Logika Matematyczna 16–17

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Semantyka KRP (3)

Plan na dziś

Niniejsza prezentacja zawiera kilkadziesiąt zadań dotyczących semantyki KRP. Rozwiązania zostaną podane później, na razie spróbuj **Samodzielności**.

Przypominam, że zadaniem domowym było też rozwiązanie ćwiczeń 59–77 ze zbioru *Ćwiczenia z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz.

Proszę potraktować to jako tzw. **samodzielną pracę studenta** na zajęciach 6 marca 2008 roku.

Język KRP

17.1.1. Podaj zmienne wolne i związane formuł:

- $\forall x\,(P(x,y) \rightarrow \exists y\,(Q(x) \wedge R(x,y)))$
- $\exists x\,(P(x) \wedge \forall z\,(Q(z) \rightarrow R(x,z)))$
- $\exists x\,(P(x) \wedge \forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x,y)))$.

17.1.2. Czy term t jest podstawialny za zmienną x w formule α, gdzie:

- t jest postaci $f(x)$, a α jest formułą $\forall y \exists z\,(P(y,z) \rightarrow Q(x))$;
- t jest postaci $g(x,y)$, a α jest formułą $\forall y \forall z\,(P(x,y) \rightarrow Q(z))$;
- t jest postaci $f(a)$, a α jest formułą $\forall x \exists y\,(P(x) \vee Q(y))$.

Język KRP

17.1.3. Podaj wartość $S(t, x, t')$ dla:

- t postaci $f(a)$ oraz t' postaci $g(x, f(x))$;
- t postaci $f(x, f(x, x))$ oraz t' postaci $g(x, g(x, y))$;
- t postaci $f(x)$ oraz t' postaci $g(a, a)$.

17.1.4. Podaj wartość $S(t, x, \alpha)$ dla:

- t postaci y oraz α postaci $\forall x \exists z\, (P(x) \rightarrow Q(x, z))$;
- t postaci $f(x)$ oraz α postaci $\forall x \exists z\, (P(x) \rightarrow Q(x, z))$;
- t postaci $g(x, f(y))$ oraz α postaci $P(x) \rightarrow Q(f(x), g(x, x))$.

Język KRP

17.1.5. Opisz zbiór wszystkich termów:

- utworzonych z jednej zmiennej x oraz jednego symbolu funkcyjnego jednoargumentowego f;
- utworzonych z jednej zmiennej x oraz jednego symbolu funkcyjnego jednoargumentowego f i jednego symbolu funkcyjnego dwuargumentowego g;
- utworzonych z jednej zmiennej x, jednego termu bazowego t oraz jednego symbolu funkcyjnego dwuargumentowego g.

17.1.6. Które z podanych niżej formuł są zdaniami języka KRP:

- $\forall x \exists y \forall z\, (P(x, y, z) \rightarrow Q(x, x, x))$
- $\exists x\, ((P(x) \vee Q(y)) \wedge \forall x \forall y\, (P(x) \rightarrow Q(y)))$
- $\forall x \exists y\, (P(f(y), x) \wedge Q(x, f(y)))$.

Relacja spełniania

17.2.1. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Niech $w = \langle 1, 1, \ldots \rangle$ będzie wartościowaniem zmiennych w uniwersum $\mathfrak{M}$ o stałej wartości 1. Czy wartościowanie w spełnia formułę α w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- α postaci $\exists x_1 \, (x_1 \prec x_2) \vee \exists x_2 \, (x_1 \prec x_2)$
- α postaci $\forall x_1 \, (x_1 \prec x_2) \vee \forall x_2 \, (x_1 \prec x_2)$
- α postaci $\exists x_1 \, (x_1 \prec x_2) \wedge \exists x_2 \, (x_1 \prec x_2)$
- α postaci $\forall x_1 \, (x_1 \prec x_2) \wedge \forall x_2 \, (x_1 \prec x_2)$.

Relacja spełniania

17.2.2. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Jakie wartościowania spełniają formułę α w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- α postaci $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1)$
- α postaci $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$
- α postaci $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2\ (x_1 \prec x_2)$.

Relacja spełniania

17.2.3. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Czy formuła α jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- α postaci $\forall x \forall y \exists z\, (x \prec z \wedge z \prec y)$
- α postaci α postaci $\forall x \forall y \exists z\, (z \prec x \wedge z \prec y)$
- α postaci α postaci $\forall x \forall y \exists z\, (x \prec z \wedge y \prec z)$.

Niech teraz $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację niewiększości $\leqslant$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $\leqslant$. Które z powyższych formuł są wtedy prawdziwe w strukturze $\mathfrak{M}$?

Relacja spełniania

17.2.4. Niech $\mathfrak{N}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych, z operacjami: dodawania $+$, mnożenia $\cdot$ i następnika „$+1$" oraz relacją mniejszości $<$ i relacją identyczności $=$ oraz zerem 0 jako elementem wyróżnionym w uniwersum, zdefiniowanymi w zwykły sposób. Niech:

- $\oplus$ denotuje operację dodawania
- $\otimes$ denotuje operację mnożenia
- S denotuje operację następnika
- $\prec$ denotuje relację mniejszości
- $\doteq$ denotuje relację identyczności
- $\bigcirc$ denotuje liczbę 0.

Relacja spełniania

a) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze formuły, wyrażające następujące pojęcia:

- x jest podzielna bez reszty przez y
- x jest liczbą pierwszą
- x i y są względnie pierwsze
- x jest sumą dwóch kwadratów
- x jest większa od każdego podzielnika y
- x jest mniejsza od iloczynu swoich podzielników
- suma podzielników liczby x jest dodatnia
- x nie jest następnikiem żadnego podzielnika y
- x jest liczbą parzystą
- x jest największym wspólnym podzielnikiem y oraz z
- x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością y oraz z.

Relacja spełniania

b) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze następujące zdania i zastanowić się, które z nich są zdaniami prawdziwymi w strukturze $\mathfrak{N}$:

- Istnieje największa liczba pierwsza.
- Istnieje bardzo dużo liczb pierwszych.
- Każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych.
- Najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb jest mniejsza od ich największego wspólnego podzielnika.
- Istnieją dokładnie dwie różne liczby, dla których zachodzi: $3x^2 + 2x + 1 = 0$.
- Dodawanie jest rozdzielne względem mnożenia.
- Każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych.

17.2.5. Niech $\mathfrak{L} = \langle L, \sqsubseteq \rangle$, gdzie $\sqsubseteq$ jest częściowym porządkiem nieskończonego zbioru L. Oznacza to, że relacja $\sqsubseteq$ jest w zbiorze L zwrotna, przechodnia oraz antysymetryczna. Niech relacja $\sqsubset$ będzie zdefiniowana warunkiem: $x \sqsubset y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \sqsubseteq y$ oraz nieprawda, że $y \sqsubseteq x$. Niech predykat $\doteq$ denotuje relację identyczności $=$, predykat $\ll$ denotuje relację $\sqsubseteq$, a predykat $\prec$ denotuje relację $\sqsubset$.
a) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze formuły, wyrażające następujące pojęcia:

- x jest elementem $\sqsubseteq$-minimalnym (nie istnieje element y różny od x taki, że x jest następnikiem, a y poprzednikiem w relacji $\sqsubseteq$)
- x jest elementem $\sqsubseteq$-maksymalnym (nie istnieje element y różny od x taki, że y jest następnikiem, a x poprzednikiem w relacji $\sqsubseteq$)
- x jest elementem $\sqsubseteq$-najmniejszym (x jest poprzednikiem w relacji $\sqsubseteq$ względem każdego y)
- x jest elementem $\sqsubseteq$-największym (x jest następnikiem w relacji $\sqsubseteq$ względem każdego y)
- x nie jest $\sqsubseteq$-następnikiem y oraz nie jest $\sqsubseteq$-poprzednikiem z.

b) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze następujące zdania i zastanowić się, które z nich są zdaniami prawdziwymi w strukturze $\mathfrak{L}$:

- Porządek $\sqsubseteq$ jest liniowy (ma dodatkowo własność spójności).
- Porządek $\sqsubseteq$ jest gęsty (istnieją co najmniej dwa elementy pozostające w relacji $\sqsubseteq$ oraz między każdymi dwoma elementami pozostającymi w relacji $\sqsubseteq$ istnieje element $\sqsubseteq$-pośredni).
- Porządek $\sqsubseteq$ jest dyskretny ($\sqsubseteq$ nie jest gęsty).
- Porządek $\sqsubseteq$ nie jest ani gęsty, ani dyskretny.
- Istnieją elementy $\sqsubseteq$-nieporównywalne.
- Każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubseteq$-poprzednik.
- Istnieją elementy $\sqsubset$-nieporównywalne.
- Każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubset$-następnik.

Niech teraz L będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych, relacja $\sqsubseteq$ będzie inkluzją, a $\sqsubset$ inkluzją właściwą. Które z powyższych zdań są wtedy prawdziwe w $\mathfrak{L} = \langle L, \sqsubseteq \rangle$?

Tautologie KRP

17.3.1. Wykaż, że nie są tautologiami KRP:

- $(\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$
- $(\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)) \rightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$
- $\forall x \exists y\, P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x\, P(x, y)$.

17.3.2. Wykaż, że są tautologiami KRP:

- $\exists x\, (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\, \alpha \rightarrow \exists x\, \beta)$
- $(\alpha \vee \forall x\, \beta) \rightarrow \forall x\, (\alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest zmienną wolną w α.
- $\forall x\, (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \forall x\, (\beta \rightarrow \neg\alpha)$.

17.3.3. Udowodnij, że następujące formuły są prawdziwe w każdej strukturze skończonej, ale nie są tautologiami KRP:

- $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3\, ((P(x_2, x_3) \rightarrow P(x_1, x_3)) \rightarrow (P(x_1, x_1) \rightarrow P(x_2, x_1)))$
- $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3\, (P(x_1, x_1) \wedge (P(x_1, x_3) \rightarrow (P(x_1, x_2) \vee P(x_2, x_3)))) \rightarrow \exists x_4 \forall x_5\, P(x_4, x_5)$.

Wynikanie logiczne w KRP

17.4.1. Wykaż, że ze zbioru X wynika logicznie zbiór Y, dla:

- $X = \{\forall x\,(\alpha \rightarrow \beta), \forall x\,(\beta \rightarrow \gamma)\}$, $Y = \{\forall x\,(\alpha \rightarrow \gamma)\}$
- $X = \{\forall x\,\alpha, \forall x\,\beta\}$, $Y = \{\forall x\,(\alpha \wedge \beta), \forall x\,(\alpha \vee \beta)\}$.

17.4.2. Wykaż, że ze zbioru X nie wynika logicznie formuła α, dla:

- $X = \{\forall x \exists y\, P(x, y), \exists x\, P(x, x)\}$, α postaci $\forall x\, P(x, x)$
- $X = \{\exists x\, P(x), \forall x\,(P(x) \vee Q(x))\}$, α postaci $Q(x)$.

Teoria mnogości

Uwaga. Słuchacze tych wykładów mają za sobą kurs **Wstępu do Matematyki**, na którym omówiono rachunek zbiorów i relacji oraz rozwiązano wiele ćwiczeń dotyczących tej problematyki. Nie będziemy więc tego wszystkiego raz jeszcze rozpamiętywać. Poniżej podajemy jedynie kilka typowych ćwiczeń.

17.5.1. Zapisz w języku teorii mnogości:

- x jest funkcją różnowartościową z y na z.
- Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.
- Istnieje zbiór nieprzeliczalny.

Teoria mnogości

17.5.2. Podaj przykłady ukazujące, że następujące zdania nie są prawdziwe o wszelkich zbiorach:

- $(x \in y \wedge y \in z) \rightarrow x \in z$
- $(x \in y \wedge y \neq z) \rightarrow x \notin z$
- $(x \subseteq y \wedge y \in z) \rightarrow x \notin z$.

17.5.3. Pokaż, że są prawami rachunku zbiorów:

- $(x \subseteq y \wedge y \cap z = \emptyset) \rightarrow x \cap z = \emptyset$
- $x = x \cap y \rightarrow x \subseteq y$
- Produkt kartezjański dowolnej rodziny zbiorów niepustych jest niepusty.

Teoria mnogości

17.5.4. Udowodnij, że:

- operacje sumy $\cup$, iloczynu $\cap$ oraz różnicy $-$ można zdefiniować w terminach operacji: $\cap$ oraz różnicy symetrycznej $\div$;
- operacji sumy $\cup$ nie można zdefiniować w terminach operacji iloczynu $\cap$ oraz różnicy $-$.

17.5.5. Pokaż, że są prawami rachunku relacji:

- Niech $R \circ S$ oznacza złożenie relacji R i S, a R^{-1} niech oznacza konwers relacji R. Konwers złożenia relacji R i S jest złożeniem relacji S i R, czyli: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
- Relacja R w zbiorze X jest jednocześnie równoważnością i częściowym porządkiem wtedy i tylko wtedy, gdy jest relacją identyczności w X.
- Złożenie $R \circ S$ relacji równoważności R oraz S jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ S = S \circ R$.

Algebry Boole'a

17.6.1. Zapisz w języku teorii algebr Boole'a:

- Dopełnienie kresu górnego elementów x i y jest równe kresowi dolnemu dopełnień elementów x i y.
- Zbiór I elementów algebry jest jej ideałem, tj.: jest domknięty na operację kresu górnego oraz zawiera, wraz z każdym swoim elementem, wszystkie elementy od niego mniejsze.
- Zbiór F elementów algebry jest jej filtrem, tj.: jest domknięty na operację kresu dolnego oraz zawiera, wraz z każdym swoim elementem, wszystkie elementy od niego większe.

Algebry Boole'a

17.6.2. Podaj przykłady ukazujące, że następujące zdania nie są prawdziwe o wszelkich algebrach Boole'a:

- Istnieją atomy, tj. elementy minimalne algebry różne od jej zera.
- Istnieją koatomy, tj. elementy maksymalne algebry różne od jej jedynki.
- Porządek elementów algebry nie jest liniowy.

Algebry Boole'a

17.6.3. Pokaż, że są prawami teorii algebr Boole'a:

- Kres górny elementów x i y jest równy kresowi górnemu elementu y oraz różnicy x i y.
- Dopełnienie kresu dolnego elementów x i y jest równe kresowi górnemu dopełnień elementów x i y.
- Kres dolny elementu x oraz kresu górnego elementów x i y jest równy elementowi x.

17.6.4. Niech $\mathbb{F}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru nieskończonego X o skończonych dopełnieniach i niech $\mathfrak{B}$ będzie algebrą Boole'a wszystkich podzbiorów zbioru X ze zwykłymi teoriomnogościowymi operacjami sumy, iloczynu oraz dopełnienia.

- Czy zbiór $\mathbb{F}$ jest filtrem, czy ideałem algebry $\mathfrak{B}$?
- Czy algebra $\mathfrak{B}$ zawiera jakieś atomy lub koatomy?

Język KRP a języki etniczne

17.7.1. Podaj wyrażenie języka KRP odpowiadające strukturze składniowej następujących zdań języka polskiego:

- Są wstrętne prawdy i piękne fałsze.
- Kobiety i mężczyźni mają równe prawa przy nawiązywaniu i rozwiązywaniu umowy o pracę.
- Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii.
- Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie.
- Nikt nigdy nikomu w żadnej sprawie nie ufa.

Język KRP a języki etniczne

17.7.2. Odczytaj w języku polskim odpowiedniki następujących formuł języka KRP, przy podanej interpretacji:

- $\forall x\,((P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow R(x))$; $P(x)$ — x wdycha opary rtęci, $Q(x)$ — x kona, rzężąc, pocąc się i mocząc, $R(x)$ — x świruje jarząbka.
- $\forall x\,(P(x) \rightarrow (\exists x \forall y\,(Q(x, y) \rightarrow \exists x\,\neg R(x))))$; $P(x)$ — x jest bezrobotny, $Q(x, y)$ — x jest bogatszy od y, $R(x)$ — x jest odpowiedzialny za stan gospodarki tego nieszczęsnego kraju.
- $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \forall x_5\,((M(x_1, x_2, x_3) \wedge M(x_4, x_3, x_5)) \rightarrow \exists x_6\,(M(x_1, x_6, x_4) \wedge M(x_5, x_2, x_6)))$; $M(x, y, z)$ — y leży między x oraz z, przy czym nie jest wykluczone, iż y jest identyczny z x lub y jest identyczny z z.

Język KRP a języki etniczne

17.7.3. Które z poniższych wyrażeń są prawdami logicznymi lub fałszami logicznymi:

- Żaden papież nie był kobietą.
- Dawno, dawno temu wszystkie liczby były wymierne.
- Współżył z najstarszą mieszkanką naszej wsi, ale mieszkał u jej matki.
- Prawdy wieczne są odwieczne.
- Elipsy to takie lekko spłaszczone okręgi.