Logika Matematyczna (2,3)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

11, 18 X 2007

Język Klasycznego Rachunku Zdań

W skład **alfabetu** języka KRZ wchodzą:

- **zmienne zdaniowe**: $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (zbiór wszystkich tych zmiennych oznaczymy przez V_{KRZ})
- **spójniki (prawdziwościowe)**:
  - $\neg$ (negacja),
  - $\wedge$ (koniunkcja),
  - $\vee$ (alternatywa [nierozłączna]),
  - $\rightarrow$ (implikacja [materialna]),
  - $\equiv$ (równoważność [materialna]).
- **symbole pomocnicze**: (,) — nawias lewy oraz nawias prawy.

To jedna z wielu możliwości wyboru alfabetu. Inna podana została na poprzednim wykładzie (język $L_{\heartsuit}$).

Język KRZ

Zbiór F_{KRZ} wszystkich **formuł** języka KRZ definiowany jest indukcyjnie:

- (1) każda zmienna zdaniowa jest formułą
- (2) jeśli $\alpha \in F_{KRZ}$, to $\neg(\alpha)$ jest elementem F_{KRZ}
- (3) jeśli $\alpha \in F_{KRZ}$ oraz $\beta \in F_{KRZ}$, to: $(\alpha) \wedge (\beta) \in F_{KRZ}$, $(\alpha) \vee (\beta) \in F_{KRZ}$, $(\alpha) \rightarrow (\beta) \in F_{KRZ}$, $(\alpha) \equiv (\beta) \in F_{KRZ}$
- (4) każda formuła KRZ jest bądź zmienną zdaniową, bądź powstaje z formuł KRZ poprzez zastosowanie reguły (2) lub reguły (3).

Zwróćmy uwagę, że procedura rozstrzygania, czy dowolny (skończony) ciąg elementów alfabetu języka KRZ jest formułą KRZ jest efektywna: w skończonej liczbie kroków (biorących pod uwagę jedynie kształt symboli oraz ich kolejność) daje odpowiedź.

Język KRZ

Przyjmiemy pewne umowy notacyjne:

- opuszczamy nawiasy otaczające pojedyncze zmienne (np. zamiast $\neg(p_i)$ piszemy $\neg p_i$);
- zmienne zdaniowe zapisujemy zwykle: p, q, r, s, t;
- symbole α, β, γ oznaczają dowolne formuły języka KRZ;
- symbole X, Y, Z oznaczają dowolne zbiory formuł języka KRZ.

Na razie będziemy rygorystycznie przestrzegać używania nawiasów. Po nabraniu wprawy wprowadzimy pewne reguły ich opuszczania.

Uwaga. O języku KRZ mówimy teraz w pewnym metajęzyku. Podobnie, o semantyce języka KRZ będziemy mówić w metajęzyku.

Język KRZ

Zauważmy, że zbiór F_{KRZ} formuł jest uniwersum algebry, której funkcje wyznaczone są przez spójniki prawdziwościowe. Oznaczmy tę algebrę przez:

$$\mathfrak{F} = \langle F_{KRZ}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv \rangle$$

Spójniki można traktować jako operacje na wyrażeniach:

$\wedge : F_{KRZ} \times F_{KRZ} \rightarrow F_{KRZ}$	$\wedge(\alpha, \beta) = (\alpha) \wedge (\beta)$
$\vee : F_{KRZ} \times F_{KRZ} \rightarrow F_{KRZ}$	$\vee(\alpha, \beta) = (\alpha) \vee (\beta)$
$\rightarrow: F_{KRZ} \times F_{KRZ} \rightarrow F_{KRZ}$	$\rightarrow (\alpha, \beta) = (\alpha) \rightarrow (\beta)$
$\equiv: F_{KRZ} \times F_{KRZ} \rightarrow F_{KRZ}$	$\equiv (\alpha, \beta) = (\alpha) \equiv (\beta)$
$\neg : F_{KRZ} \rightarrow F_{KRZ}$	$\neg(\alpha) = \neg(\alpha)$

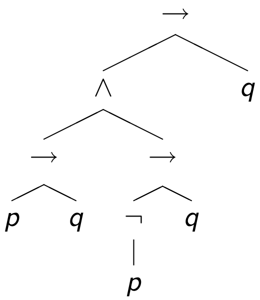
Algebrę $\mathfrak{F}$ nazywamy **algebrą języka KRZ**.

Język KRZ

Każdą formułę języka KRZ reprezentować można przez drzewo. Jedna z możliwych drzewowych reprezentacji budowy składniowej np. formuły

$$((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

wygląda następująco:

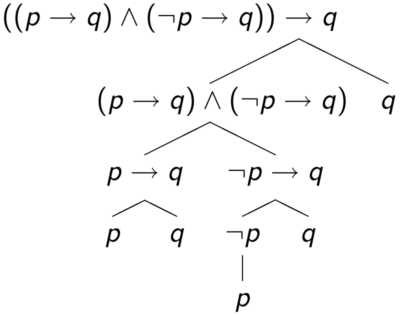


Język KRZ

Inna z możliwych drzewowych reprezentacji budowy składniowej formuły:

$$((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

wygląda następująco:



Semantyka KRZ

Niech dane będą dwa różne przedmioty: 0 oraz 1. Nieważne, czym one są, istotne jest aby były różne. Pierwszy z nich (tj. 0) możesz nazwać Fałszem (albo np. Ściemą), drugi (tj. 1) możesz nazwać Prawdą (albo np. Odlotem). Elementy zbioru $\{0, 1\}$ nazwiemy wartościami logicznymi.

Wartościowaniem formuł w KRZ nazywamy każdą funkcję $h : F_{KRZ} \rightarrow \{0, 1\}$ taką, że:

- $h(\neg(\alpha)) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 0$
- $h((\alpha) \wedge (\beta)) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 1$ i $h(\beta) = 1$
- $h((\alpha) \vee (\beta)) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 0$ i $h(\beta) = 0$
- $h((\alpha) \rightarrow (\beta)) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 1$ i $h(\beta) = 0$
- $h((\alpha) \rightarrow (\beta)) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = h(\beta)$.

Semantyka KRZ

Uwaga. Inna możliwość (którą zaraz przedstawimy) wprowadzenia pojęcia wartościowania jest następująca:

- wartościowaniem zmiennych zdaniowych (wzz) nazywamy dowolną funkcję $h : V_{KRZ} \to \{0, 1\}$ (a więc dowolny nieskończony ciąg o wyrazach 0 i 1)
- wartość formuły przy danym wzz określamy indukcyjnie, korzystając z wybranych funkcji prawdziwościowych skojarzonych ze spójnikami prawdziwościowymi.

Dowolną funkcję, która każdemu skończonemu ciągowi wartości logicznych przyporządkowuje wartość logiczną nazywamy **funkcją prawdziwościową**.

Jednoargumentowe funkcje prawdziwościowe

arg	1	2	3	4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Pierwsza kolumna tabeli podaje wszystkie wartości argumentu, kolumny o numerach 1–4 podają wartość dla tego argumentu każdej z czterech jednoargumentowych funkcji prawdziwościowych. Funkcja o wartościach z kolumny 3 nazywana jest **Negacją**. Oznaczmy ją symbolem Ng. Zatem:

$$Ng(0) = 1, \qquad Ng(1) = 0.$$

Dwuargumentowe funkcje prawdziwościowe

a_1	a_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Pierwsze dwie kolumny podają wszystkie układy wartości argumentów, kolumny o numerach 1–16 podają wartość dla tego układu argumentów każdej z szesnastu dwuargumentowych funkcji prawdziwościowych.

Semantyka KRZ

Wprowadzamy oznaczenia dla niektórych z tych funkcji:

Funkcja o wartościach z kolumny	nazywana jest	i oznaczana
2	**Koniunkcją**	*Kn*
8	**Alternatywą**	*Al*
14	**Implikacją**	*Im*
10	**Równoważnością**	*Rw*

Uwaga. Nie pogub się: masz spójniki prawdziwościowe ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$) oraz funkcje prawdziwościowe (*Ng*, *Kn*, *Al*, *Im*, *Rw*). Te pierwsze to symbole językowe, te drugie to pewne elementy pozajęzykowe.

Semantyka KRZ

Zapamiętanie wartości wymienionych funkcji ułatwić powinna poniższa tabelka:

$Kn(x,y) = 1$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = 1$ oraz $y = 1$
$Al(x,y) = 0$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = 0$ oraz $y = 0$
$Im(x,y) = 0$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = 1$ oraz $y = 0$
$Rw(x,y) = 1$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = y$

Uwaga. Można rozważać dowolne *n*-argumentowe funkcje prawdziwościowe. Dla prezentacji semantyki KRZ nie jest to jednak potrzebne.

Semantyka KRZ

Jeśli w jest wzz, to niech w_i oznacza i-ty element ciągu w.
Funkcja $Val : (F_{KRZ} \times \{0,1\}^{\omega}) \longrightarrow \{0,1\}$ przyporządkowuje każdej parze (α, w) złożonej z formuły α oraz wzz w jednoznacznie wyznaczoną wartość logiczną, nazywaną **wartością formuły α przy wzz w**.
Definicja funkcji Val jest indukcyjna (tzw. **indukcja strukturalna** po budowie formuły α):

- $Val(p_i, w) = w_i$;
- $Val(\neg(\alpha), w) = Ng(Val(\alpha, w))$;
- $Val((\alpha) \wedge (\beta), w) = Kn(Val(\alpha, w), Val(\beta, w))$;
- $Val((\alpha) \vee (\beta), w) = Al(Val(\alpha, w), Val(\beta, w))$;
- $Val((\alpha) \rightarrow (\beta), w) = Im(Val(\alpha, w), Val(\beta, w))$;
- $Val((\alpha) \leftrightarrow (\beta), w) = Rw(Val(\alpha, w), Val(\beta, w))$.

Semantyka KRZ

Mamy zatem wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między spójnikami prawdziwościowymi oraz funkcjami prawdziwościowymi. Często spotykamy w podręcznikach uproszczone tabelki, wiążące wartości logiczne bezpośrednio ze spójnikami (w pierwszej kolumnie wartość pierwszego argumentu, w pierwszym wierszu — wartość drugiego, na przecięciu wiersza i kolumny — wartość formuły dla danych argumentów):

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\equiv$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\neg$	
0	1
1	0

Semantyka KRZ

Powinno być jasne, że każda funkcja jednoargumentowa postaci $Val(\, , w) : F_{KRZ} \to \{0, 1\}$ dla pewnego wzz w jest wartościowaniem formuł języka KRZ.

Niech funkcja $\pi : F_{KRZ} \times \{0, 1\} \to F_{KRZ}$ będzie określona warunkiem: $\pi(\alpha, w) = \alpha$ dla dowolnej formuły α oraz wzz w.

Każde wartościowanie h formuł języka KRZ można jednoznacznie przedstawić w postaci:

$$h(\pi(\alpha, w)) = Val(\alpha, w).$$

Mamy zatem wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między obydwoma sposobami wprowadzania pojęcia wartościowania formuł języka KRZ. Możemy posługiwać się każdym z nich, co też będziemy czynić.

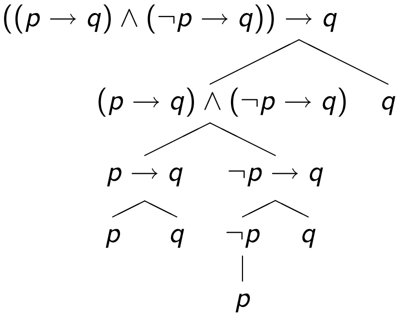
Semantyka KRZ

Wartość formuły przy danym wzz zależy tylko od skończonej liczby elementów tego wzz (bo każda formuła zawiera jedynie skończoną liczbę zmiennych). Ustalanie wartości formuły przy danym wzz jest procedurą **obliczalną**: dla dowolnej formuły oraz wzz można w skończonej liczbie prostych, mechanicznych kroków (jawnie opisanych w podanych wyżej tabelkach) ustalić wartość tej formuły przy tym wzz. Przy tym, jeśli formuła α zawiera n zmiennych zdaniowych, to przy ustalaniu jej wartości wystarczy brać pod uwagę najwyżej 2^n wzz.

Przypomnij sobie drzewową reprezentację budowy składniowej formuł: każde wzz umieszcza 0 oraz 1 na liściach drzewa, a funkcje prawdziwościowe pozwalają w sposób jednoznaczny wyznaczyć wartość każdego węzła na podstawie wartości jego bezpośrednich potomków. I tak aż do przypisania wartości korzeniowi drzewa.

Demokratyczne Upoważnienie Poprzez Aplauz

Przypomnijmy jedną z możliwych drzewowych reprezentacji budowy składniowej formuły $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$



Łatwo się przekonać, że jakkolwiek rozmieścimy 0 oraz 1 na liściach drzewa, to wartość korzenia będzie równa 1. Formuły o tej własności nazwiemy tautologiami KRZ.

Semantyka KRZ: pojęcie tautologii KRZ

Tautologią KRZ nazywamy każdą formułę języka KRZ, która przy każdym wartościowaniu przyjmuje wartość 1.

Tak więc, formuła α **jest** tautologią KRZ, gdy dla każdego wartościowania h, mamy: $h(\alpha) = 1$.
Formuła α **nie jest** tautologią KRZ, gdy istnieje wartościowanie h takie, że $h(\alpha) = 0$.

Uwaga. Badamy nie konkretne formuły, lecz raczej schematy formuł. Dla przykładu, $(\alpha) \vee (\neg(\alpha))$ jest schematem tautologii KRZ dla dowolnej formuły α, zaś np. $(\alpha) \to ((\alpha) \wedge (\beta))$ nie jest schematem tautologii KRZ — bo np. szczególny przypadek tego schematu: $p_1 \to (p_1 \wedge p_2)$ nie przy każdym wartościowaniu przyjmuje wartość 1. W dalszym ciągu będziemy używać terminu „tautologia KRZ" zarówno dla poszczególnych formuł języka KRZ, jak i dla schematów formuł.

Semantyka KRZ: pojęcie tautologii KRZ

Tautologiami KRZ są zatem dokładnie te formuły α, dla których $Val(\alpha, w) = 1$ dla każdego wzz w.
Formuła α nie jest tautologią KRZ, gdy istnieje co najmniej jedno wzz w takie, że $Val(\alpha, w) = 0$.

Rozważmy matrycę logiczną $\mathfrak{B}_2 = \langle \{0, 1\}, Ng, Kn, Al, Im, Rw, \{1\} \rangle$ z uniwersum złożonym z wartości logicznych i z jednoelementowym zbiorem $\{1\}$ wartości wyróżnionych. Przypomnijmy, że $\mathfrak{F} = \langle F_{KRZ}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv \rangle$ jest algebrą formuł języka KRZ.

Tautologiami KRZ są dokładnie te formuły α, które przy każdym homomorfizmie $h : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{B}_2$ przyjmują wartość wyróżnioną w matrycy $\mathfrak{B}_2$, tj. dla których zachodzi $h(\alpha) = 1$.

Semantyka KRZ: pojęcie tautologii KRZ

Zauważmy, że tautologie KRZ są dokładnie tymi formułami języka KRZ, które przyjmują wartość wyróżnioną przy każdym wartościowaniu jedynie przez wzgląd na swoją budowę składniową oraz wprzódy ustalone znaczenie stałych logicznych języka KRZ (tj. spójników prawdziwościowych). Gdy dokonujemy „przekładu", tj. podstawiamy konkretne zdania za zmienne zdaniowe, wynik takiego podstawienia w tautologii jest zawsze zdaniem prawdziwym, niezależnie od **treści** podstawianych zdań.

Formuły, które przy każdym wartościowaniu przyjmują wartość 0 nazywamy **kontrtautologiami** KRZ.
Formuła α **nie jest** zatem kontrtautologią KRZ, gdy przy co najmniej jednym wartościowaniu h mamy: $h(\alpha) = 1$.

Wszystkie formuły języka KRZ podzielić można na trzy klasy:

- tautologie KRZ
- kontrtautologie KRZ
- pozostałe formuły (nie będące ani tautologiami, ani kontrtautologiami).

Semantyka KRZ: wynikanie logiczne w KRZ

Wynikanie logiczne to relacja między zbiorami formuł. Powiemy, że zbiór Y **wynika logicznie** (w KRZ) ze zbioru X, gdy przy każdym wartościowaniu, przy którym wszystkie formuły zbioru X mają wartość 1, również wszystkie formuły zbioru Y mają wartość 1.
Zbiór Y **nie** wynika logicznie ze zbioru X, gdy istnieje co najmniej jedno wartościowanie, przy którym wszystkie formuły z X mają wartość 1, a pewna formuła ze zbioru Y ma wartość 0.

Gdy Y wynika logicznie z X, to piszemy $X \models_{KRZ} Y$, a gdy Y jest zbiorem jednoelementowym $\{\alpha\}$, to piszemy $X \models_{KRZ} \alpha$ (mówimy wtedy krótko, że formuła α wynika logicznie ze zbioru X).

Tautologie KRZ to dokładnie te formuły, które wynikają logicznie ze zbioru pustego $\emptyset$.

Semantyka KRZ: wynikanie logiczne w KRZ

Ze względów typograficznych będziemy czasem pomijać indeks KRZ w symbolu dla wynikania logicznego. Gdy Y nie wynika logicznie z X, to piszemy $X \not\models Y$. Oto niektóre własności relacji $\models$:

- $\models$ jest zwrotna: $X \models X$ dla każdego X
- $\models$ jest przechodnia: jeśli $X \models Y$ oraz $Y \models Z$, to $X \models Z$, dla wszystkich X, Y, Z
- $\models$ jest monotoniczna względem pierwszego argumentu: jeśli $X \models Y$ oraz $X \subseteq Z$, to $Z \models Y$
- $\models$ jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu: jeśli $X \models Y$ oraz $Z \subseteq Y$, to $X \models Z$
- $\emptyset \models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią KRZ.

Dygresja: wnioskowania

Wnioskowania przeprowadzamy w językach etnicznych. **Wnioskowaniem** (np. w języku polskim) nazywamy dowolny układ złożony ze zbioru zdań (przesłanek) oraz zdania (wniosku).

Między przesłankami oraz wnioskiem mogą zachodzić różne zależności: syntaktyczne, semantyczne oraz pragmatyczne. W zastosowaniach Elementarza Logicznego bada się tzw. wnioskowania dedukcyjne, tj. takie, w których budowa składniowa użytych w nich zdań przesądza o tym, że jeśli przesłanki są prawdziwe, to także wniosek jest prawdziwy.

We wnioskowaniach dedukcyjnych związek między przesłankami oraz wnioskiem oparty jest na wynikaniu logicznym. Za chwilę podamy precyzyjną definicję wnioskowań dedukcyjnych.

Semantyka KRZ: pojęcie reguły niezawodnej

Regułą (regułą wnioskowania) nazywamy dowolny układ postaci (X, α) złożony ze zbioru formuł X (przesłanek reguły) oraz formuły α (wniosku reguły).

Reguła (X, α) jest **niezawodna**, gdy $X \models \alpha$, czyli gdy α wynika logicznie z X. W przeciwnym przypadku jest **zawodna**.

Z powyższej definicji widać, że reguła (X, α) jest:

- niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy przy każdym wartościowaniu, przy którym wszystkie przesłanki reguły (X, α) mają wartość 1, jej wniosek też ma wartość 1;
- zawodna, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najmniej jedno wartościowanie, przy którym wszystkie przesłanki reguły (X, α) mają wartość 1, a jej wniosek ma wartość 0.

Semantyka KRZ: przykłady reguł niezawodnych

Oto kilka ważnych niezawodnych reguł wnioskowania:

- $(\{\alpha \to \beta, \alpha\}, \beta)$
- $(\{\alpha \to \beta, \neg\beta\}, \neg\alpha)$
- $(\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\}, \alpha \to \gamma)$
- $(\{\alpha, \neg\alpha\}, \beta)$
- $(\{\alpha \lor \beta, \neg\alpha\}, \beta)$
- $(\{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha\}, \alpha \equiv \beta)$
- $(\{\alpha \to (\beta \to \gamma)\}, (\alpha \land \beta) \to \gamma)$
- $(\{(\alpha \land \beta) \to \gamma\}, \alpha \to (\beta \to \gamma))$

Regułę wnioskowania o przesłankach $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ oraz wniosku β zapisujemy często w postaci: $\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta}$.

Dygresja: wnioskowania dedukcyjne

Spójniki logiczne w danym języku etnicznym (tu: polskim) to wyrażenia: *i*, *lub*, *jeśli...*, *to...*, *nieprawda*, *że*, itp.

Zdaniem prostym (języka etnicznego) nazywamy każde zdanie A takie, że:

- żadna część A nie jest zdaniem
- A jest zdaniem w sensie logicznym, tj. może być prawdziwe lub fałszywe.

Zdania złożone to zdania, które nie są proste. Bierzemy pod uwagę tylko złożenia zdań z użyciem spójników logicznych.

Schematem zdania A nazywamy formułę języka KRZ otrzymaną z A poprzez zastąpienie zdań prostych zmiennymi zdaniowymi, a wyrażeń reprezentujących spójniki logiczne spójnikami prawdziwościowymi.

Dygresja: wnioskowania dedukcyjne

Schematem wnioskowania złożonego ze zbioru przesłanek $\mathcal{A}$ oraz wniosku A nazywamy układ (X, α), gdzie:

- X jest zbiorem schematów zdań z $\mathcal{A}$
- α jest schematem A.

Wnioskowanie $(\mathcal{A}, A)$ nazywamy **dedukcyjnym**, jeśli jego schemat jest regułą niezawodną.

Wnioskowanie jest zatem dedukcyjne, gdy schemat jego wniosku wynika logicznie ze zbioru schematów jego przesłanek.

Uwaga. Pamiętaj: wnioskowania przeprowadzamy w językach etnicznych, schematy wnioskowań i reguły to konstrukcje z języka KRZ.

Semantyka KRZ: twierdzenia o dedukcji

Twierdzenie o dedukcji wprost (wersja semantyczna).
Dla dowolnych $X \subseteq F_{KRZ}$, $\alpha \in F_{KRZ}$, $\beta \in F_{KRZ}$ zachodzą następujące implikacje:

- Jeśli $X \cup \{\alpha\} \models_{KRZ} \beta$, to $X \models_{KRZ} \alpha \rightarrow \beta$.
- Jeśli $X \models_{KRZ} \alpha \rightarrow \beta$, to $X \cup \{\alpha\} \models_{KRZ} \beta$.

Na mocy powyższego twierdzenia (oraz praw eksportacji i importacji) reguła $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\beta}$ jest niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy implikacja $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ jest tautologią KRZ.

Prawo importacji: $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$
Prawo eksportacji: $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$
Ćwiczenie: pokaż, że te prawa są tautologiami KRZ.

Semantyka KRZ: twierdzenia o dedukcji

Twierdzenie o dedukcji nie wprost (wersja semantyczna).
Dla dowolnych $X \subseteq F_{KRZ}$, $\alpha \in F_{KRZ}$, $\beta \in F_{KRZ}$ zachodzą następujące równoważności:

- $X \cup \{\alpha\} \models_{KRZ} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{KRZ} \neg\alpha$.
- $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{KRZ} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{KRZ} \alpha$.

Z twierdzenia o dedukcji nie wprost korzystamy przeprowadzając dowody nie wprost (dowody apagogiczne).

Dowody obu twierdzeń o dedukcji zostaną przedstawione na zajęciach.

Ćwiczenia: 1. Pokaż, że wymienione przykładowo wyżej reguły są niezawodne.
2. Wykorzystaj twierdzenie o dedukcji wprost dla uzyskania z tych reguł odpowiednich tautologii KRZ.