

Logika Matematyczna 16–17

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Semantyka KRP (1)

Plan na dziś

Rozpoczynamy prezentację **Klasycznego Rachunku Predykatów** (KRP).
W tym i następnym wykładzie omówimy:

- składnię i semantykę języka KRP
- tautologie oraz wynikanie logiczne w KRP
- język KRP jako standard w konstrukcji języków teorii naukowych.

Kolejne wykłady dotyczące KRP poświęcone będą różnym operacjom konsekwencji:

- tablicowej
- aksjomatycznej
- założeniowej
- rezolucyjnej
- gentzenowskiej.

Plan na dziś

Pokażemy, że wszystkie te operacje konsekwencji są trafne i pełne. Jedną z podstawowych różnic między KRP a omówionym wcześniej KRZ polega na tym, że KRP *nie jest* rozstrzygalny: nie istnieje algorytm, pozwalający rozstrzygać o dowolnej formule języka KRP czy jest ona prawem (tautologią) tego rachunku. KRP jest jedynie *półrozstrzygalny*: jeśli jakaś formuła języka KRZ *jest* tautologią KRP, to fakt ten można poświadczyć za pomocą metody algorytmicznej (bazującej na którejś z wymienionych wyżej operacji konsekwencji).

Uwaga. Problematyka omawiana w semestrze letnim jest trudniejsza od tej przedstawionej dotychczas. Zaleca się udział w zajęciach, odrabianie zadań domowych, samodzielne rozwiązywanie zadań. Będziemy istotnie korzystać z wiadomości przedstawionych na zajęciach ze *Wstępu do Matematyki*.

Literatura zalecana

W niniejszej prezentacji podajemy jedynie potrzebne definicje oraz formułujemy twierdzenia. Dowody wszystkich twierdzeń oraz przykłady i ćwiczenia podano w pliku semkrp.pdf. Zalecaną literaturą do tej problematyki jest:

- Batóg, T. 2003. *Podstawy logiki*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań (strony 109–112 oraz 238–261).
- Ławrow, I.A., Maksimowa, L.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (strony 85–89 oraz 95–96, a zwłaszcza przypis tłumacza na stronach 87–88).
- Marek, I. 2002. *Elementy logiki formalnej*. Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.
- Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek predykatów. Zarys teorii*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Stanosz, B. 2005. *Ćwiczenia z logiki*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Alfabet

Niech I, J, K będą dowolnymi zbiorami. Rozpatrzmy **alfabet** $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \Sigma_5 \cup \Sigma_6$, gdzie:

$\Sigma_1 = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ — *zmienne indywidualowe,*

$\Sigma_2 = \{P_i^{n_i}\}_{i \in I} (n_i \in \mathcal{N})$ — *predykaty,*

$\Sigma_3 = \{f_j^{n_j}\}_{j \in J} (n_j \in \mathcal{N})$ — *symbole funkcyjne,*

$\Sigma_4 = \{a_k\}_{k \in K}$ — *stałe indywidualowe,*

$\Sigma_5 = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \equiv, \forall, \exists\}$ — *stałe logiczne,*

$\Sigma_6 = \{, , , (,)\}$ — *symbole pomocnicze.*

Alfabet

- $P_i^{n_i}$ nazywamy n_i -argumentowym predykatem,
- $f_j^{n_j}$ nazywamy n_j -argumentowym symbolem funkcyjnym,
- symbol \forall nazywamy *kwantyfikatorem generalnym*,
- symbol \exists nazywamy *kwantyfikatorem egzystencjalnym*,
- symbole: \wedge (*koniunkcja*), \vee (*alternatywa*), \rightarrow (*implikacja*), \neg (*negacja*) i \equiv (*równoważność*) znane są z wykładu semestru zimowego,
- symbole pomocnicze to: przecinek oraz lewy i prawy nawias.

Zbiór $\sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ nazwiemy *sygnaturą*. W dalszym ciągu mówić będziemy o pewnej ustalonej sygnaturze σ . Zwykle rozważa się przypadek, gdy $I = J = K = \mathcal{N}$ (zbiór wszystkich liczb naturalnych).

Wyrażeniem języka KRP nazywamy każdy skończony ciąg symboli alfabetu tego języka.

Termy

Definicja *termu* języka KRP jest indukcyjna:

- (i) wszystkie zmienne indywiduowe x_n oraz wszystkie stałe indywiduowe a_k są termami;
- (ii) jeśli t_1, \dots, t_{n_j} są dowolnymi termami, to wyrażenie $f_j^{n_j}(t_1, \dots, t_{n_j})$ jest termem;
- (iii) nie ma innych termów (języka KRP) prócz zmiennych indywiduowych oraz stałych indywiduowych oraz tych termów, które można skonstruować wedle reguły (ii).

Termy, w których nie występują żadne zmienne nazywamy *termami bazowymi*.

Formuły

Formułą atomową języka KRP nazywamy każde wyrażenie postaci $P_i^{n_i}(t_1, \dots, t_{n_i})$, gdzie t_1, \dots, t_{n_i} są dowolnymi termami.

Definicja **formuły** języka KRP jest indukcyjna:

- (i) każda formuła atomowa jest formułą;
- (ii) jeśli α jest dowolną formułą, to wyrażenia $\neg(\alpha)$, $\forall x_n (\alpha)$, $\exists x_n (\alpha)$ są formułami;
- (iii) jeśli α i β są dowolnymi formułami, to wyrażenia $(\alpha) \wedge (\beta)$, $(\alpha) \vee (\beta)$, $(\alpha) \rightarrow (\beta)$, $(\alpha) \equiv (\beta)$ są formułami;
- (iv) nie ma innych formuł (języka KRP) prócz tych, które można utworzyć wedle reguł (i)–(iii).

Zmienne wolne i związane

Wyrażenie α w dowolnej formule o postaci $\forall x_n (\alpha)$ lub o postaci $\exists x_n (\alpha)$ nazywamy *zasięgiem* odpowiedniego kwantyfikatora.

Zmienna x_n występująca na danym miejscu w formule α jest *na tym miejscu związana*, jeżeli jest ona podpisana pod którymś z kwantyfikatorów lub też znajduje się w zasięgu jakiegoś kwantyfikatora, pod którym podpisana jest również zmienna x_n .

Jeżeli zmienna x_n , występująca na danym miejscu w formule α , nie jest na tym miejscu związana, to mówimy, że jest ona *na tym miejscu wolna w α* .

Mówimy, że x_n jest *zmienną wolną w α* wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej na jednym miejscu zmienna ta jest wolna w α .

Formuły nie zawierające żadnych zmiennych wolnych nazywamy *zdaniem* (języka KRP).

Podstawialność termu za zmienną w formule

Mówimy, że term t jest *podstawialny* za zmienną x_i do formuły α wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna x_i nie znajduje się w α jako zmienna wolna w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego którąś ze zmiennych występujących w formule α .

Jeśli t jest podstawialny za x_i do α , to żadna zmienna występująca w α nie stanie się związana po podstawieniu t za wszystkie wolne wystąpienia x_i w formule α .

Operacja podstawiania termu za zmienną w formule

Definicja operacji $S(t, x, A)$ *podstawiania termu t za zmienną x_i* (w dowolnym termie A lub formule A języka KRP) ma postać indukcyjną (poniżej t jest termem, x_i jest zmienną, a_j jest stałą, α i β są formułami, a reszta oznaczeń jest oczywista):

- $S(t, x_i, x_j)$ jest termem x_j , gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, x_j)$ jest termem t , gdy $i = j$
- $S(t, x_i, a_j)$ jest termem a_j
- $S(t, x_i, f_j(t_1, \dots, t_n))$ jest termem $f_j(S(t, x_i, t_1), \dots, S(t, x_i, t_n))$
- $S(t, x_i, P_j(t_1, \dots, t_n))$ jest formułą $P_j(S(t, x_i, t_1), \dots, S(t, x_i, t_n))$
- $S(t, x_i, \neg(\alpha))$ jest formułą $\neg S(t, x_i, \alpha)$

Operacja podstawiania termu za zmienną w formule

- $S(t, x_i, \forall x_j (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j S(t, x_i \alpha)$, gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, \forall x_j (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j (\alpha)$, gdy $i = j$
- $S(t, x_i, \exists x_j (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j S(t, x_i \alpha)$, gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, \exists x_j (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j (\alpha)$, gdy $i = j$
- $S(t, x_i, \alpha \wedge \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \wedge S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \vee \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \vee S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \rightarrow \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \rightarrow S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \equiv \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \equiv S(t, x_i, \beta)$.

Gdy x i y są zmiennymi, to zamiast $S(y, x, \alpha)$ piszemy czasem $\alpha(x/y)$.

Interpretacje

Nazwiemy *interpretacją języka o sygnaturze σ* dowolny układ $\langle M, \sigma, \Delta \rangle$, gdzie M jest zbiorem, a Δ funkcją (*funkcją denotacji*) o dziedzinie σ , która przyporządkowuje:

- każdej stałej indywidualowej a_k element $\Delta(a_k) \in M$;
- każdemu predykatowi $P_i^{n_i}$ relację n_i -argumentową $\Delta(P_i^{n_i}) \subseteq M^{n_i}$;
- każdemu symbolowi funkcyjnemu $f_j^{n_j}$ funkcję n_j -argumentową $\Delta(f_j^{n_j}) : M^{n_j} \rightarrow M$.

Wtedy *strukturami relacyjnymi sygnatury σ* są dowolne układy $\langle M, \Delta[\sigma] \rangle$, gdzie Δ jest funkcją denotacji, a $\Delta[\sigma]$ oznacza ciąg (indeksowany elementami zbioru $I \cup J \cup K$) wszystkich wartości funkcji σ . Jeśli $\mathfrak{M} = \langle M, \Delta[\sigma] \rangle$ jest strukturą relacyjną, to M nazywamy *uniwersum* struktury \mathfrak{M} .

Interpretacje

Jeśli $\mathfrak{M} = \langle M, \Delta[\sigma] \rangle$ jest strukturą relacyjną, to czasem wygodnie jest używać następujących oznaczeń:

- $|\mathfrak{M}|$ dla oznaczenia uniwersum struktury \mathfrak{M} , czyli dla oznaczenia zbioru M ;
- $\Delta^{\mathfrak{M}}$ dla oznaczenia funkcji denotacji struktury \mathfrak{M} .

Uwaga terminologiczna. W polskiej literaturze przedmiotu terminów *struktura relacyjna*, *system relacyjny* oraz *struktura algebraiczna* używa się wymiennie. Gdy sygnatura nie zawiera predykatów, to mówimy o *algebrach*, gdy zaś sygnatura nie zawiera ani stałych ani symboli funkcyjnych, to mówimy o strukturach relacyjnych *czystych*.

Wartościowania

Wartościowaniem zmiennych w uniwersum M nazywamy dowolny nieskończony przeliczalny ciąg $w = \langle w_n \rangle$ elementów zbioru M . Gdy

$$w = \langle w_n \rangle = \langle w_0, w_1, \dots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \dots \rangle$$

jest wartościowaniem w M oraz $m \in M$, to przez w_i^m oznaczamy wartościowanie:

$$\langle w_0, w_1, \dots, w_{i-1}, m, w_{i+1}, \dots \rangle.$$

Uwaga. Nie myl wartościowań w KRZ z wartościowaniami w KRP. W KRZ wartościowania to nieskończone ciągi wartości logicznych, w KRP wartościowania to nieskończone ciągi elementów uniwersum interpretacji.

Wartości termów

Jeśli t jest termem sygnatury σ , a $\langle M, \Delta[\sigma] \rangle$ strukturą relacyjną sygnatury σ oraz $w = \langle w_i \rangle$ jest wartościowaniem zmiennych w M , to **wartość termu t w strukturze $\langle M, \Delta[\sigma] \rangle$ przy wartościowaniu w** , oznaczana przez $\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t)$ określona jest indukcyjnie:

- gdy t jest zmienną x_i , to $\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t) = w_i$;
- gdy t jest stałą a_k , to $\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t) = \Delta(a_k)$;
- gdy t jest termem złożonym postaci $f_j^{n_j}(t_1, \dots, t_{n_j})$, gdzie t_1, \dots, t_{n_j} są termami, to

$$\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t) = \Delta(f_j^{n_j})(\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \Delta_w^{\mathfrak{M}}(t_{n_j})).$$

Relacja spełniania

Definicja relacji $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ *spełniania formuły α w strukturze \mathfrak{M} przez wartościowanie w* ma następującą postać indukcyjną:

- $\mathfrak{M} \models_w P_i^{n_i}(t_1, \dots, t_{n_i})$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $\Delta(P_i^{n_i})(\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \Delta_w^{\mathfrak{M}}(t_{n_i}))$;
- $\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \wedge (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
- $\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \vee (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
- $\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \rightarrow (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
- $\mathfrak{M} \models_w \neg(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$;
- $\mathfrak{M} \models_w \forall x_i (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla każdego $m \in M$;
- $\mathfrak{M} \models_w \exists x_i (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla pewnego $m \in M$.

Relacja spełniania

Ćwiczenie. Podaj definicję dla przypadku $\mathfrak{M} \models_w (\alpha \equiv (\beta))$.

Jeśli $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla każdego wartościowania w , to mówimy, że formuła α jest **prawdziwa w \mathfrak{M}** i piszemy wtedy $\mathfrak{M} \models \alpha$.

Piszemy $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models \alpha$.

Mówimy, że formuła α jest **fałszywa w \mathfrak{M}** , gdy nie jest ona prawdziwa w \mathfrak{M} .

Formuła α jest zatem fałszywa w \mathfrak{M} wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najmniej jedno wartościowanie w takie, że: $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.

Przykład 1

Niech w sygnaturze rozważanego języka będzie dwuargumentowy predykat \prec . Niech interpretacją tego predykatu w zbiorze wszystkich liczb naturalnych będzie relacja $<$ mniejszości między liczbami naturalnymi. Zastanówmy się, jakie wartościowania (czyli ciągi liczb naturalnych) spełniają każdą z podanych niżej formuł:

- (1) $x_1 \prec x_2$
- (2) $\exists x_2 (x_1 \prec x_2)$
- (3) $\forall x_1 (x_1 \prec x_2)$
- (4) $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 \prec x_2)$
- (5) $\exists x_2 \forall x_1 (x_1 \prec x_2)$.

Przykład 1

Formuła (1) jest spełniona przez wszystkie ciągi w , dla których: $w_1 < w_2$.

Formuła (2) jest spełniona przez takie ciągi w , które różnią się od ciągów spełniających formułę (1) co najwyżej na drugim miejscu. Ponieważ dla dowolnej liczby w_1 możemy znaleźć liczbę c taką, że $w_1 < c$, więc formułę (2) spełniają **wszystkie** ciągi liczb naturalnych.

Formuły (3) nie spełnia **żaden** ciąg. Przypuśćmy bowiem, że jakieś wartościowanie w spełnia (3). Wtedy **każdy** ciąg v różniący się od w na pierwszym miejscu (tj. taki, że $w_1 \neq v_1$) musiałby spełniać formułę (1). Ale np. ciąg stały $\langle w_2, w_2, w_2, \dots \rangle$ nie spełnia formuły (1) — sprzeczność. Nie ma zatem ciągu spełniającego (3).

Jakiś ciąg w spełnia formułę (4), gdy każdy ciąg v otrzymany z w przez zastąpienie w_1 **dowolną** liczbą naturalną spełnia formułę (2). Ale formułę (2) spełniają **wszystkie** ciągi. Zatem również formułę (4) spełniają **wszystkie** ciągi. Ponieważ **żaden** ciąg nie spełnia formuły (3), więc również **żaden** ciąg nie spełnia formuły (5) (bo ciągi spełniające (5) miałyby się różnić od jakiegoś ciągu spełniającego (3) co najwyżej na drugim miejscu).

Przykład 2

Niech N będzie predykatem jednoargumentowym, \doteq predykatem dwuargumentowym, S jednoargumentowym symbolem funkcyjnym, a \bigcirc stałą. Zamiast $\doteq (t_1, t_2)$, dla termów t_1 oraz t_2 piszemy: $t_1 \doteq t_2$. Rozważmy następujące zdania:

- $N(\bigcirc)$
- $\forall x \neg(\bigcirc \doteq S(x))$
- $\forall x (N(x) \rightarrow N(S(x)))$
- $\forall x \forall y (S(x) \doteq S(y) \rightarrow x \doteq y)$
- $\forall x (x \doteq x)$
- $\forall x \forall y (x \doteq y \rightarrow y \doteq x)$
- $\forall x \forall y \forall z ((x \doteq y \wedge y \doteq z) \rightarrow x \doteq z)$
- $\forall x \forall y ((N(x) \wedge x \doteq y) \rightarrow N(y))$
- $\forall x \forall y (x \doteq y \rightarrow S(x) \doteq S(y)).$

Przykład 2

Wtedy modelem powyższego zbioru zdań będzie każda struktura \mathfrak{M} o uniwersum M zawierającym wszystkie liczby naturalne oraz następującej interpretacji stałej 0 , symbolu funkcyjnego S , predykatu N oraz predykatu \doteq :

- 0 denotuje liczbę 0 ;
- S denotuje funkcję następnika, tj. $S(t)$ jest liczbą (oznaczaną przez) $t + 1$, dla dowolnej liczby (oznaczanej przez) t ;
- predykat N denotuje własność „być liczbą naturalną”;
- predykat \doteq denotuje relację identyczności $=$.

Proszę podumać nad następującym pytaniem: czy w takim modelu \mathfrak{M} prawdziwe jest zdanie: $\forall x N(x)$? Oczywiście, dla dowolnego modelu \mathfrak{M} powyższego zbioru zdań, denotacja predykatu N w \mathfrak{M} będzie zbiorem nieskończonym. Ale czy musi to być zbiór pokrywający się z całym uniwersum modelu?

Przykład 3

Rozważmy następujące formuły, zawierające predykat dwuargumentowy R :

- $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$ (R nazywa relację przechodnią)
- $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$ (R nazywa relację asymetryczną)
- $\forall x \exists y R(x, y)$ (R nazywa relację serialną).

Wtedy każda interpretacja, w której prawdziwe są powyższe zdania, ma uniwersum nieskończone.

Dygresja

Dla tych, którzy narzekają na abstrakcyjność przykładów:

Politechnika. Profesor dyktuje zadanie:

— Na sznurku wisi metalowa sztabka. Pocisk, lecący prostopadle do powierzchni sztabki, przebija sztabkę, tracąc przy tym połowę swojej prędkości. Oblicz kąt wychylenia sztabki.

Na to jedno z Dziewcząt (pragnące zostać Panią Inżynier, lub choćby Panią Inżynierową):

— Panie Psorze, my zawsze liczymy takie schematyczne zadania. Czy nie moglibyśmy rozważyć przyjemniejszych, weselszych problemów. Jakieś kwiatki, Zwierzątka,...

Na to profesor:

— Proszę bardzo. Na sznurku wisi Wiewiórka...

Tautologie i wynikanie logiczne w KRP

Tautologią (klasycznego rachunku predykatów sygnatury σ) nazywamy każdą formułę (sygnatury σ), która jest prawdziwa we wszystkich strukturach relacyjnych (sygnatury σ).

Jeśli $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich α ze zbioru X , to mówimy, że \mathfrak{M} jest **modelem** X i piszemy $\mathfrak{M} \models X$.

Mówimy, że α **wynika logicznie** z X wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem $\{\alpha\}$. Piszemy wtedy $X \models_{krp} \alpha$.

Ogólniej, mówimy, że ze zbioru X **wynika logicznie** (na gruncie KRP) zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem zbioru Y . Piszemy wtedy $X \models_{krp} Y$.

Jeśli nie zachodzi $X \models_{krp} Y$, to piszemy $X \not\models_{krp} Y$. Podobnie, jeśli nie zachodzi $X \models_{krp} \alpha$, to piszemy $X \not\models_{krp} \alpha$.

Uwaga!

Należy zwracać uwagę, w jakich kontekstach występuje symbol \models i jak poszczególne relacje semantyczne są definiowane:

- $\mathfrak{M} \models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla wszystkich w .
- $\mathfrak{M} \not\models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$ dla co najmniej jednego w .
- $\mathfrak{M} \models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich $\alpha \in X$.
- $\mathfrak{M} \models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\alpha \in X$ oraz dla wszystkich w : $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.
- $\mathfrak{M} \not\models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\alpha \in X$ taka, że $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.
- $\mathfrak{M} \not\models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\alpha \in X$ oraz w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.

Uwaga!

- $X \models_{krp} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej struktury \mathfrak{M} : jeśli $\mathfrak{M} \models X$, to $\mathfrak{M} \models Y$.
- $X \not\models_{krp} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje struktura \mathfrak{M} taka, że: $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models Y$.
- $X \models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej struktury \mathfrak{M} : jeśli $\mathfrak{M} \models X$, to $\mathfrak{M} \models \alpha$.
- $X \not\models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje struktura \mathfrak{M} taka, że: $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.
- $X \not\models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: struktura \mathfrak{M} oraz wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.

Niektóre własności pojęć semantycznych

Wyrazimy teraz precyzyjnie intuicyjne sformułowania:

- wartość termu w ustalonej interpretacji zależy jedynie od wartościowań zmiennych wolnych tego termu
- spełnianie formuły w ustalonej interpretacji zależy jedynie od wartościowań zmiennych wolnych tej formuły.

Twierdzenie 16.1.

Niech $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ będą wartościowaniami w uniwersum M struktury $\mathfrak{M} = \langle M, \Delta[\sigma] \rangle$. Jeżeli $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych występujących w termie t , to:

$$\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t) = \Delta_v^{\mathfrak{M}}(t).$$

Niektóre własności pojęć semantycznych

Twierdzenie 16.2.

Jeżeli $w = \langle w_n \rangle$ i $v = \langle v_n \rangle$ są wartościowaniami w uniwersum M struktury $\mathfrak{M} = \langle M, \Delta[\sigma] \rangle$ oraz $v = \langle w_1, w_2, \dots, w_{i-1}, \Delta_w^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \dots \rangle$, to:

$$\Delta_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t')) = \Delta_v^{\mathfrak{M}}(t').$$

Twierdzenie 16.3.

Niech $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ będą wartościowaniami w uniwersum M struktury $\mathfrak{M} \langle M, \Delta[\sigma] \rangle$. Jeżeli $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α , to:

$$\mathfrak{M} \models_w \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_v \alpha.$$

Niektóre własności pojęć semantycznych

Twierdzenie 16.4.

Jeżeli α jest zdaniem, a $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ są dowolnymi wartościowaniami w uniwersum struktury \mathfrak{M} , to:

$$\mathfrak{M} \models_w \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_v \alpha.$$

Twierdzenie 16.5.

Jeśli α jest zdaniem, to następujące warunki są równoważne:

- (1) Istnieje wartościowanie $w = \langle w_n \rangle$ w uniwersum struktury \mathfrak{M} takie, że $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.
- (2) Dla każdego wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ w uniwersum struktury \mathfrak{M} mamy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.

Niektóre własności pojęć semantycznych

Twierdzenie 16.6.

Jeśli t jest termem podstawialnym za zmienną x_i do α , a $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ są wartościowaniami w uniwersum struktury \mathfrak{M} oraz

$$v = \langle w_1, w_2, \dots, w_{i-1}, \Delta_w^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \dots \rangle,$$

to:

$$\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_v \alpha.$$

Dowody wszystkich powyższych twierdzeń przeprowadza się przez indukcję strukturalną.

Niektóre własności pojęć semantycznych

Twierdzenie 16.7.

Relacja \models_{krp} ma następujące własności:

- (1) \models_{krp} jest zwrotna: $X \models_{krp} X$ dla każdego X .
- (2) \models_{krp} jest przechodnia: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $Y \models_{krp} Z$, to $X \models_{krp} Z$, dla wszystkich X, Y, Z .
- (3) \models_{krp} jest monotoniczna względem pierwszego argumentu: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $X \subseteq Z$, to $Z \models_{krp} Y$.
- (4) \models_{krp} jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, to $X \models_{krp} Z$.
- (5) $\emptyset \models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią KRP.

Niektóre własności pojęć semantycznych

Twierdzenie 16.8.

Niech α , β oraz γ będą dowolnymi tautologiami KRP. Wtedy tautologiami KRP są również wszystkie formuły postaci:

- (A1) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- (A2) $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (A3) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- (A4) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
- (A5) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
- (A6) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)))$
- (A7) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
- (A8) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

Niektóre własności pojęć semantycznych

- (A9) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow \beta))$
- (A10) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (A11) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- (A12) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \equiv \beta))$
- (A13) $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (A14) $\forall x_n \alpha \rightarrow S(t, x_n, \alpha)$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A15) $S(t, x_n, \alpha) \rightarrow \exists x_n \alpha$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A16) $\forall x_n (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x_n \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w α
- (A17) $\forall x_n (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x_n \alpha \rightarrow \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w β .

Komentarza wymagają warunki umieszczone w punktach (A14)–(A17).
Podamy mianowicie przykłady wskazujące, że jeśli warunki te nie są spełnione, to odnośne formuły nie są tautologiami KRP.

Niektóre własności pojęć semantycznych

1. Pokażemy, że istnieje formuła α , dla której t nie jest podstawialny za x_n w α i dla której $\forall x_n \alpha \rightarrow S(t, x_n, \alpha)$ nie jest tautologią KRP.

Niech α będzie formułą: $\exists x_m P(x_n, x_m)$, gdzie P jest dowolnym predykatem dwuargumentowym. Wtedy $S(x_m, x_n, \alpha)$ jest formułą $\exists x_m P(x_m, x_m)$.

Formuła (A14) ma wtedy postać:

$$\forall x_n \exists x_m P(x_n, x_m) \rightarrow \exists x_m P(x_m, x_m).$$

Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje \mathfrak{M} , w których jest ona fałszywa. Dla przykładu: niech uniwersum \mathfrak{M} będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych, a interpretacją P w \mathfrak{M} niech będzie relacja mniejszości. Wtedy poprzednik powyższej implikacji jest prawdziwy w \mathfrak{M} , a jej następnik jest w \mathfrak{M} fałszywy.

Niektóre własności pojęć semantycznych

2. Pokażemy, że istnieje formuła α , dla której t nie jest podstawialny za x_n w α i dla której $S(t, x_n, \alpha) \rightarrow \exists x_n \alpha$ nie jest tautologią KRP.

Niech α będzie formułą: $\forall x_m P(x_n, x_m)$, gdzie P jest dowolnym predykatem dwuargumentowym. Wtedy $S(x_m, x_n, \alpha)$ jest formułą $\forall x_m P(x_m, x_m)$.

Formuła (A14) ma wtedy postać:

$$\forall x_m P(x_m, x_m) \rightarrow \exists x_n \forall x_m P(x_n, x_m).$$

Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje \mathfrak{M} , w których jest ona fałszywa. Dla przykładu: niech uniwersum \mathfrak{M} będzie zbiorem wszystkich liczb całkowitych, a interpretacją P w \mathfrak{M} niech będzie relacja mniejszości. Wtedy poprzednik powyższej implikacji jest prawdziwy w \mathfrak{M} , a jej następnik jest w \mathfrak{M} fałszywy.

3. Pokażemy, że istnieją formuły α oraz β takie, że x_n jest wolna w α i dla których $\forall x_n (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x_n \beta)$ nie jest tautologią KRP.

Niech P oraz Q będą dowolnymi predykatami jednoargumentowymi. Niech α będzie formułą $P(x_n)$, a β formułą $Q(x_n)$. Zauważmy, że x_n jest zmienną wolną formuły α . Formuła (A16) ma w tym przypadku postać:

$$\forall x_n (P(x_n) \rightarrow Q(x_n)) \rightarrow (P(x_n) \rightarrow \forall x_n Q(x_n)).$$

Zauważmy, że powyższa formuła zawiera wolne wystąpienie zmiennej x_n .

Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje \mathfrak{M} , w których nie jest ona spełniona przez pewne wartościowania. Dla przykładu, niech struktura \mathfrak{M} oraz wartościowanie w będą określone w sposób następujący:

- uniwersum \mathfrak{M} jest zbiór wszystkich liczb naturalnych
- interpretacją predykatu P jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 4
- interpretacją predykatu Q jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 2
- wartościowanie w określone jest następująco: $w_i = 0$, dla wszystkich i .

Wtedy $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n (P(x_n) \rightarrow Q(x_n)) \rightarrow (P(x_n) \rightarrow \forall x_n Q(x_n))$.

4. Pokażemy, że istnieją formuły α oraz β takie, że x_n jest wolna w β i dla których $\forall x_n (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x_n \alpha \rightarrow \beta)$ nie jest tautologią KRP.

Niech P oraz Q będą dowolnymi predykatami jednoargumentowymi. Niech α będzie formułą $P(x_n)$, a β formułą $Q(x_n)$. Zauważmy, że x_n jest zmienną wolną formuły β . Formuła (A17) ma w tym przypadku postać:

$$\forall x_n (P(x_n) \rightarrow Q(x_n)) \rightarrow (\exists x_n P(x_n) \rightarrow Q(x_n)).$$

Zauważmy, że powyższa formuła zawiera wolne wystąpienie zmiennej x_n .

Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje \mathfrak{M} , w których nie jest ona spełniona przez pewne wartościowania. Dla przykładu, niech struktura \mathfrak{M} oraz wartościowanie w będą określone w sposób następujący:

- uniwersum \mathfrak{M} jest zbiór zbiorów wszystkich liczb naturalnych
- interpretacją predykatu P jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 4
- interpretacją predykatu Q jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 2
- wartościowanie w określone jest następująco: $w_i = 1$, dla wszystkich i .

Wtedy $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n (P(x_n) \rightarrow Q(x_n)) \rightarrow (\exists x_n P(x_n) \rightarrow Q(x_n))$.

Reguły wnioskowania

Niech \mathcal{R} będzie regułą wnioskowania w KRP. Mówimy, że \mathcal{R} jest **niezawodna** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego sekwentu $(X, \alpha) \in \mathcal{R}$:
 $X \models_{krp} \alpha$.

Reguła (o schemacie) (X, α) **zachowuje własność bycia tautologią**, wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli wszystkie elementy zbioru X są tautologiami KRP, to również α jest tautologią KRP.

Przez **regułę generalizacji** rozumiemy następującą regułę wnioskowania:

$$(RG) \frac{\alpha}{\forall x_n \alpha}.$$

Reguła odrywania:

$$(RO) \frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$$

jest znana z wykładów semestru zimowego.

Reguły wnioskowania

Twierdzenie 16.9.

Reguła odrywania i reguła generalizacji zachowują własność bycia tautologią.

Twierdzenie 16.10.

Schematy tautologii KRZ są schematami tautologii KRP.

Podobnie jak w KRZ, również w KRP każda reguła niezawodna zachowuje własność bycia tautologią.

Reguły wnioskowania

Na wykładach 20–21, przy omawianiu aksjomatycznego ujęcia KRP rozważać będziemy wiele dalszych reguł wnioskowania, np.:

$$\frac{\forall x_n \alpha}{S(t, x_n, \alpha)},$$

o ile term t jest podstawialny za x_n w α .

$$\frac{S(t, x_n, \alpha)}{\exists x_n \alpha},$$

o ile term t jest podstawialny za x_n w α .

Reguły wnioskowania

$$\frac{\forall x_n (\alpha \rightarrow \beta)}{\alpha \rightarrow \forall x_n \beta},$$

o ile zmienna x_n nie jest wolna w α .

$$\frac{\forall x_n (\alpha \rightarrow \beta)}{\exists x_n \alpha \rightarrow \beta},$$

o ile zmienna x_n nie jest wolna w β .

Można pokazać, że powyższe cztery reguły są niezawodne. Zachowują też własność bycia tautologią.

Twierdzenie o dedukcji wprost

Twierdzenie 16.11. *Twierdzenie o dedukcji wprost* (wersja semantyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β zachodzi następująca równoważność:

$$X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \beta \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } X \models_{krp} \alpha \rightarrow \beta.$$

Twierdzenie o dedukcji nie wprost

Twierdzenie 16.12. *Twierdzenie o dedukcji nie wprost* (wersja semantyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β zachodzą następujące równoważności:

- (a) $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krp} \neg\alpha$.
- (b) $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krp} \alpha$.

Niektóre ważne tautologie KRP

- 1. $\forall x \alpha \rightarrow \alpha$.
- 2. $\forall x \alpha \rightarrow \alpha(x/t)$, o ile term t jest podstawialny za x w α .
- 3. $\alpha \rightarrow \exists x \alpha$.
- 4. $\alpha(x/t) \rightarrow \exists x \alpha$, o ile term t jest podstawialny za x w α .
- 5. $\forall x \alpha \rightarrow \exists x \alpha$.
- 6. $\forall x \alpha \equiv \forall y \alpha(x/y)$, o ile zmienna y nie jest wolna w α oraz y jest podstawialna za zmienną x w α .
- 7. $\exists x \alpha \equiv \exists y \alpha(x/y)$, o ile zmienna y nie jest wolna w α oraz y jest podstawialna za zmienną x w α .
- 8. $\forall x \alpha \equiv \alpha$, o ile α nie zawiera x jako zmiennej wolnej.
- 9. $\exists x \alpha \equiv \alpha$, o ile α nie zawiera x jako zmiennej wolnej.
- 10. $\forall x \forall y \alpha \equiv \forall y \forall x \alpha$.

Niektóre ważne tautologie KRP

- 11. $\exists x \exists y \alpha \equiv \exists y \exists x \alpha$.
- 12. $\exists x \forall y \alpha \rightarrow \forall y \exists x \alpha$.
- 13. $\forall x \forall y \alpha \rightarrow \forall x \alpha(y/x)$, o ile x jest podstawialna za y w α .
- 14. $\exists x \alpha(y/x) \rightarrow \exists x \exists y \alpha$, o ile x jest podstawialna za y w α .
- 15. $\neg \forall x \alpha \equiv \exists x \neg \alpha$.
- 16. $\neg \exists x \alpha \equiv \forall x \neg \alpha$.
- 17. $\forall x \alpha \equiv \neg \exists x \neg \alpha$.
- 18. $\exists x \alpha \equiv \neg \forall x \neg \alpha$.
- 19. $(\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \beta$.
- 20. $(\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha(x/t)) \rightarrow \beta(x/t)$, o ile t jest podstawialny za x do α i do β .

Niektóre ważne tautologie KRP

- 21. $\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \beta)$.
- 22. $\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$.
- 23. $(\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \exists x \beta$.
- 24. $\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \exists x \beta)$.
- 25. $\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x \alpha \rightarrow \exists x \beta)$.
- 26. $\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\exists x \alpha \rightarrow \beta)$, o ile x nie jest wolna w β .
- 27. $\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \forall x \beta)$, o ile x nie jest wolna w α .
- 28. $\exists x (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\forall x \alpha \rightarrow \beta)$, o ile x nie jest wolna w β .
- 29. $\exists x (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \exists x \beta)$, o ile x nie jest wolna w α .
- 30. $\forall x (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x \alpha \wedge \forall x \beta)$.

Niektóre ważne tautologie KRP

- 31. $\exists x (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x \alpha \vee \exists x \beta)$.
- 32. $(\forall x \alpha \vee \forall x \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \vee \beta)$.
- 33. $\exists x (\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\exists x \alpha \wedge \exists x \beta)$.
- 34. $\forall x (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x \alpha \wedge \beta)$, o ile x nie jest wolna w β .
- 35. $\forall x (\alpha \wedge \beta) \equiv (\alpha \wedge \forall x \beta)$, o ile x nie jest wolna w α .
- 36. $\forall x (\alpha \vee \beta) \equiv (\forall x \alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest wolna w β .
- 37. $\forall x (\alpha \vee \beta) \equiv (\alpha \vee \forall x \beta)$, o ile x nie jest wolna w α .
- 38. $\exists x (\alpha \wedge \beta) \equiv (\exists x \alpha \wedge \beta)$, o ile x nie jest wolna w β .
- 39. $\exists x (\alpha \wedge \beta) \equiv (\alpha \wedge \exists x \beta)$, o ile x nie jest wolna w α .
- 40. $\exists x (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x \alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest wolna w β .

Niektóre ważne tautologie KRP

- 41. $\exists x (\alpha \vee \beta) \equiv (\alpha \vee \exists x \beta)$, o ile x nie jest wolna w α .
- 42. $\forall x (\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \forall x (\beta \rightarrow \alpha))$.
- 43. $\forall x (\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \equiv \forall x \beta)$.
- 44. $\forall x (\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\exists x \alpha \equiv \exists x \beta)$.

Odpowiedź na pytanie Państwa Studentek i Studentów:

Czy trzeba znać te tautologie?

jest krótka i brzmi:

TAK.

Koniec

W następnej prezentacji znajdziecie przykłady oraz ćwiczenia dotyczące semantyki KRP.

Zadanie domowe. Rozwiąż zadania 59–77 z *Ćwiczeń z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz.

Proszę pamiętać o dwóch sprawach:

- Bez umiejętności rozwiązywania zadań nie zdasz egzaminu z logiki. Wybór należy do ciebie.
- Bawimy się wesoło, bo zawsze najlepiej jest się wesoło bawić.
Logic is fun.