Logika algebraiczna 10

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

2021

- W-języki wykorzystywał Roman Suszko w formalizacji idei ontologicznych zawartych w *Traktacie* Wittgensteina, a także w pracach dotyczących reifikacji sytuacji.
- W tym miejscu przedstawimy skrótowo wybrane pojęcia i fakty dotyczące tej problematyki, opierając się na ich omówieniu w monografii Omyła 1986, 152–165. Dokładniej sprawy te przedstawione zostały w artykule Suszki „Ontologia w *Traktacie* Wittgensteina".
- Rozważamy język J (nazywany SCI-językiem z kwantyfikatorami), w którym mamy do dyspozycji zmienne zdaniowe, spójniki prawdziwościowe (negacja, koniunkcja, alternatywa, implikacja, równoważność) oraz kwantyfikatory wiążące zmienne zdaniowe.

- Modelami języka J są struktury o postaci $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, \bigwedge^{\mathfrak{M}}, \bigvee^{\mathfrak{M}}, D)$ takie, że:
  1. $(\mathbf{A}, D)$ jest SCI-modelem
  2. $\bigwedge^{\mathfrak{M}}, \bigvee^{\mathfrak{M}}$ są funkcjami, których dziedziną jest zbiór wszystkich operacji wyznaczonych przez formuły języka J, a których wartościami są elementy zbioru A. Ponadto:
     $\bigwedge^{\mathfrak{M}} f \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(t) \in D$ dla każdego $t \in A$
     $\bigvee^{\mathfrak{M}} f \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(t) \in D$ dla pewnego $t \in A$.
- Określamy następującą teorię sytuacji:
  $WTQ = Cn(Gn\{\alpha \equiv \beta : (\alpha \leftrightarrow \beta) \in Cn(\emptyset)\})$.
- Teorie w języku J, które zawierają WTQ nazywamy WTQ-teoriami. Teorie te mają formalizować ideę, że zdania logicznie równoważne przedstawiają jedną i tę samą sytuację.

- Rozszerzamy język J do języka J^+ poprzez dodanie stałych zdaniowych 1, 0, spójników jednoargumentowych PW, RW, SF, oraz spójników dwuargumentowych $\leqslant$, $\prec$. Charakteryzujemy te nowe pojęcia przez definicje równościowe, których zbiór oznaczymy przez D_0:
  1. $1 \equiv \forall p\,(p \vee \neg p)$
  2. $0 \equiv \exists p\,(p \wedge \neg p)$
  3. $(p \leqslant q) \equiv ((p \rightarrow q) \equiv 1)$
  4. $(p \prec q) \equiv (q \leqslant p)$
  5. $PWp \equiv (\neg(p \equiv 0) \wedge \forall p\,(q \prec p \vee \neg q \prec p))$
  6. $RWp \equiv (p \wedge PWp)$
  7. $SFp \equiv \forall q\,(q \rightarrow q \prec p) \wedge \forall r\,(\forall q\,(q \rightarrow q \prec r) \rightarrow p \prec r)$.
- Niech H oznacza zbiór, którego jedynym elementem jest formuła $\forall p\,\forall q\,(((p \equiv q) \equiv 1) \vee ((p \equiv q) \equiv 0))$.
- Każdą teorię w języku J^+ zawierającą $WTQ \cup D_0 \cup H$ nazywamy WHQ-teorią. Teorie WTQ i WHQ są rozszerzeniami na języki z kwantyfikatorami, odpowiednio, teorii WT i WH.

Twierdzeniami WHQ są m.in. wszystkie równości boolowskie oraz ich generalizacje w języku J^+, a także generalizacje formuł reprezentowane przez schematy (tu α, β, γ są dowolnymi formułami, $i \neq j$, zmienna p_i nie jest zmienną wolną w formule γ):

1. $\alpha[p_i/\beta] \prec \forall p_i \, \alpha$
2. $\exists p_i \, \alpha \prec \alpha[p_i/\beta]$
3. $\forall p_j \, (\forall p_i \, (\gamma \prec p_j) \to (\forall p_i \, \gamma \prec p_j))$
4. $\forall p_j \, (\forall p_i \, (p_j \prec \gamma) \to (p_j \prec \exists p_i \, \gamma))$.

Model $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, \bigwedge^{\mathfrak{M}}, \bigvee^{\mathfrak{M}}, D)$ języka J^{+} nazywamy WHQ-modelem, gdy $WHQ \subseteq TR(\mathfrak{M})$. WHQ-modele mają następujące własności:

1. Algebra $\mathbf{A}$ jest algebrą Boole'a (ze względu na interpretację spójników prawdziwościowych).
2. Interpretacją stałych zdaniowych 1, 0 w modelu $\mathfrak{M}$ są, odpowiednio, $1^{\mathbf{A}}$ i $0^{\mathbf{A}}$.
3. Relacja $\leqslant^{\mathbf{A}}$, będąca interpretacją $\leqslant$ jest zdefiniowana następująco: $a \leqslant^{\mathbf{A}} b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \rightarrow^{\mathbf{A}} b = 1^{\mathbf{A}}$. Jest ona porządkiem boolowskim w algebrze $\mathbf{A}$.
4. Dla dowolnego wartościowania h zmiennych języka J w modelu $\mathfrak{M}$:
    1. $||p \leqslant q, h|| = 1^{\mathbf{A}}$ lub $||p \leqslant q, h|| = 0^{\mathbf{A}}$
    2. $||p \leqslant q, h|| = 1^{\mathbf{A}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(p) \leqslant^{\mathbf{A}} h(q)$.
5. Interpretacją spójnika $\prec$ w modelu $\mathfrak{M}$ jest relacja $\leqslant_{*}^{\mathbf{A}}$, która jest konwersem relacji $\leqslant^{\mathbf{A}}$.

- Algebrę dowolnego WHQ-modelu traktujemy jako algebrę sytuacji istniejących w tym modelu, a zbiór D wartości wyróżnionych jako zbiór faktów, zachodzących w tym modelu.
- Relację $\leqslant_{*}^{\mathbf{A}}$ nazywamy porządkiem w algebrze sytuacji, a wyrażenie $p \prec q$ będziemy czytali „sytuacja p jest zawarta w sytuacji q" (lub „sytuacja p zachodzi w sytuacji q").
- Ponieważ twierdzeniem w WHQ-teoriach jest $1 \prec p$, więc sytuacja $1^{\mathbf{A}}$ (sytuacja pusta, fakt niewłaściwy w $\mathfrak{M}$) jest zawarta w każdej sytuacji z algebry $\mathbf{A}$.
- Z kolei sytuacja $0^{\mathbf{A}}$ jest sytuacją logicznie sprzeczną (sytuacją niemożliwą) w modelu $\mathfrak{M}$.
- W każdym WHQ-modelu mamy więc dokładnie jedną sytuację pustą i dokładnie jedną sytuację logicznie sprzeczną.
- Na mocy aksjomatu $\forall p \, \forall q \, (((p \equiv q) \equiv 1) \vee ((p \equiv q) \equiv 0))$, każdej równości języka J odpowiada w dowolnym modelu tego języka albo sytuacja pusta, albo sytuacja logicznie sprzeczna.

- Dla tych zbiorów $X \subseteq A$, dla których istnieją kres górny i kres dolny względem porządku $\leqslant_*^{\mathbf{A}}$, będziemy je oznaczali, odpowiednio, przez $\sup(X)$ oraz $\inf(X)$.
- **Twierdzenie** (Omyła). Model $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, \bigwedge^{\mathfrak{M}}, \bigvee^{\mathfrak{M}}, D)$ języka J^+ jest WHQ-modelem wtedy i tylko wtedy, gdy:
  1. $\mathbf{A}$ jest algebrą Henlego (ze względu na interpretację spójników logicznych).
  2. Dla dowolnej funkcji f wyznaczonej przez formuły języka J^+ spełnione są warunki:
     1. $\bigwedge^{\mathfrak{M}} f = \sup\{f(t) : t \in A\}$
     2. $\bigvee^{\mathfrak{M}} f = \inf\{f(t) : t \in A\}$.
  3. D jest ultrafiltrem boolowskim takim, że $\bigvee^{\mathfrak{M}} f \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(t) \in D$ dla pewnego $t \in A$. $\square$

- **Twierdzenie**. Algebra **A** dowolnego WHQ-modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, \bigwedge^{\mathfrak{M}}, \bigvee^{\mathfrak{M}}, D)$ jednoznacznie wyznacza funkcje $\bigwedge^{\mathfrak{M}}$, $\bigvee^{\mathfrak{M}}$, będące interpretacjami kwantyfikatorów wiążących zmienne zdaniowe. Można więc dowolny WHQ-model oznaczać krótko jako parę $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$. $\square$
- **Twierdzenie**. Dla dowolnego WHQ-modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ i dla dowolnego wartościowania h języka J^+ w tym modelu oraz dla dowolnej formuły α zbudowanej z równości za pomocą spójników prawdziwościowych i kwantyfikatorów zachodzi: $||\alpha, h|| = 0^{\mathbf{A}}$ lub $||\alpha, h|| = 1^{\mathbf{A}}$. $\square$
- Formuły α zbudowane z równości za pomocą spójników prawdziwościowych i kwantyfikatorów nazwiemy krótko formułami specjalnymi.

- **Twierdzenie**. Dla dowolnej formuły specjalnej α języka J^+, dowolnego WHQ-modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ i dla dowolnego wartościowania h języka J^+ w tym modelu spełnione są warunki:

  1. $\sup\{t \in A : ||\alpha, h_t^p|| \in D\} = ||\forall p\, (\alpha \to p), h||$
  2. $\inf\{t \in A : ||\alpha, h_t^p|| \in D\} = ||\exists p\, (\alpha \wedge p), h||$.

  Tak więc, jeśli $\alpha(p)$ jest formułą specjalną z jedną zmienną wolną p, to dla dowolnego WHQ-modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$:

  1. kres górny zbioru elementów spełniających formułę $\alpha(p)$ w modelu $\mathfrak{M}$ jest równy $||\forall p\, (\alpha(p) \to p)||_{\mathfrak{M}}$
  2. kres dolny zbioru elementów spełniających formułę $\alpha(p)$ w modelu $\mathfrak{M}$ jest równy $||\exists p\, (\alpha(p) \wedge p)||_{\mathfrak{M}}$.

- **Dowód**. Z przytoczonego wyżej twierdzenia Omyły wynika, że: $||\forall p\, (\alpha \to p), h|| = \sup\{||(\alpha \to p), h|| : t \in A\}$.

- Jeśli α jest formułą specjalną, to dla każdego $t \in A$: $||\alpha, h_t^p|| = 1^{\mathbf{A}}$ lub $||\alpha, h_t^p|| = 0^{\mathbf{A}}$.
  - Jeśli $||\alpha, h_t^p|| = 1^{\mathbf{A}}$, to $||(\alpha \to p), h_t^p|| = t$
  - Jeśli $||\alpha, h_t^p|| = 0^{\mathbf{A}}$, to $||(\alpha \to p), h_t^p|| = 1^{\mathbf{A}}$.
- Wynika stąd, że $\sup\{t \in A : ||\alpha, h_t^p|| \in D\} = ||\forall p\, (\alpha \to p), h||$.
- W podobny sposób dowodzimy, że $\inf\{t \in A : ||\alpha, h_t^p|| \in D\} = ||\exists p\, (\alpha \wedge p), h||$. $\square$

Przyjrzymy się teraz interpretacji spójników PW, RW i SF. Dla dowolnego WHQ-modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ i dla dowolnego wartościowania h języka J^+ w tym modelu mamy:

- Element $a \in A$ spełnia formułę PWp (co oznacza, że $||PWp, h_a^p|| \in D$) wtedy i tylko wtedy, gdy a nie jest sytuacją niemożliwą oraz dla każdego $b \in A$: sytuacja b zachodzi w sytuacji a lub sytuacja $\neg^{\mathbf{A}} b$ zachodzi w a. Formułę PWp czytamy: „sytuacja p jest możliwym światem w modelu $\mathfrak{M}$". Zauważmy, że sytuacja p jest możliwym światem w modelu $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy a jest atomem ze względu na porządek $\leqslant_*^{\mathbf{A}}$ w algebrze $\mathbf{A}$. Tak więc, możliwe światy w WHQ-modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ to elementy maksymalne ze względu na porządek $\leqslant_*^{\mathbf{A}}$ w zbiorze $A - \{0^{\mathbf{A}}\}$.

- Element $a \in A$ spełnia formułę RWp (co oznacza, że $||RWp, h_a^p|| \in D$) wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in D$ oraz a spełnia formułę PWp. Formułę RWp czytamy: „sytuacja p jest realnym światem w modelu $\mathfrak{M}$". Tak więc, a jest realnym światem w modelu $\mathfrak{M}$, gdy a jest możliwym światem w modelu $\mathfrak{M}$ i faktem w modelu $\mathfrak{M}$. A zatem a jest realnym światem w modelu $\mathfrak{M}$, gdy zbiór faktów D, traktowany jako ultrafiltr boolowski, jest generowany przez element a. A to oznacza, że a jest faktem i zawiera w sensie porządku $\leqslant_*^{\mathbf{A}}$ wszystkie fakty zachodzące w modelu $\mathfrak{M}$.
- Element $a \in A$ spełnia formułę SFp wtedy i tylko wtedy, gdy a jest kresem górnym zbioru D ze względu na porządek $\leqslant_*^{\mathbf{A}}$. Formułę SFp czytamy: „sytuacja p jest kresem górnym faktów zachodzących w modelu $\mathfrak{M}$" (lub: „sytuacja p jest sumą faktów zachodzących w modelu $\mathfrak{M}$").

- **Twierdzenie**. W dowolnym WHQ-modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ istnieją:
  1. kres górny i dolny zbioru faktów;
  2. kres górny i dolny zbioru możliwych światów.
- **Dowód**. Kresem dolnym zbioru wszystkich faktów w dowolnym WHQ-modelu jest oczywiście fakt niewłaściwy w tym modelu.
- Pokażemy z kolei, że zbiór wszystkich faktów w dowolnym WHQ-modelu ma także kres górny w tym modelu.
- Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że w pewnym WHQ-modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ nie istnieje kres górny zbioru faktów.
- Oznacza to, że w modelu $\mathfrak{M}$ prawdziwe jest zdanie: $\neg\exists p\, (\forall q\, (q \to (q \prec p)) \wedge \forall r\, (\forall q\, (q \to (q \prec r)) \to (p \prec r)))$.
- W modelu $\mathfrak{M}$ prawdziwe jest zatem też zdanie: $\forall p\, (\exists q\, (q \wedge \neg(q \prec p)) \vee \exists r\, (\forall q\, (q \to (q \prec r)) \wedge \neg(p \prec r)))$.

- Dla $p = 0$ mamy zatem prawdziwą w $\mathfrak{M}$ alternatywę: $\exists q\,(q \wedge \neg(q \prec 0)) \vee \exists r\,(\forall q\,(q \to (q \prec r)) \wedge \neg(0 \prec r))$.
- Ponieważ $q \prec 0$ dla każdego q, więc pierwszy człon tej alternatywy jest fałszywy w $\mathfrak{M}$.
- W $\mathfrak{M}$ prawdziwe jest więc zdanie: $\exists r\,(\forall q\,(q \to (q \prec r)) \wedge \neg(0 \prec r))$.
- Istnieje zatem wartościowanie h w modelu $\mathfrak{M}$ takie, że $||\forall q\,(q \to (q \prec r)) \wedge \neg(r \equiv 0), h|| \in D$.
- Zachodzi dokładnie jedno z dwojga: $h(r) \in D$ lub $h(\neg r) \in D$.
   1. Jeśli $h(r) \in D$, to $||r \wedge \forall q\,(q \to (q \prec r)), h|| \in D$, czyli $h(r)$ jest kresem górnym wszystkich faktów (ponieważ jest faktem i zawiera wszystkie fakty), a to jest sprzeczne z przypuszczeniem dowodu nie wprost.
   2. Załóżmy zatem, że $h(\neg r) \in D$. Wtedy mamy $||(\neg r \prec r) \wedge \neg(r \equiv q), h|| \in D$, a to jest równoważne z tym, że $||(\neg r \equiv 1) \wedge \neg(r \equiv 0), h|| \in D$. Jednakże formuła $(\neg r \equiv 1) \wedge \neg(r \equiv 0)$ nie jest spełniona w żadnym WHQ-modelu.

Musimy więc odrzucić przypuszczenie, że nie istnieje kres górny zbioru faktów w $\mathfrak{M}$.

- Kres górny zbioru możliwych światów w WHQ-modelu $\mathfrak{M}$ możemy określić jako: $\sup\{t \in A : ||PWp, h_t^p|| \in D\}$, gdzie h jest wartościowaniem zmiennych języka J^+ w $\mathfrak{M}$.
- Kres dolny zbioru możliwych światów w WHQ-modelu $\mathfrak{M}$ możemy określić jako: $\inf\{t \in A : ||PWp, h_t^p|| \in D\}$, gdzie h jest wartościowaniem zmiennych języka J^+ w $\mathfrak{M}$.
- Pamiętamy, że wartość $||PWp, h||$ jest równa wartości pewnej formuły specjalnej. Mamy zatem:
- $\sup\{t \in A : ||PWp, h_t^p|| \in D\} = ||\forall p\, (PWp \rightarrow p)||$
- $\inf\{t \in A : ||PWp, h_t^p|| \in D\} = ||\exists p\, (p \wedge PWp)||$.
- Ponieważ wartości po prawych stronach powyższych równości są dobrze określone w modelu $\mathfrak{M}$, więc w $\mathfrak{M}$ istnieją kresy (górny i dolny) zbioru możliwych światów w tym modelu. $\square$

- **Wniosek**. Dla dowolnego WHQ-modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ mamy:
  1. $||\forall p\,(PWp \rightarrow p)||$ jest kresem górnym zbioru możliwych światów.
  2. $||\exists p\,(p \wedge PWp)||$ jest kresem dolnym zbioru możliwych światów. $\square$
- Samo istnienie kresów zbioru faktów w dowolnym WHQ-modelu wynika z tego, że algebra sytuacji jest algebrą Boole'a. Dowód istnienia kresów zbioru możliwych światów wymaga odwołania się do interpretacji kwantyfikatorów w WHQ-modelach oraz zasady zero-jedynkowości operacji identyfikacji sytuacji (aksjomat zbioru H).
- Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby w modelu $\mathfrak{M}$ *nie istniały* sytuacje będące możliwymi światami jest to, aby kres górny zbioru możliwych światów był sytuacją pustą, zaś kres dolny sytuacją logicznie sprzeczną.
- W modelu $\mathfrak{M}$ istnieje sytuacja będąca światem realnym wtedy i tylko wtedy, gdy kres dolny możliwych światów jest faktem.

- Dla każdej sytuacji z algebry $\mathbf{A}$, oprócz sytuacji $0^{\mathbf{A}}$, sytuacja ta zachodzi w pewnym możliwym świecie wtedy i tylko wtedy, gdy $||\exists p\,(p \wedge PWp)|| = 1^{\mathbf{A}}$, czyli wtedy, gdy kres dolny możliwych światów jest sytuacją pustą (faktem niewłaściwym):
  1. Załóżmy, że $a \in A$, $a \neq 0^{\mathbf{A}}$ oraz dla każdej sytuacji b, która jest możliwym światem w $\mathfrak{M}$, sytuacja a nie zachodzi w b. Wtedy sytuacja $\neg^{\mathbf{A}} a$ zachodzi w każdym świecie możliwym w $\mathfrak{M}$, co implikuje, że sytuacja $\neg^{\mathbf{A}} a$ jest zawarta w sytuacji, która jest kresem dolnym możliwych światów. Mamy zatem: $1^{\mathbf{A}} \neq \neg^{\mathbf{A}} a \leqslant_{*}^{\mathbf{A}} ||\exists p\,(p \wedge PW_p)||$, a to znaczy, że kres dolny zbioru możliwych światów w $\mathfrak{M}$ nie jest faktem niewłaściwym w tym modelu.
  2. Załóżmy z kolei, że $||\exists p\,(p \wedge PW_p)|| = a \neq 1^{\mathbf{A}}$. Wtedy sytuacja $\neg^{\mathbf{A}} a$ nie jest sytuacją niemożliwą, a skoro w każdym możliwym świecie zachodzi sytuacja a, to sytuacja $\neg^{\mathbf{A}} a$ nie zachodzi w żadnym z nich. To znaczy, że istnieje sytuacja różna od niemożliwej i nie zachodząca w żadnym z możliwych światów w $\mathfrak{M}$.
- Teoria WHQ jest teorią sytuacji, sformułowaną za pomocą wyłącznie terminów logicznych.

- W formalizacji ontologii *Traktatu* Wittgensteina Roman Suszko przyjmował teorię sytuacji WHQ z dodaniem następujących aksjomatów:
  1. $\forall p\, (\neg(p \equiv 0) \rightarrow \exists q\, (PWq \wedge (p \prec q)))$
     Ten aksjomat stwierdza, że każda sytuacja różna od sytuacji logicznie sprzecznej, zachodzi w pewnej sytuacji będącej możliwym światem.
  2. $\exists p\, (p \wedge PWp)$
     Ten aksjomat stwierdza, że istnieje sytuacja będąca światem realnym.
  3. $\exists p\, (\forall q\, (\alpha(q) \rightarrow (q \prec p)) \wedge \forall r\, (\forall q\, (\alpha(q) \rightarrow (q \prec r)) \rightarrow (p \prec r)))$
     Ten schemat aksjomatów stwierdza, że dla dowolnej formuły α języka J^+ istnieje kres górny zbioru tych elementów, które spełniają tę formułę.
  4. $\exists p\, (\forall q\, (\alpha(q) \rightarrow (p \prec q)) \wedge \forall r\, (\forall q\, (\alpha(q) \rightarrow (r \prec q)) \rightarrow (r \prec p)))$
     Ten schemat aksjomatów stwierdza, że dla dowolnej formuły α języka J^+ istnieje kres dolny zbioru tych elementów, które spełniają tę formułę.
- Tak wzbogacona teoria WHQ jest niesprzeczna, (bo jest spełniona w modelu fregowskim $(\mathbf{A}, D)$, w którym $\mathbf{A}$ jest dwuelementową algebrą Henlego na zbiorze $\{0, 1\}$, zaś $D = \{1\}$).

Suszko przyjmował następujące założenia o dowolnym modelu $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ języka J^+ jako modelu teorii sytuacji:

- Algebra $\mathbf{A}$ jest algebrą Henlego, atomową za względu na porządek $\leqslant_*^{\mathbf{A}}$.
- Algebra $\mathbf{A}$ jest elementarnie zupełna, czyli dla dowolnej formuły α jezyka J^+ i dowolnego wartościowania zmiennych h istnieją kresy (ze względu na porządek $\leqslant_*^{\mathbf{A}}$) zbioru $\{t \in A : ||\alpha, h_t^p|| \in D\}$.
- Zbiór D jest boolowskim ultrafiltrem generowanym przez pewien atom algebry $\mathbf{A}$, co znaczy, że istnieje fakt, który zawiera wszystkie fakty modelu $\mathfrak{M}$.