **nie jest** tautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy  $\alpha$  ma wartość 0 przy **co najmniej jednym** wzz.

**Kontrtautologią** KRZ nazywamy każdą formułę, której wartość przy każdym wzz wynosi 0.

## Semantyczna niesprzeczność

Zbiór formuł  $X$  jest **semantycznie niesprzeczny** (albo: **spełnialny**) wtedy i tylko wtedy, gdy przy co najmniej jednym wzz wszystkie elementy  $X$  mają wartość 1. W przeciwnym przypadku  $X$  jest **semantycznie sprzeczny** (albo: **nie jest spełnialny**).

Aby pokazać, że  $X$  jest semantycznie niesprzeczny wystarczy zatem podać choć jedno wzz, przy którym wszystkie elementy  $X$  mają wartość 1.

Aby pokazać, że  $X$  jest semantycznie sprzeczny wystarczy zatem pokazać, że nie istnieje wzz, przy którym wszystkie elementy  $X$  mają wartość 1.

**Uwaga.** Gdy przy pewnym wzz wszystkie elementy  $X$  mają wartość 1, a przy innym wzz wszystkie elementy  $X$  mają wartość 0, to  $X$  jest semantycznie niesprzeczny. Gdy przy **każdym** wzz wszystkie elementy  $X$  mają wartość 0, to  $X$  jest semantycznie sprzeczny.



# Wnioskowania dedukcyjne

Niech  $(\mathcal{A}, A)$  będzie wnioskowaniem w jakimś języku etnicznym (kaszubskim, japońskim, itd.). Przez **schemat** tego wnioskowania rozumiemy sekwent  $(X, \alpha)$  taki, że:

- $X$  jest zbiorem schematów zdaniowych zdań z  $\mathcal{A}$
- $\alpha$  jest schematem zdaniowym zdania  $A$ .

Mówimy, że wnioskowanie  $(\mathcal{A}, A)$  jest **dedukcyjne**, jeśli jego schemat jest elementem reguły niezawodnej.

Mówimy, że zdanie  $A$  języka etnicznego jest **prawdą logiczną**, gdy jego schemat jest tautologią KRZ.

Mówimy, że zdanie  $A$  języka etnicznego jest **fałszem logicznym**, gdy jego schemat jest kontrtautologią KRZ.

# Stałe logiczne

W języku każdego systemu logicznego dokonuje się odróżnienia między: stałymi logicznymi tego systemu oraz używanymi w nim zmiennymi.

Znaczenie stałych logicznych jest w danym języku ustalone. Natomiast zmienne języka systemu mogą, jak mówimy, przybierać różne wartości.

To, jaka jest relacja wynikania logicznego związana z danym systemem, zależy właśnie od zestawu stałych logicznych tego systemu.

W KRZ stałymi logicznymi są spójniki prawdziwościowe, a zmienne są zmiennymi zdaniowymi.

## Język i metajęzyk

W przypadku każdego systemu logicznego ważne jest także rozróżnienie języka przedmiotowego oraz metajęzyka.

Jeśli  $(L, C, S)$  jest systemem logicznym, to  $L$  jest językiem przedmiotowym tego systemu. Natomiast metajęzykiem dla  $(L, C, S)$  jest (dowolny) język, w którym mówimy o  $(L, C, S)$ .

Tak więc, gdy mówimy np.: *Formuła  $p \vee \neg p$  jest tautologią KRZ, dla dowolnej zmiennej zdaniowej  $p$  języka KRZ*, to jest to wypowiedź w metajęzyku dla KRZ, a formuły:  $p$  i  $p \vee \neg p$  są tu wyrażeniami języka przedmiotowego KRZ.

## Koniec powtórki

To wszystko były przypomnienia spraw już znanych z semestru zimowego. Naszym najbliższym zadaniem będzie określenie **aparatury inferencyjnej** KRZ.

Pokażemy mianowicie, że w KRZ można określić na sposób czysto **syntaktyczny**, a więc odwołujący się jedynie do budowy wyrażeń, takie operacje na napisach, że możliwe będzie:

- scharakteryzowanie wszystkich tautologii KRZ
- scharakteryzowanie relacji wynikania logicznego w KRZ.

Podkreślmy raz jeszcze: operacje konsekwencji (założeniowa i tablicowa), które zdefiniujemy, będą miały charakter czysto formalny, będą odwoływać się tylko do składniowych własności wyrażeń. Dopiero później pokażemy, że dobrano je rozumnie, tzn., że zachodzi zgodność składni z semantyką.

## A po co nam jakieś operacje konsekwencji?

Ktoś mógłby zapytać: a po co nam jakieś operacje konsekwencji? Mamy przecież **definicję** reguły niezawodnej i **definicję** tautologii. Ponadto, mamy przecież **algorytm** rozstrzygnięcia, czy jakaś formuła jest tautologią KRZ i czy zachodzi wynikanie logiczne między przesłankami i wnioskiem. To chyba wystarczy?

Otóż nie wystarczy, z kilku powodów. Staną się one bardziej oczywiste, gdy będziemy rozważać KRP, czyli system logiczny o wiele mocniejszy od KRZ. A że musimy taki mocniejszy system rozważać, pokazały już: prosty przykład z Uszami i Ogonem oraz epizody z Naszą Panią od Biologii oraz Uroczą Koreanistką.

KRZ jest bardzo ubogim (choć niezwykle ważnym!) systemem logicznym. Ma wspomnianą miłą własność **rozstrzygalności**. W ogólności, systemy logiczne własności tej mieć nie muszą. W szczególności, KRP **nie jest** rozstrzygalny.

## A po co nam jakieś operacje konsekwencji?

Jak pamiętamy, zarówno Prawda, jak i Wynikanie Logiczne mają charakter obiektywny.

Wynikanie logiczne jest zależnością, która zachodzi lub nie, niezależnie od np. naszych mniemań lub życzeń. Nie można przegłosować, że zachodzi wynikanie logiczne. Nie można też ufnie zawierzyć żadnemu autorytetowi, który miałby nam podpowiadać: w tych wypadkach wynikanie logiczne zachodzi, a w tych nie zachodzi.

Nie mamy pełnej wiedzy o Faktach. Możemy natomiast dokonywać operacji na wyrażeniach językowych. Operacje konsekwencji mają, dla dowolnego zbioru przesłanek, określać (na drodze czysto syntaktycznej!), ogół wniosków logicznie z tych przesłanek wynikających.

## A po co nam jakieś operacje konsekwencji?

Najważniejszy powód, dla którego rozważamy operacje konsekwencji jest następujący.

Proszę zauważyć, że ustalanie metodami semantycznymi (np. znanymi z semestru zimowego: metodą 0 – 1, lub skróconą metodą 0 – 1, czyli metodą nie wprost):

- czy dana formuła języka KRZ jest tautologią KRZ,
- czy dana formuła wynika logicznie z podanego zbioru formuł
- czy dany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny

było pracą wykonywaną w **metajęzyku**.

Chcemy, aby sam **język przedmiotowy** był wyposażony w aparaturę inferencyjną, pozwalającą dokonywać wymienionych wyżej ustaleń.

## A po co nam jakieś operacje konsekwencji?

Ogół logicznych konsekwencji danego zbioru przesłanek  $X$  jest dany w sposób obiektywny, niezależnie od naszych o nim mniemań. Naszym marzeniem jest określenie takich (efektywnych, obliczalnych, czysto składniowych) operacji na wyrażeniach językowych, aby ów ogół konsekwencji dał się opisać przez te operacje.

Mówiąc w sposób intuicyjny, operacja konsekwencji  $C$  jest **trafna**, jeśli dla dowolnego zbioru przesłanek  $X$ , zbiór  $C(X)$  wszystkich konsekwencji  $X$  zawiera się w zbiorze tych formuł, które wynikają logicznie z  $X$ .

Mówiąc w sposób intuicyjny, operacja konsekwencji  $C$  jest **pełna**, jeśli dla dowolnego zbioru przesłanek  $X$ , zbiór tych formuł, które wynikają logicznie z  $X$  zawiera się w zbiorze  $C(X)$  wszystkich konsekwencji  $X$ .

Operacje konsekwencji powinny być trafne i pełne.



# Dowodzenie jest czynnością twórczą!

**Budowania** dowodów nie da się zredukować do czynności czysto algorytmicznych. Owszem, Maszyna może **sprawdzić**, czy dany ciąg napisów jest dowodem (jakiegoś twierdzenia). W ogólności jednak, **znajdowanie** dowodów to Sztuka, czynność poniekąd artystyczna. Przekonamy się o tym już niebawem. Cieszycie się!

W KRZ odróżnienie procedur algorytmicznych od twórczych metod dowodzenia ulega częściowemu zatarciu ze względu na wspomnianą miłą własność rozstrzygalności. Twórczy charakter procedur dowodowych będzie natomiast wyraźnie widoczny w KRP, gdzie po raz pierwszy będziecie uczestniczyć w Bliskim Spotkaniu z Nieskończonością.

Nierozstrzygalność KRP ma swoje źródło w tym, że ustalanie tautologiczności formuł wymaga przejrzenia **nieskończonej** liczby interpretacji. Tego w skończonym czasie nikt, ani Mossad, ani Szin Bet, nie jest w stanie dokonać. Stąd brak algorytmu (rozstrzygnięcia czy dowolna formuła KRP jest tautologią KRP).

# Koniec

Na dziś wystarczy. Za tydzień pobawimy się dowodami założeniowymi w KRZ. Pamiętaj, nasze motto to:



To Matrix służy nam, a nie my Matrixowi.