Jak żyć z paradoksem Skolema?[1]

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej
Instytut Językoznawstwa UAM
pogon@amu.edu.pl

Problematyka związana z twierdzeniem Löwenheima-Skolema była już wielokrotnie omawiana w literaturze logicznej i filozoficznej. Poniżej wspominamy o paru znanych eksplikacjach paradoksu związanego z omawianym twierdzeniem dodając do nich kilka zdań komentarza. Skrótów: TLS oraz PLS używamy zamiast, odpowiednio, wyrażeń *twierdzenie Löwenheima-Skolema* oraz *paradoks Löwenheima-Skolema* (w literaturze przedmiotu najczęściej używa się terminu: *paradoks Skolema*). Tekst jest fragmentem przygotowywanej pracy o znaczeniu twierdzeń metalogicznych dla teorii języka.

TLS to historycznie pierwsze twierdzenie w teorii modeli. Pierwsze jego sformułowanie i dowód pochodzą od Leopolda Löwenheima (Löwenheim 1915). Uogólnienie twierdzenia i precyzacje oraz uproszczenia dowodu podane zostały po raz pierwszy przez Thoralfa Skolema (Skolem 1919, 1920, 1922). We współczesnej terminologii TLS sformułowane może być (w pewnym uproszczeniu) w sposób następujący:

> JEŚLI ZBIÓR FORMUŁ (JĘZYKA RACHUNKU PREDYKATÓW PIERWSZEGO RZĘDU) MA MODEL, TO MA TEŻ MODEL PRZELICZALNY.

Terminu ‘przeliczalny’ używamy tu w znaczeniu ‘równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych’. TLS nazywane bywa czasami *dolnym twierdzeniem Löwenheima-Skolema.* Tarski udowodnił, że jeśli zbiór formuł ma model nieskończony, to ma także modele dowolnych mocy nieskończonych – to twierdzenie (które sformułowaliśmy tu w pewnym uproszczeniu) nazywane bywa *górnym twierdzeniem Löwenheima-Skolema.* Dolne i górne TLS stwierdzają łącznie, mówiąc nieco metaforycznie, że logika pierwszego rzędu nie wyróżnia żadnych mocy nieskończonych. Tak więc, teorie sformułowane w językach pierwszego rzędu, o ile mają model nieskończony, to nie mogą mieć modeli wyłącznie przeliczalnych (o uniwersach równolicznych ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych) ani modeli np. wyłącznie mocy kontinuum (o uniwersach równolicznych ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych).

Z twierdzenia Gödla (o istnieniu modelu) oraz z TLS wynika, że dowolny niesprzeczny zbiór formuł ma model przeliczalny. Twierdzenie o zwartości (w wersji teoriomodelowej) głosi, że zbiór formuł ma model wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór ma model.

---

[1] Tekst opublikowany w: J. Brzeziński, A. Klawiter, Th.A.F. Kuipers, K. Łastowski, K. Paprzycka, P. Przybysz [Eds.] *Odwaga filozofowania. Leszkowi Nowakowi w darze*. Wydawnictwo Fundacji Humaniora, Poznań, 581--591.

Wiadomo, że jeśli jakiś zbiór formuł ma modele dowolnych mocy skończonych, to ma również model nieskończony. W logice pierwszego rzędu nie można zdefiniować pojęcia nieskończoności, choć nietrudno podać przykłady zbiorów formuł, które mają wyłącznie modele nieskończone.

TLS należy do tzw. *twierdzeń limitacyjnych* w logice (podobnie jak np. twierdzenia: Gödla o niezupełności, Tarskiego o niedefiniowalności prawdy, Churcha o nierozstrzygalności, itd.). Nazwa bierze się stąd, że odnośne twierdzenia mówią o pewnych – obiektywnych – ograniczeniach nauk dedukcyjnych. Do TLS odwołują się też często inne twierdzenia limitacyjne, np. twierdzenie Lindströma, głoszące, że każda logika spełniająca jednocześnie TLS oraz twierdzenie o zwartości jest równoważna logice pierwszego rzędu. Twierdzenia limitacyjne pokazują, że słynny program Hilberta nie może zostać zrealizowany. Zupełna i efektywna aksjomatyzacja matematyki jest nierealna. Podobnie, niemożliwe jest udowodnienie finitystycznymi środkami jej niesprzeczności. Jedną z konsekwencji twierdzenia Gödla o niezupełności jest niemożność kategorycznego scharakteryzowania w logice pierwszego rzędu modelu zamierzonego arytmetyki (a więc uniwersum ,,zwykłych'', ,,prawdziwych'' liczb naturalnych). Z kolei, podobną konsekwencją TLS jest niemożność scharakteryzowania – w tejże logice – pojęcia nieprzeliczalności.

Zwraca się uwagę, że TLS ma (rzekomo) paradoksalne konsekwencje. Zwykle rozważa się przy tym dwa aspekty PLS. **Po pierwsze**, TLS ma konsekwencje, które okazują się zaskakujące, gdy ktoś chce mówić o *zamierzonym* modelu dla teorii mnogości. Pamiętamy, że jednym z pewników teorii mnogości jest *aksjomat nieskończoności*, stwierdzający istnienie co najmniej jednego zbioru nieskończonego. Nadto, zachodzi *twierdzenie Cantora*: żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów. W szczególności, rodzina wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych (równoliczna ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych) jest nieprzeliczalna. Jeśli teoria mnogości jest niesprzeczna, to ma model, a zatem – na mocy TLS – ma też model przeliczalny. Wszystkie podzbiory uniwersum tego modelu są co najwyżej przeliczalne, a więc także liczby rzeczywiste w tym modelu tworzą zbiór przeliczalny. Wydaje się, że otrzymujemy sprzeczność. Tak jednak, oczywiście, nie jest: należy wystrzegać się popełnienia błędu ekwiwokacji w odniesieniu do terminu *przeliczalny* – użyty on został powyżej raz w metajęzyku, a raz w języku teorii mnogości (por. Mostowski 1948, s. 359—360). *Wewnątrz* przeliczalnego modelu teorii mnogości nie istnieje funkcja (zbiór par uporządkowanych) ustalająca równoliczność zbioru wszystkich liczb naturalnych i rodziny wszystkich jego podzbiorów. I w tym sensie, *wewnątrz* modelu przeliczalnego, istnieją zbiory o różnych mocach nieskończonych. Tak więc, TLS ukazuje *relatywność* pewnych pojęć mnogościowych. Nadto, wiadomo, że jeśli teoria mnogości jest niesprzeczna, to jest nierozstrzygalna. Niezależność pewnych zdań (np. pewnika wyboru, uogólnionej hipotezy kontinuum, aksjomatu konstruowalności, aksjomatu determinacji, itd.) od pozostałych aksjomatów pokazuje, że trudno jest sensownie mówić o jedynym, *zamierzonym* modelu teorii mnogości. Problem ten nie spędza jednak snu z powiek ,,normalnym'' matematykom – posługują się oni swobodnie pojęciami mnogościowymi, pozostawiając filozoficzne rozterki związane z podstawami teorii mnogości logikom.

Drugim aspektem PLS jest zależność między środkami wyrażania dostępnymi w klasycznej logice pierwszego rzędu a ,,światem przedstawianym'' za pomocą języka tejże logiki. Do zbudowania języka klasycznej logiki predykatów wystarcza skończona liczba symboli (co najmniej dwa). Możemy jednak także założyć, że mamy do dyspozycji przeliczalnie nieskończoną liczbę symboli. W każdym z tych przypadków liczba wszystkich skończonych ciągów takich symboli jest przeliczalna, a ponieważ każde wyrażenie (formuła, term) jest skończonym ciągiem symboli, więc liczba tych wyrażeń jest przeliczalna. W szczególności, jest przeliczalnie wiele termów domkniętych, a więc wyrażeń mogących służyć za nazwy elementów uniwersum (odniesienia przedmiotowego). Zatem, jeśli mamy do czynienia z uniwersum nieprzeliczalnym, to *nieprzeliczalnie* wiele jego elementów (a więc prawie wszystkie!) nie może zostać jednoznacznie nazwanych, czyli desygnowanych przez term domknięty (stałą indywiduową bądź term zbudowany ze stałych i symboli funkcyjnych; wykluczmy użycie w tego typu termach występowanie operatora deskrypcyjnego) w ten sposób, aby różne obiekty były desygnowane przez różne termy. Wydaje się, że języki przeliczalne, którymi posługujemy się w standardowych użyciach logiki pozwalają na odróżnianie jedynie przeliczalnie wielu obiektów ze swoich odniesień przedmiotowych (por. np. Carnap 1937, s. 267—268).

Jaki sens ma mówienie, że konsekwencje TLS są ,,niezgodne z intuicją''? Może PLS nie jest wcale paradoksem, lecz jedynie pewną własnością systemów formalnych, przysługującą im ze względu na zasady przestrzegane przy ich konstruowaniu? Uważamy, że odpowiedź na drugie z tych pytań jest twierdząca (niektórzy proponują nawet mówić raczej o *efekcie* Löwenheima-Skolema niż o PLS). Jeśli zaś idzie o pierwsze pytanie, to zauważmy, że podobnych ,,zderzeń'' różnorakich intuicji z konsekwencjami założeń uznanych za oczywiste jest w matematyce wiele – często podawanymi przykładami są: paradoksalny rozkład kuli opisany w twierdzeniu Banacha-Tarskiego, ,,dziwne'' funkcje (w rodzaju funkcji Peano lub Hilberta – ciągłych, nigdzie nie różniczkowalnych i wypełniających kwadrat), ,,lokalna zgodność'' w kolizji z ,,globalną niezgodnością'' w grafikach Eschera lub innych reprezentacjach graficznych różnych ,,niemożliwych figur'', itd. Możemy uznawać, że pewne własności systemów formalnych (w rodzaju PLS) są niepożądane lub zaskakujące, lecz wyrażamy w ten sposób jedynie nasz dyskomfort intelektualno-emocjonalny. Ustalenie reguł gry (np. przyjęcie, że *właściwą* – do danych celów – logiką jest logika pierwszego rzędu) ma swoje konsekwencje niezależne od zachcianek i oczekiwań grających. Stwierdzanie, że konsekwencje TLS są niezgodne z intuicją nie ma statusu podobnego np. do tego, jaki ma teza Churcha, głosząca iż formalizmy proponowane dla scharakteryzowania intuicyjnego pojęcia obliczalności (funkcje rekurencyjne, maszyny Turinga, algorytmy Markowa, itp.) są trafne. *Nasze* intuicje związane z pojęciami mnogościowymi (w szczególności, z charakteryzowanymi w teorii mnogości pojęciami: nieskończoności, przeliczalności, nieprzeliczalności) oddawane są w aksjomatach teorii mnogości. Jeśli decydujemy się na pracę w logice pierwszego rzędu, to własność wyrażaną w PLS przyjąć należy do wiadomości. Jeżeli wybierzemy np. logikę drugiego rzędu, to uzyskamy możliwość kategorycznego scharakteryzowania modeli, utracimy jednak inne własności metalogiczne (przede wszystkim, pełność – własność gwarantującą, iż środki dowodowe dobrze korespondują z relacją wynikania). Jeśli chcemy, by własność wyrażana w PLS nie przysługiwała systemom formalnym, to dokonać należy rewizji zasad ich tworzenia. A to ostatnie nie zawsze wydaje się pożądane i solidnie uzasadnione. Pomijamy w tym miejscu problematykę związaną np. z akceptowaniem bądź odrzucaniem pewnych metod uznawanych za niekonstruktywne (np. dowody istnienia odwołujące się do prawa wyłączonego środka, użycia pewnika wyboru), jako wykraczającą poza ramy tego krótkiego artykułu.
Zwróćmy jeszcze tylko uwagę na to, iż PLS związany jest także z definiowalnością. Podając przykłady zbiorów nieprzeliczalnych matematycy stosują – z konieczności – definicje niepredykatywne. Metaforyczne stwierdzenia o relatywnej jedynie stratyfikacji mocy nieskończonych poddawane są też oczywiście precyzyjnej analizie (zob. np. system teorii mnogości Σ zaproponowany przez Wanga (Wang 1962)).

Nie jesteśmy w stanie sprawozdać tu wszystkich znanych nam komentarzy dotyczących PLS. Ograniczmy się zatem do kilku obserwacji znalezionych w literaturze przedmiotu, które wydają się nam szczególnie interesujące.

Skolem. Już w pracy (Skolem 1922), która jest tekstem wykładu wygłoszonego na Piątym Kongresie Matematyków Skandynawskich w Helsinkach (4—7 sierpnia 1922) autor mocno podkreśla relatywność pojęć teorii mnogości, wynikającą z TLS. Niechętnie odnosi się do przekonania wielu matematyków, że aksjomaty teorii mnogości Zermelo mogą zostać uznane za stanowiące solidne podstawy dla całej matematyki. Poglądy Skolema wyrażone w tym artykule scharakteryzować można chyba jako zbliżone do podejść konstruktywnych w teorii mnogości. Przypomnijmy jeszcze, na marginesie, że w omawianej pracy Skolem precyzuje pojęcie własności określonej, używane nieformalnie przez Zermelo, formułuje aksjomat zastępowania, podaje uwagi dotyczące pojęcia ufundowania. Teoria, którą znamy pod nazwą teorii mnogości Zermelo-Fraenkla, powinna być – gwoli sprawiedliwości – nazywana teorią Zermelo—Skolema—Fraenkla. Warto także podkreślić, że Thoralf Skolem znacząco przyczynił się do przyjęcia logiki pierwszego rzędu za standard, względem którego inne systemy określane są jako nieklasyczne. Cytowane tu prace Skolema pisane są właśnie w momencie, gdy standard ten powstawał; lektura prac logicznych z tego okresu pozwala na śledzenie procesu ,,kodyfikacji świadomości metodologicznej'' w rozważanej dyscyplinie.

von Neumann. W jednej ze swoich prac poświęconych podstawom teorii mnogości (von Neumann 1925) matematyk ten stwierdza, że relatywność pojęć dotyczących mocy zbiorów dostarcza uderzających dowodów na to, jak formalistycznie pojmowana teoria zbiorów odseparowana jest od ,,wszystkiego co intuicyjne''. Tylko moce skończone i moc przeliczalnie nieskończona są znaczące – cała reszta to ,,formalistyczna fikcja''.

Myhill. Dwie prace Myhilla (Myhill 1951, 1952) dotyczą PLS. W pierwszej z wymienionych prac autor zastanawia się nad różnymi aspektami (ograniczeń) metody formalnej (aksjomatycznej). Gdy predykatowi ,,być elementem'' nadamy zamierzoną interpretację (w jakimś standardowym modelu teorii mnogości), to – wynikający z TLS – fakt, że rozważana teoria ma model przeliczalny wcale nie oznacza, iż w tymże (niestandardowym) modelu interpretacja tego predykatu odpowiada relacji należenia. Ograniczenia narzucane przez formalizm stosowany w opisie jakichś obiektów są m.in. rezultatem proponowanej interpretacji symboli tego formalizmu.

Quine. Niektóre związki TLS z problemami redukcji ontologicznej omawiane są w (Quine 1966). Autor zwraca uwagę, że dowód TLS dotyczy przyporządkowania formułom jakiejś (niesprzecznej) teorii pierwszego rzędu odpowiednich prawdziwych formuł arytmetycznych. Nie wyznaczamy jednak tym samym przyporządkowania obiektom wyjściowego modelu obiektów arytmetycznych – przyporządkowania zachowującego zależności strukturalne.

Resnik. W artykule (Resnik 1966) autor nazywa Skolemitami tych logików, którzy – odwołując się do TLS – przekonują, że zmuszeni jesteśmy uznać *absolutną* przeliczalność wszystkich zbiorów, jako że aksjomatyczne teorie mnogości dotyczą zbiorów, które są nieprzeliczalne jedynie w sensie relatywnym. Zwalcza tezy Skolemitów postulujące, iż zbiory nieprzeliczalne w jednym systemie są przeliczalne w innym, wskazując m.in. na trudności z międzysystemową identyfikacją zbiorów. Pokazuje nieprawomocność prób redukcji teorii mnogości do arytmetyki. Zauważa, że choć nie istnieje jakiś absolutny punkt widzenia dotyczący zbiorów, to istnieje pewien zespół twierdzeń o zbiorach wspólny wszystkim teoriom mnogości. Niektóre zagadnienia teorii mnogości rozstrzygnąć można jedynie na mocy aksjomatycznej decyzji. Decydująca jest przy tym rola, jaką w całokształcie matematyki i jej zastosowań może posiadać dane rozstrzygnięcie (jak zauważa to Suszko w recenzji pracy Resnika – zob. (Suszko 1967)).

Hunter. W znanym podręczniku (Hunter 1982) na stronie 170 znaleźć można zwięzły i trafny komentarz do PLS. Twierdzenie ,,Istnieje nieprzeliczalnie wiele zbiorów'', sformułowane w jakiejś aksjomatycznej teorii mnogości i prawdziwe w standardowych jej modelach nie może być interpretowane w modelu niestandardowym (otrzymanym na mocy TLS) jako głoszące, iż w uniwersum takiego modelu istnieje nieprzeliczalnie wiele jakichkolwiek obiektów. Jak widać z dowodów stosownych metatwierdzeń, twierdzenie to nie dotyczy zbiorów, lecz termów domkniętych rozważanej teorii – wyraża ono *jakąś* prawdę o tego typu termach.

Wójtowicz. Stanowisko realizmu mnogościowego omawiane jest w (Wójtowicz 1999). Zwraca się uwagę, że relatywność pojęć mnogościowych wynika z małej mocy wyrażeniowej języków używanych do opisu świata zbiorów. Teoria mnogości, a nawet jakiekolwiek jej zupełne rozszerzenie w języku pierwszego rzędu nie może być kategoryczna, tzn. nie może opisać, z dokładnością do izomorfizmu, uniwersum mnogościowego. Nadto, inaczej niż w przypadku arytmetyki Peano, nie możemy dla teorii mnogości scharakteryzować modelu standardowego, zbudowanego z ,,prawdziwych'' zbiorów (nie mamy bowiem możliwości w przypadku teorii mnogości odwołania się do jakiejś ,,wyższej instancji'', jaką dla PA stanowi ZFC). Zjawisko relatywności pojęć mnogościowych stało się szczególnie widoczne po wypracowaniu przez Cohena metody *forcingu*. Stosowanie techniki *forcingu* przekształca ,,relatywizm Skolema'' w ,,relatywizm Cohena''.

Woleński. TLS ma konsekwencje dla decyzji, czy tezę pierwszego rzędu uznamy za dobrze uzasadnioną, jak zauważa Woleński (Woleński 1993). Teza pierwszego rzędu głosi, przypomnijmy, iż *właściwą* logiką jest klasyczna logika pierwszego rzędu. Autor sądzi, że TLS i jego następstwa korespondują z faktem, że logika jako taka nie wyróżnia żadnych modeli. Uniwersalność logiki powiązana jest z ograniczeniami jej środków wyrażania. Logika nie wyróżnia stałych pozalogicznych. Poza logiką (w formalizacji teorii matematycznych) konsekwencje TLS są oczywiście ceną płaconą za formalizację w językach elementarnych. Teza pierwszego rzędu sugeruje, że twierdzenie Lindströma charakteryzuje adekwatnie nie tylko logikę pierwszego rzędu, ale i to, co chcielibyśmy za logikę uważać.

Putnam. Na otwarciu Zimowego Zjazdu Towarzystwa Logiki Symbolicznej w Waszyngtonie, D.C., 29 grudnia 1977 roku Putnam wygłosił odczyt *Modele i rzeczywistość* (Putnam 1998). Praca ta doczekała się mnóstwa komentarzy. Autor wykorzystuje w niej TLS oraz PLS dla argumentacji na rzecz weryfikacjonizmu ,,jako metody zachowania [...] poglądu realizmu naukowego lub empirycznego''. Utrzymuje, iż PLS ,,*jest* antynomią, lub czymś do niej zbliżonym, w *filozofii języka*''. Jeśli intuicyjne pojęcie zbioru nie jest uchwycone przez aksjomaty teorii mnogości, to naturalne jest założenie, iż uchwytuje je co innego – nasze ,,rozumienie'', które sprowadza się do naszego sposobu posługiwania się językiem. Putnam stara się pokazać, że wszystkie zastosowania języka, wszystkie ograniczenia teoretyczne i operacyjne nie ustalają jednak jednoznacznie zamierzonych interpretacji w większym stopniu niż sama aksjomatyczna teoria mnogości.

Bays. Polemikę z poglądami Putnama zawiera praca (Bays 2001). Timothy Bays zajmował się paradoksem Skolema także w jednej ze swoich rozpraw doktorskich (*Reflections on Skolem's Paradox*, 2000; tekst tej rozprawy nie jest nam znany w momencie pisania tych słów, w Internecie dostępny jest jedynie jej abstrakt). Bays wskazuje na pewne nieścisłości matematyczne w argumentacji Putnama. Podważa również uzasadnienia Putnama dotyczące zdeterminowania zamierzonych interpretacji poprzez ograniczenia teoretyczne i operacyjne.

Suszko. Na szczególną uwagę zasługuje praca Romana Suszki *Canonic Axiomatic Systems* (Suszko 1951), stanowiąca tekst jego rozprawy habilitacyjnej obronionej 19 listopada 1951 roku na Uniwersytecie Poznańskim (recenzentami byli: Kazimierz Ajdukiewicz, Andrzej Mostowski oraz Władysław Orlicz). Suszko przedstawia w niej eksplikację PLS nie odwołującą się bezpośrednio do TLS. Punktem wyjścia jest pewien system teorii mnogości (M), podobny do systemów rozważanych przez Bernaysa i Gödla. W systemie tym udowodnić można istnienie zbiorów nieprzeliczalnych. Wykorzystując znane propozycje Tarskiego i Quine'a Suszko buduje metasystem (μM) dla tego systemu. W metasystemie wprowadza się pojęcia k-nazwy oraz k-desygnowania (charakteryzowane już wcześniej przez Suszkę w jego rozprawie doktorskiej, obronionej również w Poznaniu w 1948 roku – zob. (Suszko 1949)). Obiekty z uniwersum systemu, które są k-desygnowane przez k-nazwy to obiekty *konstruowalne* w (M). Pewne dalsze konstrukcje metalogiczne – których, ze względu na ich złożoność nie będziemy tu omawiać – pozwalają uzyskać twierdzenia o relatywnej niesprzeczności rozważanych systemów. Jeśli uniwersum systemu (M) składa się wyłącznie z obiektów konstruowalnych, to mówimy, że system ten jest *kanoniczny*. Suszko stwierdza, że aksjomat wyrażający własność kanoniczności jest formalną eksplikacją tzw. *Beschränkheitsaxiom*, którego autorem jest Fraenkel i który – dodany na końcu aksjomatyki Fraenkla – głosi, że nie istnieją żadne inne zbiory oprócz tych, których istnienie wynika z przyjętych uprzednio aksjomatów. Metasystemy rozważane przez Suszkę są kanoniczne. Ponieważ zbiory konstruowalne w systemach kanonicznych są k-desygnowane przez k-nazwy (których jest przeliczalnie wiele), otrzymujemy formalną eksplikację PLS.

Spróbujmy na koniec odnieść się do postawionego w tytule pytania, pamiętając o wyszczególnionych powyżej dwóch aspektach PLS: pierwszym, związanym z relatywizmem pojęć mnogościowych oraz drugim, dotyczącym środków wyrażania dostępnych logice klasycznej. Nie sądzimy, że powiemy tu coś istotnie nowego – wyartykułujemy jedynie nasze przekonanie dotyczące PLS, podzielając poglądy tych, którzy odmawiają PLS statusu paradoksu. Pozwólmy sobie na parę uwag w nieco lżejszym tonie: da się żyć z efektem Skolema. Twierdzenia limitacyjne niosą przesłanie optymistyczne: nierozstrzygalność bogatszych teorii skłania do wiary w sens pracy (nie da się powierzyć wszystkiego maszynom), ich niezupełność wiąże się z twórczym charakterem procedur dedukcyjnych używanych w matematyce, brak kategoryczności także może cieszyć np. osoby o skłonnościach do mistycznych zauroczeń, itd.

Relatywność pojęć mnogościowych była jednym z powodów rozwijania intensywnych badań w podstawach teorii mnogości. Mimo wielkich w tej dziedzinie osiągnięć (np. w ustalaniu niezależności od ZF licznych zdań, wyrafinowanych technicznie badań modeli teorii mnogości, itd.), wydaje się, że badania te nie przyniosły dotąd definitywnych rozstrzygnięć w podstawach matematyki. Nie można wykluczyć, że takie definitywne rozstrzygnięcia są nieosiągalne – że np. intuicje dotyczące zbiorów są dynamiczne, rozwijają się w trakcie uzyskiwania nowej wiedzy o zbiorach, czy – ogólniej – w trakcie uprawiania matematyki (zob. np. (Wójtowicz 2002, s. 33), gdzie przywołuje się opinię Mostowskiego w tej sprawie). Traktowanie teorii mnogości jako teorii *matematycznej* odbiera konsekwencjom TLS walor paradoksalności.

W naukach empirycznych stosujemy ,,nieczystą'' teorię mnogości – rozpatrujemy uniwersa złożone z najróżniejszego rodzaju indywiduów (np. uwzględniając położenia i chwile czasowe, reprezentowane przez układy liczb rzeczywistych). Siłą rzeczy, TLS zachowuje tu swoją ważność, a więc także teorie empiryczne mają modele niestandardowe, niezamierzone. Jednak zastosowanie mają tu także, *mutatis mutandis*, przywołane wyżej komentarze, podważające przekonanie o paradoksalności konsekwencji TLS.

Czy istnieją jakieś analogie między PLS a tezami relatywizmu i determinizmu językowego Sapira i Whorfa? Sformułowanie: ,,Język wyznacza obraz świata'' służyło wielokrotnie do snucia nieuzasadnionych spekulacji. Rozsądne jest chyba zminimalizowanie tezy Sapira-Whorfa do stwierdzenia, iż poszczególne języki etniczne *gramatykalizują* różne rodzaje informacji, a to jaka informacja jest zgramatykalizowana w danym języku (tj. wyrażana obligatoryjnie oraz w sposób regularny) może mieć wpływ m.in. na kategoryzację danych doświadczenia. Sądzimy, że tak rozumiana teza relatywizmu językowego jest do pogodzenia ze słynnym *dictum* Bocheńskiego: ,,Syntax reflects ontology''. Uzgodnienie takie musi jednak być podporządkowane wyraźnemu sprecyzowaniu, czego dotyczy teoria języka. Na pytanie: ,,Ile jest języków?'' dać można szereg (poprawnych!) odpowiedzi, np.:

1. Języków jest tyle, ile wyliczają ich Wielcy Językoznawcy (a więc np. 3500 lub 6500).
2. Jest kontinuum możliwych języków (rozumianych jako zbiory skończonych ciągów elementów skończonego słownika lub alfabetu).
3. Jest przeliczalnie wiele możliwych języków (rozumianych jak w 2., z dodatkowym założeniem wymagającym, aby struktura języka podana była w sposób efektywny, obliczalny).
4. Języków (typów języków) jest tyle, ile można ich odróżnić w rozważaniach typologicznych.
5. Jest jeden Język Naturalny; poszczególne języki etniczne oraz języki możliwe są jego realizacjami.

W każdej z powyższych odpowiedzi języki traktowane mogą być jako stosowne struktury relacyjne (lub algebraiczne), co pozwala myśleć o zastosowaniu w lingwistyce metod wypracowanych w teorii modeli oraz algebrze uniwersalnej. Nadto, rozważania metalogiczne odnoszone mogą być wtedy do branych pod uwagę teorii lingwistycznych, a nie do samego języka naturalnego. Uważamy, że tak właśnie być powinno – twierdzenia metalogiczne dotyczą języków sformalizowanych, a nie społecznego procesu komunikowania się. Właściwym obszarem do refleksji nad tezą relatywizmu językowego oraz konsekwencji TLS dla badań języka naturalnego jest metalingwistyka. W szczególności, na terenie metalingwistyki rozstrzygane powinny być kwestie dotyczące pożądanej ,,mocy wyrażania'' teorii lingwistycznych, w rodzaju pytania: *Jakiej logiki potrzebuje lingwistyka?* Zauważmy, że postawione przed chwilą pytanie ma charakter metodologiczny, a nie dotyczy spekulacji na temat np. tzw. logiki języka naturalnego lub etnologiki.

Uwagi metatekstowe.

1. Sądzę, że rozważania metalogiczne mogą okazać się przydatne w odniesieniu do stworzonej przez Profesora Leszka Nowaka idealizacyjnej koncepcji nauki. W szczególności, PLS jest w literaturze przedmiotu często przywoływany, gdy mówi się o modelach zamierzonych teorii.

2. Chciałbym podziękować Profesorowi Januszowi Czelakowskiemu, na którego seminarium w Instytucie Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Opolskiego miałem możliwość omawiania problematyki dotyczącej efektu Skolema.
3. Już po ukończeniu niniejszego tekstu otrzymałem od Tima Baysa jego wspomnianą wyżej rozprawę *Reflections on Skolem's Paradox.* Praca zawiera bardzo wnikliwą analizę logicznych, matematycznych i filozoficznych aspektów PLS.

Wybrane pozycje bibliograficzne

Bays, T. (2001). On Putnam and his Models. *Journal of Philosophy* **XCVIII**, 331—350.

Carnap, R. (1937). *The logical syntax of language*. London.

van Heijenoort, J. (ed.) (1967). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879—1931.* Cambridge, Mass. [Zawiera angielskie przekłady cytowanych tu prac: (Löwenheim 1915), (von Neumann 1925), (Skolem 1920), (Skolem 1922).]

Hunter, G. (1982). *Metalogika*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Löwenheim, L. (1915). Über Möglichkeiten im Relativkalkül. *Mathematische Annalen* **68**, 169—207.

Mostowski, A. (1948). *Logika matematyczna.* Warszawa-Wrocław.

Mostowski, A. (1955). Współczesny stan badań nad podstawami matematyki. *Prace Matematyczne* **1**, 13—55.

Myhill, J. (1951). On the ontological significance of the Löwenheim-Skolem theorem. W: M. White (ed.), *Academic Freedom, Logic and Religion*, The University of Pennsylvania Press, 57—70.

Myhill, J. (1952). The hypothesis that all classes are nameable. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **38**, 979.

Murawski, R. (1993). Rozwój programu Hilberta. *Wiadomości Matematyczne* **XXX**, 51—72.

von Neumann, J. (1925). Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **154**, 219—240.

Putnam, H. (1998). Modele i rzeczywistość. W: H. Putnam *Wiele twarzy realizmu i inne eseje.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 185—224.

Quine, W.V.O. (1966). Ontological Reduction and the World of Numbers. W: W.V.O. Quine *The Ways of Paradox and Other Essays.* New York: Random House, 199—207.

Resnik, M. (1966). On Skolem's paradox. *The Journal of Philosophy* **LXIII/15**, 425—438.

Skolem, T. (1919). Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalkuls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvedenskabelig klasse*, no. **3**.

Skolem, T. (1920). Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvedenskabelig klasse,* no. **4**.

Skolem, T. (1922). Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4—7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse* (Akademiska Bokhandeln, Helsinki, 1923).

Suszko, R. (1949). O analitycznych aksjomatach i logicznych regułach wnioskowania. Z teorii definicji. *Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk, Prace Komisji Filozoficznej* **7** no. 5, 1—30 oraz 31—59.

Suszko, R. (1951). Canonic axiomatic systems. *Studia Philosophica* **4** (1949—1950, opublikowane w 1951), 301—330.

Suszko, R. (1967). Wyprawa przeciw Skolemitom. (Recenzja z: Resnik 1966). *Studia Filozoficzne*, **2** (**49**), 264—266.

Wang, H. (1955). On denumarable bases of formal systems. *Mathematical interpretation of formal systems*. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 57—84.

Wang, H. (1962). *A survey of mathematical logic.* Peking: Science Press, Amsterdam: North Holland Publishing Company.

Woleński, J. (1993). *Metamatematyka a epistemologia.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Wójtowicz, K. (1999). *Realizm mnogościowy. W obronie realistycznej interpretacji matematyki.* Warszawa: Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego.

Wójtowicz, K. (2002). *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla.* Kraków: OBI, Tarnów: BIBLOS.