DODATEK 2:
DOWODY NIEKTÓRYCH TWIERDZEŃ DOTYCZĄCYCH AKSJOMATYCZNEGO UJĘCIA KLASYCZNEGO RACHUNKU ZDAŃ

Twierdzenie 5.1. Formuła α jest wyprowadzalna ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $\langle\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\rangle$ taki, że α jest identyczna z β_n, a dowolny element ciągu $\langle\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\rangle$:

- jest elementem zbioru X, **albo**
- jest tezą KRZ, **albo**
- powstał z wyrazów wcześniejszych w tym ciągu w wyniku zastosowania reguły odrywania lub dowolnej reguły wyprowadzalnej w KRZ.

DOWÓD.

Należy pokazać, że zachodzi zarówno implikacja prosta, jak i odwrotna, dające łącznie tezę twierdzenia.

Dowód implikacji $\Rightarrow$ jest oczywisty, ponieważ każdy aksjomat KRZ jest tezą KRZ, na mocy definicji pojęć: tezy i dowodu.

Dla dowodu implikacji $\Leftarrow$ załóżmy, że istnieje skończony ciąg

$$B = \langle\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\rangle$$

taki, że α jest identyczna z β_n oraz każdy element ciągu B:

- jest elementem zbioru X, **albo**
- jest tezą KRZ, **albo**
- powstał z wyrazów wcześniejszych w tym ciągu w wyniku zastosowania reguły odrywania RO lub dowolnej reguły wyprowadzalnej w KRZ.

Trzeba pokazać, że $X \vdash_{krz} \alpha$, czyli że α ma dowód w KRZ w oparciu o zbiór założeń X.

Budujemy ciąg

$$\Gamma = \langle \gamma_1^1, \gamma_1^2, \ldots, \gamma_1^{k_1}, \gamma_2^1, \gamma_2^2, \ldots, \gamma_2^{k_2}, \ldots, \gamma_n^1, \gamma_n^2, \ldots \gamma_n^{k_n} \rangle$$

taki, że $\gamma_n^{k_n}$ jest identyczna z β_n (a więc $\gamma_n^{k_n}$ jest identyczna z α) oraz dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ spełnione są warunki:

- jeśli $\beta_i \in X$, to $k_i = 1$ oraz $\gamma_i^1 = \beta_i$
- jeśli β_i jest tezą, to ciąg $\langle \gamma_i^1, \gamma_i^2, \ldots, \gamma_i^{k_i} \rangle$ jest dowodem β_i (w oparciu o zbiór aksjomatów Ax oraz regułę odrywania RO)
- jeśli β_i powstaje z wyrazów wcześniejszych w ciągu B poprzez zastosowanie reguły odrywania RO, to $k_i = 1$ oraz $\gamma_i^1 = \beta_i$
- jeśli β_i powstaje z wyrazów wcześniejszych w ciągu B poprzez zastosowanie jakiejś reguły wyprowadzalnej (Y, β_i), to ciąg $\langle \gamma_i^1, \gamma_i^2, \ldots \gamma_i^{k_i} \rangle$ jest wyprowadzeniem tej reguły w KRZ (w oparciu o aksjomaty Ax oraz regułę odrywania RO); w tym przypadku wszystkie elementy zbioru Y są elementami ciągu B.

Tak skonstruowany ciąg Γ jest dowodem formuły α w oparciu o aksjomaty Ax, założenia X oraz regułę odrywania RO. Pokazaliśmy więc, że $X \vdash_{krz} \alpha$.

Q.E.D.

Twierdzenie 5.2. Dla dowolnych zbiorów formuł X, Y, Z oraz dowolnej formuły α zachodzą następujące warunki:

- (1) $\vdash_{krz}$ jest zwrotna: $X \vdash X$
- (2) $\vdash_{krz}$ jest przechodnia: jeśli $X \vdash_{krz} Y$ oraz $Y \vdash_{krz} Z$, to $X \vdash_{krz} Z$
- (3) $\vdash_{krz}$ jest monotoniczna względem pierwszego argumentu:

  jeśli $X \vdash_{krz} Y$ oraz $X \subseteq Z$, to $Z \vdash_{krz} Y$
- (4) $\vdash_{krz}$ jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu:

  jeśli $X \vdash_{krz} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, to $X \vdash_{krz} Z$
- (5) $\emptyset \vdash_{krz} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tezą KRZ.

DOWÓD.

(1) Niech $\alpha \in X$. Wtedy ciąg jednoelementowy $\langle \alpha \rangle$ jest dowodem α z X, a więc $X \vdash_{krz} \alpha$. Ponieważ α była dowolnym elementem zbioru X, otrzymujemy: $X \vdash_{krz} X$.

(2) Załóżmy, że $X \vdash_{krz} Y$ oraz $Y \vdash_{krz} Z$. Musimy pokazać, że $X \vdash_{krz} \alpha$ dla dowolnej $\alpha \in Z$. Niech zatem $\alpha \in Z$. Ponieważ $Y \vdash_{krz} Z$, więc mamy $Y \vdash_{krz} \alpha$. Istnieje zatem dowód α z Y, czyli ciąg $B = \langle \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \rangle$ taki, że α jest identyczna z β_n oraz każdy element ciągu B:

- jest elementem zbioru Y, **albo**
- jest aksjomatem KRZ, **albo**
- powstał z wyrazów wcześniejszych w tym ciągu w wyniku zastosowania reguły odrywania.

Ponieważ $X \vdash_{krz} Y$, więc każdy element zbioru Y ma dowód w oparciu o założenia X. Skonstruujemy teraz nowy ciąg Γ (będący dowodem α z X), zastępując w ciągu B elementy ze zbioru Y ich dowodami z X:

$$\Gamma = \langle \gamma_1^1, \gamma_1^2, \ldots, \gamma_1^{k_1}, \gamma_2^1, \gamma_2^2, \ldots, \gamma_2^{k_2}, \ldots, \gamma_n^1, \gamma_n^2, \ldots \gamma_n^{k_n} \rangle,$$

gdzie dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$:

- jeśli $\beta_i \in Y$, to $\langle \gamma_i^1, \gamma_i^2, \ldots \gamma_i^{k_i} \rangle$ jest dowodem β_i ze zbioru Y (a zatem β_i jest identyczna z $\gamma_i^{k_i}$)
- jeśli β_i jest aksjomatem, to $k_i = 1$ oraz $\gamma_i^{k_i}$ jest identyczna z β_i
- jeśli β_i powstała z wyrazów wcześniejszych w ciągu B poprzez zastosowanie reguły odrywania RO, to $k_i = 1$ oraz $\gamma_i^{k_i}$ jest identyczna z β_i.

Z określenia ciągu Γ widać, że:

- α jest identyczna z $\gamma_n^{k_n}$
- każdy element ciągu Γ jest bądź aksjomatem, bądź elementem zbioru X, bądź powstaje z formuł wcześniejszych w Γ poprzez zastosowanie reguły odrywania RO.

Tak więc, Γ jest dowodem α z X, czyli $X \vdash_{krz} \alpha$. Ostatecznie więc $X \vdash_{krz} Z$.

(3) Załóżmy, że $X \vdash_{krz} Y$ oraz $X \subseteq Z$. Trzeba pokazać, że $Z \vdash_{krz} Y$, czyli że każdy element zbioru Y jest wyprowadzalny z Z. Niech $\alpha \in Y$. Ponieważ $X \vdash_{krz} Y$ więc istnieje ciąg $B = \langle \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \rangle$ będący wyprowadzeniem α z X. Każdy element ciągu B jest bądź aksjomatem, bądź elementem zbioru X, bądź powstaje z formuł wcześniejszych w B poprzez zastosowanie reguły odrywania RO. Ponieważ $X \subseteq Z$, więc ciąg B jest także wyprowadzeniem α z Z, czyli $Z \vdash_{krz} \alpha$. Pokazaliśmy zatem, że $Z \vdash_{krz} Y$.

(4) Załóżmy, że $X \vdash_{krz} Y$ oraz $Z \subseteq Y$. Trzeba pokazać, że $X \vdash_{krz} Z$, czyli że każdy element zbioru Z jest wyprowadzalny z X. Niech $\alpha \in Z$. Ponieważ mamy $Z \subseteq Y$, więc $\alpha \in Y$. Z założenia mamy $X \vdash_{krz} Y$, a zatem $X \vdash_{krz} \alpha$. Pokazaliśmy w ten sposób, że $X \vdash_{krz} Z$.

(5) Wynika wprost z definicji tezy KRZ oraz relacji $\vdash_{krz}$.

Q.E.D.

Twierdzenie 5.3. TWIERDZENIE O DEDUKCJI WPROST (wersja syntaktyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α, β zachodzą implikacje:

- (a) Jeśli $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \beta$, to $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$.
- (b) Jeśli $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$, to $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \beta$.

DOWÓD.

Dowód implikacji (a).

Załóżmy, że $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \beta$. Pokażemy, że $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$.

Z założenia, istnieje skończony ciąg $\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \rangle$ taki, że:

- β jest identyczna z γ_n
- każdy element Γ jest bądź elementem zbioru $X \cup \{\alpha\}$, bądź aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A13), bądź powstaje z wyrazów wcześniejszych w Γ poprzez zastosowanie reguły odrywania RO.

Konstruujemy ciąg

$$\Delta = \langle \alpha \rightarrow \gamma_1, \alpha \rightarrow \gamma_2, \ldots, \alpha \rightarrow \gamma_n \rangle.$$

Pokażemy, że wszystkie elementy ciągu Δ są wyprowadzalne z X, tj. że $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma_i$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$.

Dowód będzie wykorzystywał metodę indukcji matematycznej, znaną każdemu ze szkoły. Tak więc, pokażemy, że:

- (I) $X \vdash_{krz} \alpha \to \gamma_1$ (początkowy krok indukcji)
- (II) $X \vdash_{krz} \alpha \to \gamma_i$ dla $i \leqslant k$, gdzie $k < n$ implikuje $X \vdash_{krz} \alpha \to \gamma_{k+1}$ (następnikowy krok indukcji).

Z (I) oraz (II) otrzymujemy, na mocy zasady indukcji matematycznej:

$$X \vdash_{krz} \alpha \to \gamma_n,$$

czyli tezę twierdzenia 5.3.(a) (ponieważ γ_n jest identyczna z β).

Dowód punktu (I). Należy rozpatrzyć dwa przypadki:

- I.1. γ_1 jest założeniem, czyli $\gamma_1 \in X \cup \{\alpha\}$
- I.2. γ_1 jest aksjomatem opartym na jednym ze schematów (A1)–(A13).

Przypadek I.1. Jeśli $\gamma_1 \in X \cup \{\alpha\}$, to zachodzi jedno z dwojga:

- I.1.1. $\gamma_1 \in X$
- I.1.2. $\gamma_1 \in \{\alpha\}$, tj. γ_1 jest identyczna z α.

Należy zatem rozważyć każdy z tych podprzypadków.

Podprzypadek I.1.1. Jeśli $\gamma_1 \in X$, to $X \vdash_{krz} \gamma_1$, na mocy zwrotności oraz monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$. Mamy również: $X \vdash_{krz} \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$, ponieważ:

- $\gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$ otrzymujemy ze schematu (A3): $\alpha/\gamma_1,\ \beta/\alpha$; a zatem $\emptyset \vdash_{krz} \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$
- skoro $\gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$ jest wyprowadzalna ze zbioru pustego, to (na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$) jest ona wyprowadzalna ze zbioru X.

Mamy zatem $X \vdash_{krz} \{\gamma_1, \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)\}$. Ponieważ (na mocy reguły odrywania) mamy $\{\gamma_1, \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)\} \vdash \alpha \to \gamma_1$, więc (na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krz}$) mamy również: $X \vdash_{krz} \alpha \to \gamma_1$.

Podprzypadek I.1.2. Jeśli γ_1 jest identyczna z α, pozostaje do udowodnienia, że $X \vdash_{krz} \alpha \to \alpha$. Formuła $\alpha \to \alpha$ jest tezą (teza (T1)), a zatem $\emptyset \vdash_{krz} \alpha \to \alpha$. Stąd, na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$, mamy $X \vdash_{krz} \alpha \to \alpha$.

Przypadek I.2. Jeśli γ_1 jest aksjomatem, to jest też tezą, czyli $\emptyset \vdash_{krz} \gamma_1$. Podobnie jak w I.1.1., mamy: $\emptyset \vdash_{krz} \gamma_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma_1)$. Mamy zatem:

$$\emptyset \vdash_{krz} \{\gamma_1, \gamma_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma_1)\}.$$

Ponieważ (na mocy reguły odrywania) mamy:

$$\{\gamma_1, \gamma_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma_1)\} \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma_1,$$

więc (na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krz}$) mamy również: $\emptyset \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma_1$. Wreszcie, z monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$, mamy: $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma_1$

Dowód punktu (II). Przyjmujemy założenie indukcyjne, to znaczy zakładamy, że $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma_i$ dla $i \leqslant k$, gdzie $k < n$. Trzeba pokazać, że $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma_{k+1}$. Możliwe są trzy przypadki:

- II.1. γ_{k+1} jest założeniem, czyli $\gamma_{k+1} \in X \cup \{\alpha\}$
- II.2. γ_{k+1} jest aksjomatem opartym na jednym ze schematów (A1)–(A13)
- II.3. γ_{k+1} powstaje z wyrazów wcześniejszych w ciągu Γ poprzez zastosowanie reguły odrywania RO.

W przypadkach II.1. oraz II.2. postępujemy analogicznie, jak w dowodzie punktu I (pisząc γ_{k+1} w miejsce γ_1).

Mamy więc w tych przypadkach: $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma_{k+1}$.

Trzeba jeszcze rozważyć przypadek II.3. Jeśli γ_{k+1} powstaje z wyrazów wcześniejszych w ciągu Γ poprzez zastosowanie reguły odrywania RO, to istnieją elementy γ_{m_1}, γ_{m_2} ciągu Γ takie, że $m_1 \leqslant k$, $m_2 \leqslant k$ oraz zachodzi jeden z dwóch przypadków:

- γ_{m_1} jest identyczna z $\gamma_{m_2} \rightarrow \gamma_{k+1}$, ***albo***
- γ_{m_2} jest identyczna z $\gamma_{m_1} \rightarrow \gamma_{k+1}$.

Ponieważ γ_{m_1} oraz γ_{m_2} są wcześniejsze w ciągu Γ od γ_{k+1}, więc na mocy założenia indukcyjnego mamy:

- $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma_{m_1}$ ***oraz***
- $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma_{m_2}$.

Ma miejsce zatem jeden z dwóch przypadków:

- $X \vdash_{krz} \alpha \to (\gamma_{m_1} \to \gamma_{k+1})$ i $X \vdash_{krz} \alpha \to \gamma_{m_1}$ ***lub***
- $X \vdash_{krz} \alpha \to (\gamma_{m_2} \to \gamma_{k+1})$ i $X \vdash_{krz} \alpha \to \gamma_{m_2}$.

Stąd otrzymujemy:

- $X \vdash_{krz} \{\alpha \to (\gamma_{m_1} \to \gamma_{k+1}), \alpha \to \gamma_{m_1}\}$ ***lub***
- $X \vdash_{krz} \{\alpha \to (\gamma_{m_1} \to \gamma_{k+1}), \alpha \to \gamma_{m_1}\}$.

Zastosowanie reguły sylogizmu Fregego do tych przypadków daje:

- $\{\alpha \to (\gamma_{m_1} \to \gamma_{k+1}), \alpha \to \gamma_{m_1}\} \vdash_{krz} \alpha \to \gamma_{k+1}$
- $\{\alpha \to (\gamma_{m_2} \to \gamma_{k+1}), \alpha \to \gamma_{m_2}\} \vdash_{krz} \alpha \to \gamma_{k+1}$.

Na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krz}$, w każdym z tych przypadków otrzymujemy $X \vdash_{krz} \alpha \to \gamma_{k+1}$, co stanowi dowód następnikowego kroku indukcji.

Ostatecznie:

$$X \vdash_{krz} \alpha \to \gamma_n,$$

(ponieważ γ_n jest identyczna z β), czyli udowodniliśmy tezę twierdzenia 5.3.(a).

Dowód implikacji (b).

Załóżmy, że $X \vdash_{krz} \alpha \to \beta$. Trzeba pokazać, że $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \beta$. Na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$ (twierdzenie 5.2.(3)), skoro $X \vdash_{krz} \alpha \to \beta$, to także $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \alpha \to \beta$. Ze zwrotności relacji $\vdash_{krz}$ (twierdzenie 5.2.(1)) mamy $\{\alpha\} \vdash_{krz} \alpha$. Stąd, ponownie na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$, mamy $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \alpha$. To łącznie daje $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \{\alpha \to \beta, \alpha\}$.

Ponieważ $\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash_{krz} \beta$, więc na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krz}$ (twierdzenie 5.2.(2)), otrzymujemy $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \beta$.

Q.E.D.

Twierdzenie 5.4. TWIERDZENIE O DEDUKCJI NIE WPROST (wersja syntaktyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α zachodzą równoważności:

- (1) $X \vdash_{krz} \neg\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

  istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$.

- (2) $X \vdash_{krz} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

  istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$.

DOWÓD.

Trzeba udowodnić cztery implikacje (implikację prostą i odwrotną dla każdego z obu punktów twierdzenia).

Dowód 5.4.1.

Dowód 5.4.1. $\Rightarrow$

Załóżmy, że $X \vdash_{krz} \neg\alpha$. Na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$ mamy: $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \neg\alpha$. Na mocy zwrotności relacji $\vdash_{krz}$ mamy: $\{\alpha\} \vdash_{krz} \alpha$, a z monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$ mamy: $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \alpha$. Stąd: $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \{\alpha, \neg\alpha\}$. Pokazaliśmy zatem, że ze zbioru $X \cup \{\alpha\}$ wyprowadzić można parę formuł wzajem sprzecznych, co kończy dowód 5.4.1. $\Rightarrow$.

Dowód 5.4.1. $\Leftarrow$

Załóżmy, że istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$.

Wtedy: $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \beta$ oraz $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \neg\beta$. Z twierdzenia o dedukcji wprost mamy: $X \vdash_{krz} \alpha \to \beta$ oraz $X \vdash_{krz} \alpha \to \neg\beta$, czyli:

$$X \vdash_{krz} \{\alpha \to \beta, \alpha \to \neg\beta\}.$$

Mamy także: $\{\alpha \to \beta, \alpha \to \neg\beta\} \vdash_{krz} \neg\alpha$, ponieważ:

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\alpha \to \neg\beta$	założenie
3.	$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$	(T11)
4.	$(\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$	RO: 3,1
5.	$\neg\alpha$	RO: 4,2.

Z $X \vdash_{krz} \{\alpha \to \beta, \alpha \to \neg\beta\}$ oraz $\{\alpha \to \beta, \alpha \to \neg\beta\} \vdash_{krz} \neg\alpha$, na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krz}$, mamy: $X \vdash_{krz} \neg\alpha$, co kończy dowód 5.4.1. $\Leftarrow$.

Dowód 5.4.2.

Dowód 5.4.2. $\Rightarrow$

Załóżmy, że $X \vdash_{krz} \alpha$. Trzeba pokazać, że istnieje formuła β taka, że

$$X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}.$$

Z monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$ mamy: $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krz} \alpha$. Na mocy zwrotności relacji $\vdash_{krz}$ mamy: $\{\neg\alpha\} \vdash_{krz} \neg\alpha$, a z monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$ mamy: $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krz} \neg\alpha$. Stąd: $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krz} \{\alpha, \neg\alpha\}$. Pokazaliśmy zatem, że ze zbioru $X \cup \{\neg\alpha\}$ wyprowadzić można parę formuł wzajem sprzecznych, co kończy dowód 5.4.2. $\Rightarrow$.

Dowód 5.4.2. $\Leftarrow$

Załóżmy, że istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$. Trzeba pokazać, że $X \vdash_{krz} \alpha$.

Z założenia mamy: $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krz} \beta$ oraz $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krz} \neg\beta$. Z twierdzenia o dedukcji wprost mamy: $X \vdash_{krz} \neg\alpha \rightarrow \beta$ oraz $X \vdash_{krz} \neg\alpha \rightarrow \neg\beta$, czyli $X \vdash_{krz} \{\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \neg\beta\}$. Mamy także: $\{\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \neg\beta\} \vdash_{krz} \alpha$, ponieważ:

1.	$\neg\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$	założenie
3.	$(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\neg\alpha)$	(T11): $\alpha/\neg\alpha$
4.	$(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\neg\alpha$	RO: 3,1
5.	$\neg\neg\alpha$	RO: 4,2
6.	$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$	(T4)
7.	α	RO: 6,5.

Z $X \vdash_{krz} \{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \neg\beta\}$ oraz $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \neg\beta\} \vdash_{krz} \alpha$, na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krz}$, mamy: $X \vdash_{krz} \alpha$, co kończy dowód 5.4.2. $\Leftarrow$.

Q.E.D.

Twierdzenie 5.5. Relacja inferencyjnej równoważności formuł $\approx$ ma następujące własności:

- (a) $\approx$ jest relacją równoważności w zbiorze F_{KRZ}.
- (b) Jeśli $\alpha \approx \beta$ i α jest tezą KRZ, to także β jest tezą KRZ.
- (c) Dla dowolnych formuł α, β, α_1, α_2, β_1, β_2:

(c1) jeśli $\alpha \approx \beta$, to $\neg\alpha \approx \neg\beta$,

(c2) jeśli $\alpha_1 \approx \beta_1$ i $\alpha_2 \approx \beta_2$, to $\alpha_1 \wedge \alpha_1 \approx \beta_1 \wedge \beta_2$,

(c3) jeśli $\alpha_1 \approx \beta_1$ i $\alpha_2 \approx \beta_2$, to $\alpha_1 \vee \alpha_1 \approx \beta_1 \vee \beta_2$,

(c4) jeśli $\alpha_1 \approx \beta_1$ i $\alpha_2 \approx \beta_2$, to $\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 \approx \beta_1 \rightarrow \beta_2$,

(c5) jeśli $\alpha_1 \approx \beta_1$ i $\alpha_2 \approx \beta_2$, to $\alpha_1 \equiv \alpha_1 \approx \beta_1 \equiv \beta_2$.

- (d) Dla dowolnych formuł α, β:

  (d1) jeśli α i β są alternatywami elementarnymi, to istnieje alternatywa elementarna γ taka, że $\alpha \vee \beta \approx \gamma$,

  (d2) jeśli α i β są w kpn, to istnieje formuła γ w kpn taka, że $\alpha \wedge \beta \approx \gamma$,

  (d3) jeśli α jest w kpn, a β jest alternatywą elementarną, to istnieje formuła γ w kpn taka, że $\alpha \vee \beta \approx \gamma$,

  (d4) jeśli α i β są w kpn, to istnieje formuła γ w kpn taka, że $\alpha \vee \beta \approx \gamma$,

  (d5) jeśli α jest alternatywą elementarną, to istnieje formuła γ w kpn taka, że $\neg\alpha \approx \gamma$,

  (d6) jeśli α jest w kpn, to istnieje formuła γ w kpn taka, że $\neg\alpha \approx \gamma$.

- (e) Każda formuła jest inferencyjnie równoważna pewnej formule w kpn (koniunkcyjnej postaci normalnej).

- (f) Każda formuła jest inferencyjnie równoważna pewnej formule w apn (alternatywnej postaci normalnej).

DOWÓD. (Szkic.)

(a) Dla dowodu, że $\approx$ jest relacją równoważności w zbiorze F_{KRZ} trzeba pokazać, że jest to relacja: zwrotna, symetryczna oraz przechodnia. Oznacza to, iż musimy wykazać, że dla dowolnych formuł α, β oraz γ:

- (a1) $\vdash_{krz} \alpha \equiv \alpha$
- (a2) jeśli $\vdash_{krz} \alpha \equiv \beta$, to $\vdash_{krz} \beta \equiv \alpha$
- (a3) jeśli $\vdash_{krz} \alpha \equiv \beta$ oraz $\vdash_{krz} \beta \equiv \gamma$, to $\vdash_{krz} \alpha \equiv \gamma$.

Punkt **(a1)** wynika bezpośrednio z tezy (T1) oraz aksjomatu (A12). Zatem relacja $\approx$ jest zwrotna.

Punkt **(a2)** wynika z faktu, że $(\alpha \equiv \beta) \to (\beta \equiv \alpha)$ jest tezą KRZ:

1.	$(\alpha \equiv \beta)$	założenie
2.	$(\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta)$	(A10)
3.	$(\alpha \equiv \beta) \to (\beta \to \alpha)$	(A11)
4.	$\alpha \to \beta$	RO: 2,1
5.	$\beta \to \alpha$	RO: 3,1
6.	$(\beta \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to (\beta \equiv \alpha))$	(A12) $\alpha/\beta,\ \beta/\alpha$
7.	$(\alpha \to \beta) \to (\beta \equiv \alpha)$	RO: 6,5
8.	$\beta \equiv \alpha$	RO: 7,4.

Załóżmy, że $\vdash_{krz} \alpha \equiv \beta$. Na mocy powyższego dowodu mamy:

$$\vdash_{krz} (\alpha \equiv \beta) \to (\beta \equiv \alpha).$$

Ponieważ $\{\alpha \equiv \beta, (\alpha \equiv \beta) \to (\beta \equiv \alpha)\} \vdash_{krz} \beta \equiv \alpha$, więc otrzymujemy stąd $\vdash_{krz} \beta \equiv \alpha$. Pokazaliśmy zatem, że relacja $\approx$ jest symetryczna.

Dla dowodu **(a3)** załóżmy, że $\vdash_{krz} \alpha \equiv \beta$ oraz $\vdash_{krz} \beta \equiv \gamma$. Pokażemy najpierw (korzystając z twierdzenia o dedukcji wprost), że wtedy $\vdash_{krz} \alpha \to \gamma$:

1.	$\alpha \equiv \beta$	założenie
2.	$\beta \equiv \gamma$	założenie
3.	α	założenie
4.	$(\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta)$	(A10)
5.	$\alpha \to \beta$	RO: 4,1
6.	$(\beta \equiv \gamma) \to (\beta \to \gamma)$	(A10) $\alpha/\beta,\ \beta/\gamma$
7.	$\beta \to \gamma$	RO: 6,2
8.	β	RO: 5,3
9.	γ	RO: 7,8.

W analogiczny sposób pokazujemy, że $\vdash_{krz} \gamma \to \alpha$, a następnie korzystamy z aksjomatu (A12) dla uzyskania $\vdash_{krz} \alpha \equiv \gamma$. Tak więc, relacja $\approx$ jest przechodnia.

(b) Niech $\alpha \approx \beta$ i niech α będzie tezą KRZ. Musimy pokazać, że β także jest tezą KRZ.

Z założenia mamy: $\vdash_{krz} \alpha \equiv \beta$ oraz $\vdash_{krz} \alpha$.

1.	$\alpha \equiv \beta$	założenie
2.	α	założenie
3.	$(\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta)$	(A10)
4.	$\alpha \to \beta$	RO: 3,1
5.	β	RO: 4,2.

Pokazaliśmy więc, że $\{\alpha \equiv \beta, \alpha\} \vdash_{krz} \beta$, co kończy dowód punktu **(b)**.

Na marginesie zauważmy, że na wykładzie pokazano wyprowadzalność reguły $\{\alpha \equiv \beta, \beta\} \vdash_{krz} \alpha$:

1.	$\alpha \equiv \beta$	założenie
2.	β	założenie
3.	$(\alpha \equiv \beta) \to (\beta \to \alpha)$	(A12)
4.	$\beta \to \alpha$	RO: 3,1
5.	α	RO: 4,2.

(c) Dowód, że $\approx$ ma własności (c1)–(c5) polega na wykazaniu, iż tezami KRZ są:

- $(\alpha \equiv \beta) \to (\neg\alpha \equiv \neg\beta)$
- $(\alpha_1 \equiv \beta_1) \to ((\alpha_2 \equiv \beta_2) \to ((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \equiv (\beta_1 \wedge \beta_2)))$
- $(\alpha_1 \equiv \beta_1) \to ((\alpha_2 \equiv \beta_2) \to ((\alpha_1 \vee \alpha_2) \equiv (\beta_1 \vee \beta_2)))$
- $(\alpha_1 \equiv \beta_1) \to ((\alpha_2 \equiv \beta_2) \to ((\alpha_1 \to \alpha_2) \equiv (\beta_1 \to \beta_2)))$
- $(\alpha_1 \equiv \beta_1) \to ((\alpha_2 \equiv \beta_2) \to ((\alpha_1 \equiv \alpha_2) \equiv (\beta_1 \equiv \beta_2)))$.

Proponujemy słuchaczom samodzielne wyprowadzenie tych tez.

(d) Dowody własności (d1)–(d6) przeprowadzamy stosując indukcję strukturalną po budowie formuł. Zobacz: BATÓG 1999, 71–82.

(e), (f) Dowody tych punktów, wykorzystujące punkt **(d)**, znajdujemy w podręczniku BATÓG 1999, 82–87. Zobacz też monografię: POGORZELSKI 1975, 85–97.

Przy okazji, przypomnijmy, że tezami KRZ są:

- $(\alpha \equiv \beta) \equiv ((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha))$
- $(\alpha \to \beta) \equiv ((\neg\alpha) \vee \beta)$
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
- $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
- $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$
- $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$.

Tezy te wykorzystywać można przy przekształcaniu dowolnej formuły do inferencyjnie jej równoważnej formuły w kpn lub w apn.

Q.E.D.

Twierdzenie 5.6. (TWIERDZENIE O TRAFNOŚCI AKSJOMATYKI.) Każda teza KRZ jest tautologią KRZ.

DOWÓD. Niech α będzie tezą KRZ. Musimy pokazać, że α jest tautologią KRZ.

Ponieważ α jest tezą, więc istnieje skończony ciąg $\Gamma = \langle\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\rangle$ taki, że:

- α jest identyczna z γ_n
- każdy element Γ jest bądź aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A13), bądź powstaje z wyrazów wcześniejszych w Γ poprzez zastosowanie reguły odrywania RO.

Pokażemy, stosując indukcję matematyczną, że każdy element ciągu Γ jest tautologią KRZ.

I. *Początkowy krok indukcji.* Pierwszy element ciągu Γ musi być aksjomatem. Ponieważ każdy aksjomat jest tautologią KRZ (co łatwo sprawdzić), więc γ_1 jest tautologią.

II. *Następnikowy krok indukcji.* Zakładamy, że wszystkie elementy ciągu Γ do miejsca $k < n$ są tautologiami. Musimy pokazać, że γ_{k+1} jest tautologią. Możliwe są dwa przypadki:

- (i) γ_{k+1} jest aksjomatem
- (ii) γ_{k+1} powstała z wyrazów wcześniejszych w Γ poprzez zastosowanie reguły odrywania RO.

W przypadku (i) γ_{k+1} jest oczywiście tautologią.

W przypadku (ii) istnieją $m_1 \leqslant k$ oraz $m_2 \leqslant k$ takie, że:

- γ_{m_1} jest identyczna z $\gamma_{m_2} \to \gamma_{k+1}$ ***lub***
- γ_{m_2} jest identyczna z $\gamma_{m_1} \to \gamma_{k+1}$.

Z założenia indukcyjnego mamy:

- $\gamma_{m_2} \to \gamma_{k+1}$ oraz γ_{m_2} są tautologiami ***lub***
- $\gamma_{m_1} \to \gamma_{k+1}$ oraz γ_{m_1} są tautologiami.

Ponieważ reguła odrywania RO zachowuje własność bycia tautologią, więc γ_{k+1} jest tautologią. W szczególności, γ_n jest tautologią. Ponieważ γ_n jest identyczna z α, kończy to dowód twierdzenia.

Q.E.D.

Twierdzenie 5.7. (TWIERDZENIE LINDENBAUMA-ASSERA.)

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α: jeśli $X \nvdash_{krz} \alpha$, to istnieje zbiór $L^\alpha(X)$ o następujących własnościach:

- (1) $\alpha \notin L^\alpha(X)$
- (2) $X \subseteq L^\alpha(X)$
- (3) dla każdej formuły β: jeśli $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \beta$, to $\beta \in L^\alpha(X)$
- (4) dla każdej formuły β: jeśli $\beta \notin L^\alpha(X)$, to $L^\alpha(X) \cup \{\beta\} \vdash_{krz} \alpha$.

DOWÓD. Wszystkie formuły języka KRZ możemy ponumerować i ustawić w nieskończony ciąg przeliczalny:

$$\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots \rangle.$$

Załóżmy, że $X \nvdash_{krz} \alpha$. Zdefiniujemy najpierw rodzinę $\mathbb{R} = \{X_i : i \in \mathcal{N}\}$ w sposób następujący:

- $X_1 = \{\beta : X \vdash_{krz} \beta\}$
- jeśli $X_k \cup \{\gamma_k\} \vdash_{krz} \alpha$, to $X_{k+1} = X_k$
- jeśli $X_k \cup \{\gamma_k\} \nvdash_{krz} \alpha$, to $X_{k+1} = \{\delta : X_k \cup \{\gamma_k\} \vdash_{krz} \delta\}$.

Pokażemy teraz, że wszystkie elementy rodziny $\mathbb{R}$ mają następujące własności:

- (A) $X_k \subseteq X_{k+1}$.
- (B) $\alpha \notin X_k$.
- (C) Dla dowolnej formuły β: jeśli $X_k \vdash_{krz} \beta$, to $\beta \in X_k$.

Dowód (A). Niech $\beta \in X_k$. Pokażemy, że $\beta \in X_{k+1}$. Możliwe są dwa przypadki:

- (a1) $X_k \cup \{\gamma_k\} \vdash_{krz} \alpha$
- (a2) $X_k \cup \{\gamma_k\} \nvdash_{krz} \alpha$.

W przypadku (a1) mamy: $X_k = X_{k+1}$, a więc $\beta \in X_{k+1}$.

W przypadku (a2) mamy: $X_{k+1} = \{\delta : X_k \cup \{\gamma_k\} \vdash_{krz} \delta\}$. Ponieważ (z założenia) $\beta \in X_k$, więc (ze zwrotności $\vdash_{krz}$): $X_k \vdash_{krz} \beta$. Zatem (z monotoniczności $\vdash_{krz}$) mamy: $X_k \cup \{\gamma_k\} \vdash_{krz} \beta$. A to oznacza, że $\beta \in X_{k+1}$.

Dowód (B). Przeprowadzimy dowód metodą nie wprost. Przypuśćmy, że $\alpha \in X_k$, dla pewnego $k \in \mathcal{N}$. Wtedy istnieje najmniejsze takie k, niech będzie nim k_0. Stąd zbiór X_{k_0} byłby najmniejszym zbiorem w rodzinie $\mathbb{R}$ takim, że $\alpha \in X_{k_0}$. Z założenia mamy $\alpha \notin X_1$, a więc $k_0 > 1$. Oznacza to, że $\alpha \in X_{k_0}$ oraz $\alpha \notin X_{k_0-1}$. Mamy więc: $X_{k_0} \neq X_{k_0-1}$. Na mocy definicji rodziny $\mathbb{R}$ mamy:

- (i) $X_{k_0-1} \cup \{\gamma_{k_0-1}\} \nvdash_{krz} \alpha$
- (ii) $X_{k_0} = \{\delta : X_{k_0-1} \cup \{\gamma_{k_0-1} \vdash_{krz} \delta\}$.

Jednak skoro $\alpha \in X_{k_0}$, to $X_{k_0-1} \cup \{\gamma_{k_0-1}\} \vdash_{krz} \alpha$. Otrzymujemy zatem sprzeczność. Ostatecznie, $\alpha \notin X_k$ dla wszystkich $X_k \in \mathbb{R}$.

Dowód (C). Tu z kolei przeprowadzimy dowód indukcyjny.

(CI) *Początkowy krok indukcji.* Załóżmy, że $X_1 \vdash_{krz} \beta$. Pokażemy, że $\beta \in X_1$.

Skoro $X_1 \vdash_{krz} \beta$, to istnieje skończony ciąg $B = \langle \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \rangle$ taki, że β jest identyczna z β_n, a każdy element tego ciągu jest bądź aksjomatem, bądź założeniem (czyli elementem zbioru X_1), bądź powstał z wyrazów wcześniejszych w tym ciągu poprzez zastosowanie reguły odrywania RO. Niech $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_m}$ będą wszystkimi ***założeniami*** występującymi w ciągu B (czyli elementami zbioru X_1).

Wtedy $\{\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_m}\} \subseteq X_1$ oraz $\{\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_m}\} \vdash_{krz} \beta$. Ponieważ $X_1 = \{\delta : X \vdash_{krz} \delta\}$, więc (na mocy twierdzenia 5.2.4.):

$$X \vdash_{krz} \{\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_m}\}.$$

Z przechodniości relacji $\vdash_{krz}$ otrzymujemy $X \vdash_{krz} \beta$, czyli $\beta \in X_1$.

(CI) *Następnikowy krok indukcji.* Zakładamy, że: jeżeli $X_k \vdash_{krz} \beta$, to $\beta \in X_k$. Musimy pokazać, że: jeżeli $X_{k+1} \vdash_{krz} \beta$, to $\beta \in X_{k+1}$.

Załóżmy, że $X_{k+1} \vdash_{krz} \beta$. Są dwie możliwości:

- (c1) $X_k = X_{k+1}$
- (c2) $X_k = \{\delta : X_k \cup \{\gamma_k\} \vdash_{krz} \delta\}$.

W przypadku (c1) mamy natychmiast $\beta \in X_{k+1}$, na mocy założenia indukcyjnego.

W przypadku (c2) mamy $X_k = \{\delta : X_k \cup \{\gamma_k\} \vdash_{krz} \delta\}$ i $X_{k+1} \vdash_{krz} \beta$. Skoro $X_{k+1} \vdash_{krz} \beta$, to istnieje skończony ciąg $B = \langle \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \rangle$ taki, że β jest identyczna z β_n, a każdy element tego ciągu jest bądź aksjomatem, bądź założeniem (czyli elementem zbioru X_{k+1}), bądź powstał z wyrazów wcześniejszych w tym ciągu poprzez zastosowanie reguły odrywania RO. Niech $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_m}$ będą wszystkimi ***założeniami*** występującymi w ciągu B (czyli elementami zbioru X_{k+1}).

Wtedy $\{\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_m}\} \subseteq X_{k+1}$ oraz $\{\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_m}\} \vdash_{krz} \beta$. Z definicji zbioru X_{k+1} mamy: $X_k \cup \{\gamma_k\} \vdash_{krz} \{\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_m}\}$. Z przechodniości relacji $\vdash_{krz}$ otrzymujemy $X_k \cup \{\gamma_k\} \vdash_{krz} \beta$, czyli $\beta \in X_{k+1}$.

Rodzina $\mathbb{R}$ posłuży teraz do definicji zbioru $L^\alpha(X)$ występującego w twierdzeniu 5.7. Niech:

$$L^\alpha(X) = \bigcup \mathbb{R}.$$

Trzeba pokazać, że zbiór $L^\alpha(X)$ ma własności wymienione w twierdzeniu 5.7.

(1). Pokażemy, że $\alpha \notin L^\alpha(X)$.

Przypuśćmy (nie wprost), że $\alpha \in L^\alpha(X)$. Z założenia twierdzenia, mamy $X \nvdash_{krz} \alpha$, a więc $\alpha \notin X$. Skoro $\alpha \in L^\alpha(X)$, to $\alpha \in \bigcup \mathbb{R}$. Istnieje zatem $k \in \mathcal{N}$ taka, że $\alpha \in X_k$. Jest to jednak sprzeczne z udowodnioną wcześniej własnością (B). Tak więc, $\alpha \notin L^\alpha(X)$.

(2). Inkluzja $X \subseteq L^\alpha(X)$ jest oczywista, na mocy definicji zbioru $L^\alpha(X)$.

(3). Załóżmy, że $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \beta$. Musimy pokazać, że $\beta \in L^\alpha(X)$.

Skoro $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \beta$, to istnieje skończony ciąg $B = \langle \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \rangle$, który jest wyprowadzeniem (dowodem) formuły β ze zbioru $L^\alpha(X)$.

Niech $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_m}$ będą wszystkimi założeniami w tym dowodzie (tj. elementami $L^\alpha(X)$). Ponieważ $X \subseteq X_1$ oraz zbiory X_k tworzą $\subseteq$-łańcuch wstępujący (zob. własność (A)), więc istnieje $i_0 \geqslant 1$ taka, że $\{\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_m}\} \subseteq X_{i_0}$.

Stąd $X_{i_0} \vdash_{krz} \{\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_m}\}$ oraz $\{\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_m}\} \vdash_{krz} \beta$. Na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krz}$ mamy więc: $X_{i_0} \vdash_{krz} \beta$. To oznacza (na mocy własności (C)), że $\beta \in X_{i_0}$. Ponieważ $X_{i_0} \subseteq L^\alpha(X)$, więc mamy ostatecznie: $\beta \in L^\alpha(X)$.

(4). Musimy teraz pokazać, że dla dowolnej formuły β: jeśli $\beta \notin L^\alpha(X)$, to $L^\alpha(X) \cup \{\beta\} \vdash_{krz} \alpha$.

Niech $\beta \notin L^\alpha(X)$. Ponieważ ciąg Γ był wyliczeniem ***wszystkich*** formuł języka KRZ, więc istnieje taka liczba naturalna n, że β jest identyczna z γ_n. Weźmy pod uwagę zbiór X_{n+1}. Na mocy definicji rodziny $\mathbb{R}$, zachodzi jeden z dwóch przypadków:

- (4a) $X_{n+1} = X_n$
- (4b) $X_{n+1} = \{\delta : X_k \cup \{\gamma_n\} \vdash_{krz} \delta\}$.

Przypadek (4a) zachodzi, gdy $X_n \cup \{\gamma_n\} \vdash_{krz} \alpha$. Wtedy $X_n \cup \{\beta\} \vdash_{krz} \alpha$ (ponieważ β jest identyczna z γ_n). Z monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$ mamy wtedy: $L^\alpha(X) \cup \{\beta\} \vdash_{krz} \alpha$, a to właśnie należało udowodnić.

Zauważmy jeszcze, że skoro $\beta \notin L^\alpha(X)$, to przypadek (4b) jest wykluczony. Ponieważ β jest identyczna z γ_n, więc $\{\gamma_n\} \vdash_{krz} \beta$, a nadto $X_n \cup \{\gamma_n\} \vdash_{krz} \beta$. Mamy zatem: $\beta \in \{\delta : X_n \cup \{\gamma_n\} \vdash_{krz} \delta\}$. Oznacza to, na mocy definicji rodziny $\mathbb{R}$, że $\beta \in X_{n+1}$, a więc automatycznie $\beta \in L^\alpha(X)$, co przeczy poczynionemu założeniu.

Q.E.D.

Twierdzenie 5.8. Dla dowolnych formuł α, β, γ oraz zbioru formuł X zachodzą równoważności:

- (1) $\beta \wedge \gamma \in L^\alpha(X)$ wttw, gdy ($\beta \in L^\alpha(X)$ oraz $\gamma \in L^\alpha(X)$)
- (2) $\beta \vee \gamma \in L^\alpha(X)$ wttw, gdy ($\beta \in L^\alpha(X)$ lub $\gamma \in L^\alpha(X)$)
- (3) $\beta \rightarrow \gamma \in L^\alpha(X)$ wttw, gdy (jeśli $\beta \in L^\alpha(X)$, to $\gamma \in L^\alpha(X)$)

- (4) $\beta \equiv \gamma \in L^{\alpha}(X)$ wttw, gdy ($\beta \in L^{\alpha}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma \in L^{\alpha}(X)$)

- (5) $\neg\beta$ jest elementem $L^{\alpha}(X)$ wttw, gdy β nie jest elementem $L^{\alpha}(X)$.

DOWÓD. Dla każdego z punktów (1)–(5) udowodnić należy implikację prostą i odwrotną.

Dowód (1).

Dowód $\Rightarrow$.
Załóżmy, że $\beta \wedge \gamma \in L^{\alpha}(X)$. Wtedy $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \beta \wedge \gamma$. Nadto:

- $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} (\beta \wedge \gamma) \rightarrow \beta$ ((A4): $\alpha/\beta,\ \beta/\gamma$)

- $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} (\beta \wedge \gamma) \rightarrow \gamma$ ((A5): $\alpha/\beta,\ \beta/\gamma$)

Ponieważ $\{\beta \wedge \gamma, (\beta \wedge \gamma) \rightarrow \beta, \beta \wedge \gamma) \rightarrow \gamma\} \vdash_{krz} \{\beta, \gamma\}$, więc z przechodniości relacji $\vdash_{krz}$ wynika, że $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \{\beta, \gamma\}$. Oznacza to, że:

- $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \beta$ oraz

- $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \gamma$.

Na mocy twierdzenia 5.7.(3) mamy stąd, że: $\beta \in L^{\alpha}(X)$ oraz $\gamma \in L^{\alpha}(X)$.

Dowód $\Leftarrow$.
Załóżmy, że $\beta \in L^{\alpha}(X)$ oraz $\gamma \in L^{\alpha}(X)$. Na mocy twierdzenia 5.2.(1) oraz 5.2.(3) otrzymujemy stąd:

- $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \beta$ oraz

- $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \gamma$.

Zauważmy, że formuła $\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$ jest tezą KRZ (otrzymujemy ją z (T15) przez podstawienie $\alpha/\beta,\ \beta/\gamma$). Ponieważ $\emptyset \vdash_{krz} \beta \rightarrow (\gamma \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$, więc (z monotoniczności $\vdash_{krz}$) także $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \beta \rightarrow (\gamma \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$. Mamy zatem: $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \{\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow (\beta \wedge \gamma)), \beta, \gamma\}$. Łatwo pokazać (stosując dwukrotnie regułę odrywania RO), że: $\{\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow (\beta \wedge \gamma)), \beta, \gamma\} \vdash_{krz} \beta \wedge \gamma$. Z przechodniości relacji $\vdash_{krz}$ mamy $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \beta \wedge \gamma$. Wreszcie, na mocy twierdzenia 5.7.(3) otrzymujemy stąd, że: $\beta \wedge \gamma \in L^{\alpha}(X)$.

Dowód (2).

Dowód $\Rightarrow$.

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Załóżmy, że $\beta \vee \gamma \in L^{\alpha}(X)$ i przypuśćmy, że: $\beta \notin L^{\alpha}(X)$ oraz $\gamma \notin L^{\alpha}(X)$. Skoro $\beta \vee \gamma \in L^{\alpha}(X)$, to $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \beta \vee \gamma$. Z przypuszczeń, iż $\beta \notin L^{\alpha}(X)$ oraz $\gamma \notin L^{\alpha}(X)$ oraz z twierdzenia 5.7.(4) wynika, że:

- $L^{\alpha}(X) \cup \{\beta\} \vdash_{krz} \alpha$ oraz
- $L^{\alpha}(X) \cup \{\gamma\} \vdash_{krz} \alpha$.

Na mocy twierdzenia o dedukcji wprost otrzymujemy stąd, że:

- $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \beta \rightarrow \alpha$ oraz
- $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \gamma \rightarrow \alpha$.

Zauważmy, że $\emptyset \vdash_{krz} (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\beta \vee \gamma) \rightarrow \alpha))$, ponieważ $(\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\beta \vee \gamma) \rightarrow \alpha))$ jest podstawieniem aksjomatu (A9): $\alpha/\beta, \beta/\alpha$. Z monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$ mamy zatem:

$$L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\beta \vee \gamma) \rightarrow \alpha)).$$

Otrzymujemy więc:

$$L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \{\beta \vee \gamma, \beta \rightarrow \alpha, \gamma \rightarrow \alpha, (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\beta \vee \gamma) \rightarrow \alpha))\}.$$

Stąd, przez trzykrotne zastosowanie reguły odrywania RO, otrzymujemy:

$$\{\beta \vee \gamma, \beta \rightarrow \alpha, \gamma \rightarrow \alpha, (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\beta \vee \gamma) \rightarrow \alpha))\} \vdash_{krz} \alpha.$$

Z przechodniości relacji $\vdash_{krz}$ mamy: $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \alpha$, a stąd, na mocy twierdzenia 5.7.(3) otrzymujemy: $\alpha \in L^{\alpha}(X)$. To daje sprzeczność z twierdzeniem 5.7.(1) i kończy dowód. Przypuszczenie nie wprost trzeba odrzucić. Pokazaliśmy zatem, że: $\beta \in L^{\alpha}(X)$ lub $\gamma \in L^{\alpha}(X)$.

Dowód $\Leftarrow$.

(i) Załóżmy, że $\beta \in L^{\alpha}(X)$. Oznacza to, że $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \beta$. Mamy również: $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \beta \rightarrow (\beta \vee \gamma)$, bo:

- formułę $\beta \to (\beta \vee \gamma)$ otrzymujemy z aksjomatu (A7) przez podstawienie $\alpha/\beta,\ \beta/\gamma$
- relacja $\vdash_{krz}$ jest monotoniczna.

Mamy więc $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \{\beta, \beta \to (\beta \vee \gamma)\}$.

Ponieważ $\{\beta, \beta \to (\beta \vee \gamma)\} \vdash_{krz} \beta \vee \gamma$, więc $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \beta \vee \gamma$. Na mocy twierdzenia 5.7.(3) otrzymujemy, że $\beta \vee \gamma \in L^\alpha(X)$.

(ii) Załóżmy, że $\gamma \in L^\alpha(X)$. Oznacza to, że $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \gamma$. Mamy również: $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \gamma \to (\beta \vee \gamma)$, bo:

- formułę $\gamma \to (\beta \vee \gamma)$ otrzymujemy z aksjomatu (A8) przez podstawienie $\alpha/\beta,\ \beta/\gamma$
- relacja $\vdash_{krz}$ jest monotoniczna.

Mamy więc $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \{\gamma, \gamma \to (\beta \vee \gamma)\}$.

Ponieważ $\{\gamma, \gamma \to (\beta \vee \gamma)\} \vdash_{krz} \beta \vee \gamma$, więc $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \beta \vee \gamma$. Na mocy twierdzenia 5.7.(3) otrzymujemy, że $\beta \vee \gamma \in L^\alpha(X)$.

Dowód (3).

Dowód $\Rightarrow$.

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Załóżmy, że $\beta \to \gamma \in L^\alpha(X)$ oraz $\beta \in L^\alpha(X)$ i przypuśćmy, że $\gamma \notin L^\alpha(X)$. Na mocy zwrotności i monotoniczności $\vdash_{krz}$ mamy: $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \{\beta \to \gamma, \beta\}$. Ponieważ $\{\beta \to \gamma, \beta\} \vdash_{krz} \gamma$, więc z przechodniości $\vdash_{krz}$ mamy: $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \gamma$. A to oznacza, na mocy twierdzenia 5.7.(3), że $\gamma \in L^\alpha(X)$. Otrzymaliśmy sprzeczność z przypuszczeniem, które zatem należy odrzucić. Ostatecznie: jeśli $\beta \to \gamma \in L^\alpha(X)$, to jeżeli $\beta \in L^\alpha(X)$, to również $\gamma \in L^\alpha(X)$.

Dowód $\Leftarrow$.

Załóżmy, że: jeśli $\beta \in L^\alpha(X)$, to również $\gamma \in L^\alpha(X)$. Oznacza to, że zachodzi alternatywa:

- (1) $\beta \notin L^\alpha(X)$ ***lub***
- (2) $\gamma \in L^\alpha(X)$.

Trzeba rozpatrzyć oddzielnie każdy z tych przypadków.

Przypadek (1). Prowadzimy dowód metodą nie wprost. Załóżmy, że $\beta \notin L^{\alpha}(X)$ i przypuśćmy, że $\beta \to \gamma \notin L^{\alpha}(X)$.

Ponieważ $\beta \to \gamma \notin L^{\alpha}(X)$, więc $L^{\alpha}(X) \cup \{\beta \to \gamma\} \vdash_{krz} \alpha$, na mocy twierdzenia 5.7.(4). Stąd, na mocy twierdzenia o dedukcji wprost, otrzymujemy $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} (\beta \to \gamma) \to \alpha$. Skoro $\beta \notin L^{\alpha}(X)$, to $L^{\alpha}(X) \cup \{\beta\} \vdash_{krz} \alpha$, na mocy twierdzenia 5.7.(4). Ponownie korzystając z twierdzenia o dedukcji wprost, otrzymujemy: $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \beta \to \alpha$. Zatem $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \{(\beta \to \gamma) \to \alpha, \beta \to \alpha\}$.

Jak pamiętamy z wykładu, formuła $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to ((\alpha \to \gamma) \to \gamma)$ jest tezą KRZ (teza (T17)). Dokonując w (T17) podstawienia $\alpha/\beta,\ \beta/\gamma,\ \gamma/\alpha$ otrzymujemy, na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$:

$$L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} ((\beta \to \gamma) \to \alpha) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha).$$

Pokazaliśmy więc, że:

$$L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \{(\beta \to \gamma) \to \alpha, \beta \to \alpha, ((\beta \to \gamma) \to \alpha) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha)\}.$$

Ponadto (jak łatwo sprawdzić, stosując dwukrotnie regułę odrywania RO):

$$\{(\beta \to \gamma) \to \alpha, \beta \to \alpha, ((\beta \to \gamma) \to \alpha) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha)\} \vdash_{krz} \alpha.$$

Z przechodniości relacji $\vdash_{krz}$ otrzymujemy: $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \alpha$. Stąd, na mocy twierdzenia 5.7.(3) mamy: $\alpha \in L^{\alpha}(X)$, a to jest sprzeczne z twierdzeniem 5.7.(1). Tak więc, przypuszczenie, że $\beta \to \gamma \notin L^{\alpha}(X)$ należy odrzucić. Ostatecznie: $\beta \to \gamma \in L^{\alpha}(X)$.

Przypadek (2). Niech $\gamma \in L^{\alpha}(X)$. Wtedy $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \gamma$. Na mocy reguły poprzedzania RPp mamy: $\{\gamma\} \vdash_{krz} \beta \to \gamma$. Z przechodniości relacji $\vdash_{krz}$ otrzymujemy $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \beta \to \gamma$. Wreszcie, na mocy twierdzenia 5.7.(3), mamy: $\beta \to \gamma \in L^{\alpha}(X)$.

Dowód (4).

Dowód $\Rightarrow$.

Należy rozpatrzyć dwa przypadki:

- (1) Zakładamy, że $\beta \equiv \gamma \in L^{\alpha}(X)$ oraz $\beta \in L^{\alpha}(X)$. Należy wtedy pokazać, że $\gamma \in L^{\alpha}(X)$.

- (2) Zakładamy, że $\beta \equiv \gamma \in L^{\alpha}(X)$ oraz $\gamma \in L^{\alpha}(X)$. Należy wtedy pokazać, że $\beta \in L^{\alpha}(X)$.

Przypadek (1). Na mocy przyjętych założeń oraz twierdzenia 5.7.(3) mamy:

- $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \beta \equiv \gamma$ oraz
- $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \beta$.

Z aksjomatu (A10) (przy podstawieniu $\alpha/\beta,\ \beta/\gamma$) oraz z monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$ otrzymujemy: $L^\alpha(X) \vdash_{krz} (\beta \equiv \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$. Mamy więc:

$$L^\alpha(X) \vdash_{krz} \{\beta, \beta \equiv \gamma, (\beta \equiv \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\}.$$

Ponadto, jak łatwo sprawdzić (stosując dwukrotnie regułę odrywania RO):

$$\{\beta, \beta \equiv \gamma, (\beta \equiv \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\} \vdash_{krz} \gamma.$$

Z przechodniości relacji $\vdash_{krz}$ otrzymujemy $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \gamma$, a stąd, na mocy twierdzenia 5.7.(3): $\gamma \in L^\alpha(X)$.

Przypadek (2). Na mocy przyjętych założeń oraz twierdzenia 5.7.(3) mamy:

- $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \beta \equiv \gamma$ oraz
- $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \gamma$.

Z aksjomatu (A11) (przy podstawieniu $\alpha/\beta,\ \beta/\gamma$) oraz z monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$ otrzymujemy: $L^\alpha(X) \vdash_{krz} (\beta \equiv \gamma) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)$. Mamy więc:

$$L^\alpha(X) \vdash_{krz} \{\gamma, \beta \equiv \gamma, (\beta \equiv \gamma) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)\}.$$

Ponadto, jak łatwo sprawdzić (stosując dwukrotnie regułę odrywania RO):

$$\{\gamma, \beta \equiv \gamma, (\beta \equiv \gamma) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)\} \vdash_{krz} \beta.$$

Z przechodniości relacji $\vdash_{krz}$ otrzymujemy $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \beta$, a stąd, na mocy twierdzenia 5.7.(3): $\beta \in L^\alpha(X)$.

Dowód $\Leftarrow$.
Załóżmy, że: $\beta \in L^\alpha(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma \in L^\alpha(X)$. Musimy pokazać, że $\beta \equiv \gamma \in L^\alpha(X)$.
Z przyjętych założeń wynika, że:

- jeśli $\beta \in L^{\alpha}(X)$, to $\gamma \in L^{\alpha}(X)$ oraz
- jeśli $\gamma \in L^{\alpha}(X)$, to $\beta \in L^{\alpha}(X)$.

Na mocy wyżej udowodnionego punktu (3) twierdzenia 5.8. otrzymujemy:

- $\beta \to \gamma \in L^{\alpha}(X)$ oraz
- $\gamma \to \beta \in L^{\alpha}(X)$.

Z powyższego (oraz z twierdzenia 5.7.(3)), mamy:

$$L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \{\beta \to \gamma, \gamma \to \beta\}.$$

Dokonując w (A11) podstawienia $\alpha/\beta,\ \beta/\gamma$ i korzystając z monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$ otrzymujemy: $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} (\beta \to \gamma) \to ((\gamma \to \beta) \to (\beta \equiv \gamma))$. Pokazaliśmy zatem, że:

$$L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \{\beta \to \gamma,\ \gamma \to \beta, (\beta \to \gamma) \to ((\gamma \to \beta) \to (\beta \equiv \gamma))\}.$$

Dwukrotnie stosując regułę odrywania RO pokazujemy, że:

$$\{\beta \to \gamma,\ \gamma \to \beta, (\beta \to \gamma) \to ((\gamma \to \beta) \to (\beta \equiv \gamma))\} \vdash_{krz} \beta \equiv \gamma.$$

Z przechodniości relacji $\vdash_{krz}$ otrzymujemy $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \beta \equiv \gamma$, a stąd, na mocy twierdzenia 5.7.(3) dostajemy ostatecznie $\beta \equiv \gamma \in L^{\alpha}(X)$.

Dowód (5).

Dowód $\Rightarrow$.

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Załóżmy, że β jest elementem $L^{\alpha}(X)$ i przypuśćmy, że $\neg\beta$ także jest elementem $L^{\alpha}(X)$. Wtedy:

- $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \neg\beta$ oraz
- $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \beta$.

Podstawiając w (T3) $\alpha/\beta,\ \beta/\alpha$ i korzystając z monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$ otrzymujemy: $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \neg\beta \to (\beta \to \alpha)$. Stąd mamy:

$$L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \{\neg\beta, \beta, \neg\beta \to (\beta \to \alpha)\}.$$

Dwukrotne zastosowanie reguły odrywania RO pokazuje, że:

$$\{\neg\beta, \beta, \neg\beta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)\} \vdash_{krz} \alpha.$$

Stąd, na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$, mamy: $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \alpha$. To jednak jest sprzeczne z twierdzeniem 5.7.(1). Przypuszczenie, że $\neg\beta$ jest elementem $L^{\alpha}(X)$ trzeba odrzucić. Ostatecznie zatem: $\neg\beta$ nie jest elementem $L^{\alpha}(X)$.

Dowód $\Leftarrow$.

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Załóżmy, że $\neg\beta$ nie jest elementem $L^{\alpha}(X)$ i przypuśćmy, że β także nie jest elementem $L^{\alpha}(X)$. Wtedy, na mocy twierdzenia 5.7.(4):

- $L^{\alpha}(X) \cup \{\beta\} \vdash_{krz} \alpha$ oraz
- $L^{\alpha}(X) \cup \{\neg\beta\} \vdash_{krz} \alpha$.

Stąd, na mocy twierdzenia o dedukcji wprost, otrzymujemy:

- $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \beta \rightarrow \alpha$ oraz
- $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \neg\beta \rightarrow \alpha$.

Dokonując w (T16) podstawienia $\alpha/\beta,\ \beta/\alpha$ i korzystając z monotoniczności relacji $\vdash_{krz}$ otrzymujemy:

$$L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha).$$

Pokazaliśmy więc, że:

$$L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \{\beta \rightarrow \alpha, \neg\beta \rightarrow \alpha, (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)\}.$$

Dwukrotne zastosowanie reguły odrywania RO pokazuje, że:

$$\{\beta \rightarrow \alpha, \neg\beta \rightarrow \alpha, (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)\} \vdash_{krz} \alpha.$$

Stąd i z przechodniości relacji $\vdash_{krz}$ wynika, że $L^{\alpha}(X) \vdash_{krz} \alpha$. Na mocy twierdzenia 5.7.(3) oznacza to, że $\alpha \in L^{\alpha}(X)$, co jednak jest sprzeczne z twierdzeniem 5.7.(1). Przypuszczenie, że β nie jest elementem $L^{\alpha}(X)$ trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie, β jest elementem $L^{\alpha}(X)$.

Q.E.D.

Twierdzenie 5.9. (TWIERDZENIE O PEŁNOŚCI KRZ.)

Dla dowolnej formuły α zachodzi równoważność: α jest tezą KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią KRZ.

DOWÓD.

Należy udowodnić implikację prostą oraz odwrotną, składające się na tezę 5.9.

Dowód $\Rightarrow$.

Dowód tej implikacji to dowód twierdzenia o trafności aksjomatyki (twierdzenia 5.6.), który już przeprowadziliśmy.

Dowód $\Leftarrow$.

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Załóżmy, że formuła α jest tautologią KRZ i przypuśćmy, że α nie jest tezą KRZ.

Ponieważ α nie jest tezą, to $\emptyset \nvdash_{krz} \alpha$. Istnieje zatem α-relatywny nadzbiór Lindenbauma $L^{\alpha}(\emptyset)$ o własnościach podanych w twierdzeniach 5.7. oraz 5.8.

Niech $h : F_{KRZ} \to \{0, 1\}$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru $L^{\alpha}(\emptyset)$, tj. dla każdego $\beta \in F_{KRZ}$:

- $h(\beta) = 1$, gdy $\beta \in L^{\alpha}(\emptyset)$
- $h(\beta) = 0$, gdy $\beta \notin L^{\alpha}(\emptyset)$.

Pokażemy, że:

- (1) $h(\alpha) = 0$ oraz
- (2) h jest wartościowaniem formuł języka KRZ.

Punkt (1) wynika bezpośrednio z definicji h oraz z twierdzenia 5.7.(1), ponieważ $\alpha \notin L^{\alpha}(\emptyset)$.

W dowodzie punktu (2) korzystamy z twierdzenia 5.8. Trzeba pokazać, że funkcja h spełnia warunki definiujące wartościowania w KRZ, tj. że:

- (2.1.) $h(\beta \wedge \gamma) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\beta) = 1$ i $h(\gamma) = 1$
- (2.2.) $h(\beta \vee \gamma) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\beta) = 0$ i $h(\gamma) = 0$
- (2.3.) $h(\beta \to \gamma) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\beta) = 1$ i $h(\gamma) = 0$
- (2.4.) $h(\beta \equiv \gamma) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\beta) = h(\gamma)$

- (2.5.) $h(\neg\beta) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\beta) = 0$.

Dowód (2.1.).
$h(\beta \wedge \gamma) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \wedge \gamma \in L^{\alpha}(\emptyset)$. Na mocy twierdzenia 5.8.(1), $\beta \wedge \gamma \in L^{\alpha}(\emptyset)$ wtedy i tylko wtedy, gdy: $\beta \in L^{\alpha}(\emptyset)$ i $\gamma \in L^{\alpha}(\emptyset)$. To oznacza, na mocy definicji funkcji h, że $h(\beta) = 1$ i $h(\gamma) = 1$.

Dowód (2.2.).
$h(\beta \vee \gamma) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \vee \gamma \notin L^{\alpha}(\emptyset)$. Na mocy twierdzenia 5.8.(2), $\beta \wedge \gamma \notin L^{\alpha}(\emptyset)$ wtedy i tylko wtedy, gdy: $\beta \notin L^{\alpha}(\emptyset)$ i $\gamma \notin L^{\alpha}(\emptyset)$. To oznacza, na mocy definicji funkcji h, że $h(\beta) = 0$ i $h(\gamma) = 0$.

Dowód (2.3.).
$h(\beta \to \gamma) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \to \gamma \notin L^{\alpha}(\emptyset)$. Na mocy twierdzenia 5.8.(3), $\beta \to \gamma \notin L^{\alpha}(\emptyset)$ wtedy i tylko wtedy, gdy: $\beta \in L^{\alpha}(\emptyset)$ i $\gamma \notin L^{\alpha}(\emptyset)$. To oznacza, na mocy definicji funkcji h, że $h(\beta) = 1$ i $h(\gamma) = 0$.

Dowód (2.4.).
$h(\beta \equiv \gamma) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \equiv \gamma \in L^{\alpha}(\emptyset)$. Na mocy twierdzenia 5.8.(4), $\beta \equiv \gamma \in L^{\alpha}(\emptyset)$ wtedy i tylko wtedy, gdy: $\beta \in L^{\alpha}(\emptyset)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma \in L^{\alpha}(\emptyset)$. Zachodzi to w dwóch przypadkach:

- (i) $\beta \in L^{\alpha}(\emptyset)$ i $\gamma \in L^{\alpha}(\emptyset)$ ***lub***
- (ii) $\beta \notin L^{\alpha}(\emptyset)$ i $\gamma \notin L^{\alpha}(\emptyset)$.

Na mocy definicji funkcji h mamy stąd:

- $h(\beta) = 1$ i $h(\gamma) = 1$ ***lub***
- $h(\beta) = 0$ i $h(\gamma) = 0$.

Mamy zatem:

- $h(\beta) = h(\gamma) = 1$ ***lub***
- $h(\beta) = h(\gamma) = 0$.

Ostatecznie, mamy: $h(\beta) = h(\gamma)$.

***Dowód (2.5.)**.*

$h(\neg\beta) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\neg\beta$ jest elementem $L^{\alpha}(\emptyset)$. Na mocy twierdzenia 5.8.(5), $\neg\beta$ jest elementem $L^{\alpha}(\emptyset)$ wtedy i tylko wtedy, gdy β nie jest elementem $L^{\alpha}(\emptyset)$. To, że β nie jest elementem $L^{\alpha}(\emptyset)$ jest z kolei równoważne temu, że $h(\beta) = 0$.

Formuła α ma przy wartościowaniu h wartość 0, a więc nie jest tautologią, co jest sprzeczne z założeniem. Należy więc odrzucić przypuszczenie (nie wprost), że α nie jest tezą. Ostatecznie, α jest tezą KRZ.

Q.E.D.

Twierdzenie 5.10. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α zachodzi równoważność: $X \vdash_{krz} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{KRZ} \alpha$.

DOWÓD. Należy udowodnić implikację prostą oraz odwrotną, składające się na tezę 5.10.

***Dowód** $\Rightarrow$.*

Załóżmy, że $X \vdash_{krz} \alpha$. Wtedy istnieje skończony ciąg formuł

$$\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \rangle$$

taki, że: α jest identyczna z γ_n, a każdy wyraz ciągu Γ jest bądź założeniem (tj. elementem zbioru X), bądź aksjomatem opartym na jednym ze schematów (A1)–(A13), bądź powstaje z elementów wcześniejszych w ciągu Γ poprzez zastosowanie reguły odrywania RO.

Pokażemy, używając indukcji matematycznej, że każdy element ciągu Γ wynika logicznie z X, tj. że $X \models_{KRZ} \gamma_i$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$.

I. *Początkowy krok indukcyjny*. Pokażemy, że $X \models_{KRZ} \gamma_1$. Zauważmy, że γ_1 musi być: albo aksjomatem, albo założeniem.

Jeśli γ_1 jest aksjomatem, to jest też tautologią KRZ. Mamy więc: $\emptyset \models_{KRZ} \gamma_1$. Z uwagi na monotoniczność relacji $\models_{KRZ}$ mamy: $X \models_{KRZ} \gamma_1$.

Jeśli γ_1 jest założeniem, to $\gamma_1 \in X$ i ze zwrotności relacji $\models_{KRZ}$ otrzymujemy, iż $X \models_{KRZ} \gamma_1$.

Następnikowy krok indukcyjny. Załóżmy, że wszystkie elementy ciągu Γ o numerach $\leqslant k$ (gdzie $k < n$) wynikają logicznie ze zbioru X, tj. że: $X \models_{KRZ} \gamma_i$ dla wszystkich $i \leqslant k$. Pokażemy, że zachodzi wtedy: $X \models_{KRZ} \gamma_{k+1}$.

Są możliwe trzy przypadki:

- (1) γ_{k+1} jest aksjomatem,

- (2) γ_{k+1} jest założeniem,
- (3) γ_{k+1} powstała z elementów wcześniejszych w ciągu Γ poprzez zastosowanie reguły odrywania RO.

W przypadkach (1) i (2) postępujemy analogicznie, jak w początkowym kroku indukcyjnym i pokazujemy, że $X \models_{KRZ} \gamma_{k+1}$.

W przypadku (3), skoro γ_{k+1} powstała z elementów wcześniejszych w ciągu Γ przez zastosowanie reguły odrywania, to dla pewnych $m_1 < k+1, m_2 < k+1$ istnieją w ciągu Γ formuły γ_{m_1} oraz γ_{m_2} takie, że:

- γ_{m_1} jest identyczna z $\gamma_{m_2} \to \gamma_{k+1}$ ***lub***
- γ_{m_2} jest identyczna z $\gamma_{m_1} \to \gamma_{k+1}$.

Na mocy założenia indukcyjnego, formuły γ_{m_1} oraz γ_{m_2} wynikają logicznie ze zbioru X. A zatem:

- ($X \models_{KRZ} \gamma_{m_1}$ i $X \models_{KRZ} \gamma_{m_1} \to \gamma_{k+1}$) ***lub***
- $X \models_{KRZ} \gamma_{m_2}$ i $X \models_{KRZ} \gamma_{m_2} \to \gamma_{k+1}$.

Otrzymujemy z tego, że:

- $X \models_{KRZ} \{\gamma_{m_1}, \gamma_{m_1} \to \gamma_{k+1}\}$ ***lub***
- $X \models_{KRZ} \{\gamma_{m_2}, \gamma_{m_2} \to \gamma_{k+1}\}$

Ponieważ reguła odrywania RO jest niezawodna, mamy:

- $\{\gamma_{m_1}, \gamma_{m_1} \to \gamma_{k+1}\} \models_{KRZ} \gamma_{k+1}$ ***oraz***
- $\{\gamma_{m_2}, \gamma_{m_2} \to \gamma_{k+1}\} \models_{KRZ} \gamma_{k+1}$.

Na mocy przechodniości $\models_{KRZ}$ otrzymujemy z powyższego: $X \models_{KRZ} \gamma_{k+1}$

Dowód $\Leftarrow$.

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Załóżmy, że $X \models_{KRZ} \alpha$ i przypuśćmy, że $X \nvdash_{krz} \alpha$.

Istnieje zatem α-relatywny nadzbiór Lindenbauma $L^{\alpha}(X)$ o własnościach podanych w twierdzeniach 5.7. oraz 5.8.

Niech $h : F_{KRZ} \to \{0, 1\}$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru $L^{\alpha}(X)$, tj. dla każdego $\beta \in F_{KRZ}$:

- $h(\beta) = 1$, gdy $\beta \in L^{\alpha}(X)$
- $h(\beta) = 0$, gdy $\beta \notin L^{\alpha}(X)$.

Wtedy:

- (1) $h(\alpha) = 0$
- (2) h jest wartościowaniem formuł języka KRZ.

Dowód punktu (2) jest analogiczny do dowodu przeprowadzonego w poprzednim twierdzeniu: w miejsce $L^{\alpha}(\emptyset)$ wpisujemy $L^{\alpha}(X)$.

Dowód punktu (1) otrzymujemy bezpośrednio z twierdzenia 5.7.(1), czyli z faktu, że $\alpha \notin L^{\alpha}(X)$ oraz z definicji funkcji h.

Na mocy twierdzenia 5.7.(2) mamy: $X \subseteq L^{\alpha}(X)$. Stąd i z definicji funkcji h otrzymujemy inkluzję: $h[X] \subseteq \{1\}$. Ponieważ $h(\alpha) = 0$, więc wynika z tego, że $X \nvDash_{KRZ} \alpha$, co jest sprzeczne z poczynionym założeniem. Musimy więc odrzucić przypuszczenie, że $X \nvdash_{krz} \alpha$. Ostatecznie, mamy: $X \vdash_{krz} \alpha$.

Q.E.D.

* * *

WYKORZYSTYWANA LITERATURA:

Batóg, T. 1999. *Podstawy logiki.* Wydawnictwo UAM, Poznań.

Grzegorczyk, A. 1975. *Zarys logiki matematycznej.* PWN, Warszawa.

Marek, I. 2002. *Elementy logiki formalnej.* Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.

Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* PWN, Warszawa.

Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej.* Białystok.

Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną.* PWN, Warszawa.

Surma, S. (red.) 1973. *Studies in the History of Mathematical Logic.* Ossolineum.

* * *

Podane wyżej dowody (z wyjątkiem szkicu dowodu twierdzenia 5.5.) pochodzą z podręcznika IWONY MAREK. Precyzyjny dowód twierdzeń 5.5.(e) oraz 5.5.(f) znaleźć można np. w podręczniku TADEUSZA BATOGA (strony: 82–87) lub w monografii WITOLDA POGORZELSKIEGO (strony: 85–97).

W monografii pod redakcją STANISŁAWA SURMY znajdujemy m.in. przegląd różnych technik dowodzenia twierdzeń o pełności oraz informacje historyczne.

* * *

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl