

Logika Matematyczna 16–17

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Semantyka KRP (3)

Plan na dziś

Niniejsza prezentacja zawiera kilkadziesiąt zadań dotyczących semantyki KRP. Rozwiązania zostaną podane później, na razie spróbuj **Samodzielności**.

Przypominam, że zadaniem domowym było też rozwiązanie ćwiczeń 59–77 ze zbioru *Ćwiczenia z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz.

Proszę potraktować to jako tzw. **samodzielną pracę studenta** na zajęciach 6 marca 2008 roku.

Język KRP

17.1.1. Podaj zmienne wolne i związane formuł:

- $\forall x (P(x, y) \rightarrow \exists y (Q(x) \wedge R(x, y)))$
- $\exists x (P(x) \wedge \forall z (Q(z) \rightarrow R(x, z)))$
- $\exists x (P(x) \wedge \forall x (Q(x) \rightarrow R(x, y)))$.

17.1.2. Czy term t jest podstawialny za zmienną x w formule α , gdzie:

- t jest postaci $f(x)$, a α jest formułą $\forall y \exists z (P(y, z) \rightarrow Q(x))$;
- t jest postaci $g(x, y)$, a α jest formułą $\forall y \forall z (P(x, y) \rightarrow Q(z))$;
- t jest postaci $f(a)$, a α jest formułą $\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))$.

Język KRP

17.1.3. Podaj wartość $S(t, x, t')$ dla:

- t postaci $f(a)$ oraz t' postaci $g(x, f(x))$;
- t postaci $f(x, f(x, x))$ oraz t' postaci $g(x, g(x, y))$;
- t postaci $f(x)$ oraz t' postaci $g(a, a)$.

17.1.4. Podaj wartość $S(t, x, \alpha)$ dla:

- t postaci y oraz α postaci $\forall x \exists z (P(x) \rightarrow Q(x, z))$;
- t postaci $f(x)$ oraz α postaci $\forall x \exists z (P(x) \rightarrow Q(x, z))$;
- t postaci $g(x, f(y))$ oraz α postaci $P(x) \rightarrow Q(f(x), g(x, x))$.

Język KRP

17.1.5. Opisz zbiór wszystkich termów:

- utworzonych z jednej zmiennej x oraz jednego symbolu funkcyjnego jednoargumentowego f ;
- utworzonych z jednej zmiennej x oraz jednego symbolu funkcyjnego dwuargumentowego g ;
- utworzonych z jednej zmiennej x , jednego termu bazowego t oraz jednego symbolu funkcyjnego dwuargumentowego g .

17.1.6. Które z podanych niżej formuł są zdaniem języka KRP:

- $\forall x \exists y \forall z (P(x, y, z) \rightarrow Q(x, x, x))$
- $\exists x ((P(x) \vee Q(y)) \wedge \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)))$
- $\forall x \exists y (P(f(y), x) \wedge Q(x, f(y)))$.

Relacja spełniania

17.2.1. Niech \mathfrak{M} będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech \prec będzie predykatem denotującym relację $<$. Niech $w = \langle 1, 1, \dots \rangle$ będzie wartościowaniem zmiennych w uniwersum \mathfrak{M} o stałej wartości 1. Czy wartościowanie w spełnia formułę α w strukturze \mathfrak{M} , dla:

- α postaci $\exists x_1 (x_1 \prec x_2) \vee \exists x_2 (x_1 \prec x_2)$
- α postaci $\forall x_1 (x_1 \prec x_2) \vee \forall x_2 (x_1 \prec x_2)$
- α postaci $\exists x_1 (x_1 \prec x_2) \wedge \exists x_2 (x_1 \prec x_2)$
- α postaci $\forall x_1 (x_1 \prec x_2) \wedge \forall x_2 (x_1 \prec x_2)$.

Relacja spełniania

17.2.2. Niech \mathfrak{M} będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech \prec będzie predykatem denotującym relację $<$. Jakie wartościowania spełniają formułę α w strukturze \mathfrak{M} , dla:

- α postaci $\forall x_1 (x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1)$
- α postaci $\forall x_1 (x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$
- α postaci $\forall x_1 (x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2 (x_1 \prec x_2)$.

Relacja spełniania

17.2.3. Niech \mathfrak{M} będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech \prec będzie predykatem denotującym relację $<$. Czy formuła α jest prawdziwa w strukturze \mathfrak{M} , dla:

- α postaci $\forall x \forall y \exists z (x \prec z \wedge z \prec y)$
- α postaci $\forall x \forall y \exists z (z \prec x \wedge z \prec y)$
- α postaci $\forall x \forall y \exists z (x \prec z \wedge y \prec z)$.

Niech teraz \mathfrak{M} będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację niewiększości \leq . Niech \prec będzie predykatem denotującym relację \leq . Które z powyższych formuł są wtedy prawdziwe w strukturze \mathfrak{M} ?

Relacja spełniania

17.2.4. Niech \mathfrak{N} będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych, z operacjami: dodawania $+$, mnożenia \cdot i następnika „ $+1$ ” oraz relacją mniejszości $<$ i relacją identyczności $=$ oraz zerem 0 jako elementem wyróżnionym w uniwersum, zdefiniowanymi w zwykły sposób. Niech:

- \oplus denotuje operację dodawania
- \otimes denotuje operację mnożenia
- S denotuje operację następnika
- \prec denotuje relację mniejszości
- \doteq denotuje relację identyczności
- \bigcirc denotuje liczbę 0 .

Relacja spełniania

a) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze formuły, wyrażające następujące pojęcia:

- x jest podzielna bez reszty przez y
- x jest liczbą pierwszą
- x i y są względnie pierwsze
- x jest sumą dwóch kwadratów
- suma dzielników liczby x jest dodatnia
- x nie jest następnikiem żadnego dzielnika y
- x jest liczbą parzystą
- x jest największym wspólnym dzielnikiem y oraz z
- x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością y oraz z .

Relacja spełniania

b) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze następujące zdania i zastanowić się, które z nich są zdaniami prawdziwymi w strukturze \mathfrak{N} :

- Istnieje największa liczba pierwsza.
- Istnieje bardzo dużo liczb pierwszych.
- Każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych.
- Najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb jest mniejsza od ich największego wspólnego dzielnika.
- Istnieją dokładnie dwie różne liczby, dla których zachodzi:
 $3x^2 + 2x + 1 = 0$.
- Dodawanie jest rozdzielne względem mnożenia.
- Każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych.

17.2.5. Niech $\mathfrak{L} = \langle L, \sqsubseteq, \sqsubset \rangle$, gdzie \sqsubseteq jest częściowym porządkiem nieskończonego zbioru L . Oznacza to, że relacja \sqsubseteq jest w zbiorze L zwrotna, przechodnia oraz antysymetryczna. Niech relacja \sqsubset będzie zdefiniowana warunkiem: $x \sqsubset y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \sqsubseteq y$ oraz nieprawda, że $y \sqsubseteq x$. Niech predykat \doteq denotuje relację identyczności $=$, predykat \ll denotuje relację \sqsubseteq , a predykat \prec denotuje relację \sqsubset .

a) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze formuły, wyrażające następujące pojęcia:

- x jest elementem \sqsubseteq -minimalnym (nie istnieje element y różny od x taki, że x jest następnikiem, a y poprzednikiem w relacji \sqsubseteq)
- x jest elementem \sqsubseteq -maksymalnym (nie istnieje element y różny od x taki, że y jest następnikiem, a x poprzednikiem w relacji \sqsubseteq)
- x jest elementem \sqsubseteq -najmniejszym (x jest poprzednikiem w relacji \sqsubseteq względem każdego y)
- x jest elementem \sqsubseteq -największym (x jest następnikiem w relacji \sqsubseteq względem każdego y)
- x nie jest \sqsubseteq -następnikiem y oraz nie jest \sqsubseteq -poprzednikiem z .

b) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze następujące zdania i zastanowić się, które z nich są zdaniami prawdziwymi w strukturze \mathcal{L} :

- Porządek \sqsubseteq jest liniowy (ma dodatkowo własność spójności).
- Porządek \sqsubset jest gęsty (istnieją co najmniej dwa elementy pozostające w relacji \sqsubset oraz między każdymi dwoma elementami pozostającymi w relacji \sqsubset istnieje element \sqsubset -pośredni).
- Porządek \sqsubset jest dyskretny (każdy element, który ma \sqsubset -poprzednik (\sqsubset -następnik), ma też bezpośredni \sqsubset -poprzednik (bezpośredni \sqsubset -następnik)).
- Porządek \sqsubset nie jest ani gęsty, ani dyskretny.
- Istnieją elementy \sqsubseteq -nieporównywalne.
- Każde dwa elementy mają wspólny \sqsubseteq -poprzednik.
- Istnieją elementy \sqsubset -nieporównywalne.
- Każde dwa elementy mają wspólny \sqsubset -następnik.

Niech teraz L będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych, relacja \sqsubseteq będzie inkluzją, a \sqsubset inkluzją właściwą. Które z powyższych zdań są wtedy prawdziwe w $\mathcal{L} = \langle L, \sqsubseteq, \sqsubset \rangle$?

Tautologie KRP

17.3.1. Wykaż, że nie są tautologiami KRP:

- $(\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
- $(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$
- $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$.

17.3.2. Wykaż, że są tautologiami KRP:

- $\exists x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \exists x \beta)$
- $(\alpha \vee \forall x \beta) \rightarrow \forall x (\alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest zmienną wolną w α .
- $\forall x (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \forall x (\beta \rightarrow \neg \alpha)$.

17.3.3. Udowodnij, że następująca formuła jest prawdziwa w każdej strukturze skończonej, ale nie jest tautologią KRP:

- $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 ((P(x_2, x_3) \rightarrow P(x_1, x_3)) \rightarrow (P(x_1, x_1) \rightarrow P(x_2, x_1)))$.

Wynikanie logiczne w KRP

17.4.1. Wykaż, że ze zbioru X wynika logicznie zbiór Y , dla:

- $X = \{\forall x (\alpha \rightarrow \beta), \forall x (\beta \rightarrow \gamma)\}, Y = \{\forall x (\alpha \rightarrow \gamma)\}$
- $X = \{\forall x \alpha, \forall x \beta\}, Y = \{\forall x (\alpha \wedge \beta), \forall x (\alpha \vee \beta)\}.$

17.4.2. Wykaż, że ze zbioru X nie wynika logicznie formuła α , dla:

- $X = \{\forall x \exists y P(x, y), \exists x P(x, x)\}, \alpha$ postaci $\forall x P(x, x)$
- $X = \{\exists x P(x), \forall x (P(x) \vee Q(x))\}, \alpha$ postaci $Q(x).$

Teoria mnogości

Uwaga. Słuchacze tych wykładów mają za sobą kurs **Wstępu do Matematyki**, na którym omówiono rachunek zbiorów i relacji oraz rozwiązano wiele ćwiczeń dotyczących tej problematyki. Nie będziemy więc tego wszystkiego raz jeszcze rozpamiętywać. Poniżej podajemy jedynie kilka typowych ćwiczeń.

17.5.1. Zapisz w języku teorii mnogości:

- x jest funkcją różnowartościową z y na z .
- Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.
- Istnieje zbiór nieprzeliczalny.

Teoria mnogości

17.5.2. Podaj przykłady ukazujące, że następujące zdania nie są prawdziwe o wszelkich zbiorach:

- $(x \in y \wedge y \in z) \rightarrow x \in z$
- $(x \in y \wedge y \neq z) \rightarrow x \notin z$
- $(x \subseteq y \wedge y \in z) \rightarrow x \notin z$.

17.5.3. Pokaż, że są prawami rachunku zbiorów:

- $(x \subseteq y \wedge y \cap z = \emptyset) \rightarrow x \cap z = \emptyset$
- $x = x \cap y \rightarrow x \subseteq y$
- Produkt kartezjański dowolnej rodziny zbiorów niepustych jest niepusty.

Teoria mnogości

17.5.4. Udowodnij, że:

- operacje sumy \cup oraz różnicy $-$ można zdefiniować w terminach operacji: \cap oraz różnicy symetrycznej $\dot{\div}$;
- operacji sumy \cup nie można zdefiniować w terminach operacji iloczynu \cap oraz różnicy $-$.

17.5.5. Pokaż, że są prawami rachunku relacji:

- Niech $R \circ S$ oznacza złożenie relacji R i S , a R^{-1} niech oznacza konwers relacji R . Konwers złożenia relacji R i S jest złożeniem relacji S i R , czyli: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
- Relacja R w zbiorze X jest jednocześnie równoważnością i częściowym porządkiem wtedy i tylko wtedy, gdy jest relacją identyczności w X .
- Złożenie $R \circ S$ relacji równoważności R oraz S jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ S = S \circ R$.

Algebry Boole'a

17.6.1. Zapisz w języku teorii algebr Boole'a:

- Dopełnienie kresu górnego elementów x i y jest równe kresowi dolnemu dopełnień elementów x i y .
- Zbiór I elementów algebry jest jej ideałem, tj.: jest domknięty na operację kresu górnego oraz zawiera, wraz z każdym swoim elementem, wszystkie elementy od niego mniejsze.
- Zbiór F elementów algebry jest jej filtrem, tj.: jest domknięty na operację kresu dolnego oraz zawiera, wraz z każdym swoim elementem, wszystkie elementy od niego większe.

Algebry Boole'a

17.6.2. Podaj przykłady ukazujące, że następujące zdania nie są prawdziwe o wszelkich algebrach Boole'a:

- Istnieją atomy, tj. elementy minimalne algebry różne od jej zera.
- Istnieją koatomy, tj. elementy maksymalne algebry różne od jej jedyńki.
- Porządek elementów algebry nie jest liniowy.

Algebry Boole'a

17.6.3. Pokaż, że są prawami teorii algebr Boole'a:

- Kres górny elementów x i y jest równy kresowi górnemu elementu y oraz różnicy x i y .
- Dopełnienie kresu dolnego elementów x i y jest równe kresowi górnemu dopełnień elementów x i y .

17.6.4. Niech \mathbb{F} będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru nieskończonego X o skończonych dopełnieniach i niech \mathfrak{B} będzie algebrą Boole'a wszystkich podzbiorów zbioru X ze zwykłymi teoriomnogościowymi operacjami sumy, iloczynu oraz dopełnienia.

- Czy zbiór \mathbb{F} jest filtrem, czy ideałem algebry \mathfrak{B} ?
- Czy algebra \mathfrak{B} zawiera jakieś atomy lub koatomy?

Język KRP a języki etniczne

17.7.1. Podaj wyrażenia języka KRP odpowiadające strukturze składniowej następujących zdań języka polskiego:

- Są wstrętne prawdy i piękne fałszy.
- Kobiety i mężczyźni mają równe prawa przy nawiązywaniu lub rozwiązywaniu umowy o pracę.
- Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii.
- Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie.
- Nikt nigdy nikomu w żadnej sprawie nie ufa.

Język KRP a języki etniczne

17.7.2. Odczytaj w języku polskim odpowiedniki następujących formuł języka KRP, przy podanej interpretacji:

- $\forall x ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow R(x)); P(x) — x \text{ wdycha opary rtęci}, Q(x) — x \text{ kona, rzeźząc, pocąc się i mocząc}, R(x) — x \text{ świruje jarzábka.}$
- $\forall x (P(x) \rightarrow (\exists x \forall y (Q(x, y) \rightarrow \exists x \neg R(x))));$ $P(x) — x \text{ jest bezrobotny}, Q(x, y) — x \text{ jest bogatszy od } y, R(x) — x \text{ jest odpowiedzialny za stan gospodarki tego nieszczęsnego kraju.}$
- $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \forall x_5 ((M(x_1, x_2, x_3) \wedge M(x_4, x_3, x_5)) \rightarrow \exists x_6 (M(x_1, x_6, x_4) \wedge M(x_5, x_2, x_6))); M(x, y, z) — y \text{ leży między } x \text{ oraz } z, \text{ przy czym nie jest wykluczone, iż } y \text{ jest identyczny z } x \text{ lub } y \text{ jest identyczny z } z.$

Język KRP a języki etniczne

17.7.3. Które z poniższych wyrażeń są prawdami logicznymi lub fałszami logicznymi:

- Żaden papież nie był kobietą.
- Dawno, dawno temu wszystkie liczby były wymierne.
- Współżył z najstarszą mieszkanką naszej wsi, ale mieszkał u jej matki.
- Prawdy wieczne są odwieczne.
- Elipsy to takie lekko spłaszczone okręgi.